



Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXVI. Jahrgang.

Mit 7 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1881.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Seite

Synthetische und analytische Geometrie.

Perspective.

Mechanik und Kinematik.

Geodäsie und Astronomie.

Molecularphysik und mechanische Wärmetheorie.

Meteorologie.

I.

Die Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen.

Von

W. Veltmann.

Hierzu Taf. I Fig. 1—3.

I. Die Integration der Gleichung

$$1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

oder der beiden Gleichungen

$$2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

auf einer Kreisfläche bei gegebenen Randwerthen von u ist von Herrn Prym in Bd. 73 und Herrn Schwarz in Bd. 74 von Borchardt's Journal für Mathematik für diejenigen Fälle, in welchen eine bestimmte Lösung existirt, ausgeführt worden. In einer Abhandlung: „Einige Zweifel an der allgemeinen Darstellbarkeit einer willkürlichen periodischen Function einer reellen Variabeln durch eine trigonometrische Reihe“ im Programm der Universität zu Bern vom Jahre 1874 hat Herr Schläfli das die beiden vorigen mit umfassende Problem der Bestimmung einer Function $u+iv$ auf einer Kreisfläche aus dem Randwerthe von u ebenfalls vollständig gelöst. Ausserdem sind noch an den weiter unten zu erwähnenden Stellen die Fälle bearbeitet worden, wo der Radius des Kreises unendlich oder die Kreisfläche eine mehrfach zusammenhängende mit Windungspunkt ist.

Hiernach könnten obige Probleme, was die Resultate der Untersuchungen über dieselben betrifft, als erledigt betrachtet werden. Hinsichtlich der Einfachheit und Naturgemässheit des Verfahrens aber glaube ich einen nicht unwesentlichen Beitrag zu den Grundlagen der Functionentheorie zu liefern, wenn ich hier zur Behandlung obiger Probleme, sowie überhaupt zur Nachweisung der allgemeinen Eigenschaften der Functionen einen Weg zeige, den ich wohl als den einfachsten und natürlichsten bezeichnen kann.

Als das zu behandelnde Problem betrachte ich die Bestimmung einer Function $u+iv$ auf der Kreisfläche bei gegebenem Randwerthe von v. Demgemäss wird zur Lösung desselben von den Grundeigenschaften der Functionen (Monogenität, Conformität der geometrischen Bilder) ausgegangen, statt von secundären Folgerungen aus denselben, als welche z. B. obige Differentialgleichungen erscheinen. Die allgemeinen Sätze von Cauchy und Riemann benutze ich nicht, sondern statt derselben einen besondern Fall eines Satzes von Cauchy, den ich unmittelbar aus der Eigenschaft von $u+iv$ ableite, eine Function von $x+iy$, also nicht von x^2+y^2, d. h. vom Radius vector zu sein. Ferner benutze ich, um von den inneren Werthen des am Rande gegebenen Theils der Function zu den Randwerthen überzugehen, nicht den analytischen Ausdruck desselben, sondern die, wie es scheint, bisher nicht erkannte höchst einfache geometrische Bedeutung dieses Ausdrucks. Dass ich statt des Randwerthes von u, wie gewöhnlich geschieht, den von v als gegeben annehme, ist an sich unerheblich; es ist aus dem Grunde geschehen, weil dann gleichsam als Elementarbestandtheil aller Functionen der Logarithmus, sonst aber der mit i multiplicirte Logarithmus erscheint. Irgendwelche mehr oder weniger fremdartige Sachen, wie Doppelintegrale, Variation von Integralen u. s. w. werden gar nicht mit zu Hilfe genommen.

In Bezug auf die im Folgenden benutzten rechtwinkligen Coordinatensysteme sei bemerkt, dass, wie gewöhnlich, die positiven y oder η als links von den positiven x oder ξ liegend angenommen werden.

Wir nennen eine Function $u+iv$ in irgend einem Punkte der Ebene monogen oder polygen, je nachdem in diesem Punkte $(du+idv):(dx+idy)$ nach allen oder nicht nach allen Richtungen denselben Werth hat. Da eine Function nicht in einer stetigen Punktreihe (es sei denn, dass in dieser noch andere Besonderheiten stattfänden) überall polygen sein kann und da stetige Reihen von besonderen Punkten anderer Art ebenfalls auszuschliessen sind, so können wir die auf die allgemeine Beschaffenheit der zu bestimmenden Function bezüglichen Bedingungen unseres Problems in folgender Weise feststellen.

Auf einer Kreisfläche soll eine Function $u+iv$ bestimmt werden, welche im Innern der Fläche mit etwaiger Ausnahme einzelner Punkte überall bestimmt, endlich, eindeutig, stetig und monogen ist und deren Werthe in den etwaigen Unendlichkeitspunkten die erste Ordnung des Unendlichen nicht erreichen.

Hiermit sind also viererlei Singularitäten in einzelnen Punkten zugelassen, von welchen auch in einem und demselben Punkte mehrere vorkommen können, nämlich verschiedene endliche Werthe der Function oder ihres Differentialquotienten aus verschiedenen Richtungen, unendliche Werthe von geringerer als der ersten Ordnung und gänzliche Unbestimmtheit. Letztere würde z. B. bei einer Function, welche aus einer

überall endlichen, doppeltperiodischen Function (die Unmöglichkeit einer solchen kann hier noch nicht behauptet werden) durch Projection mittels reciproker Radien erhalten wäre, im Coordinatenanfang stattfinden.

Das Verhalten der Function in einem Punkte, der vom Innern aus auf irgend einem Wege nach einem Punkte des Randes gelangt, bleibt einstweilen dahingestellt.

Der gegebene Kreis G (Fig. 1) soll der Grundkreis, irgend ein Kreis im Innern desselben ein Binnenkreis genannt werden.

Wir betrachten die Function zunächst innerhalb eines Binnenkreises K (Fig. 1), dessen sonst willkürliche Wahl durch die Bedingung eingeschränkt ist, dass der Mittelpunkt desselben keiner der etwaigen singulären Punkte sei. Wenn in Bezug auf Polarcoordinaten mit dem Mittelpunkte dieses Kreises als Pol, den Leitstrahlen ϱ und nach links wachsenden Winkeln γ

$$u = \varphi(\varrho, \gamma), \quad v = \psi(\varrho, \gamma)$$

ist und die mit der Function $u + iv$ bedeckte Kreisfläche K um einen Winkel $= \alpha$ nach rechts gedreht wird, so verwandelt sich die Function in $\varphi(\varrho, \gamma + \alpha) + i\,\psi(\varrho, \gamma + \alpha)$. Multiplicirt man mit der Constanten $\frac{d\alpha}{2\pi}$ und integrirt zwischen 0 und 2π, so erhält man eine neue Function

$$u_1 + iv_1 = \frac{1}{2\pi}\int[\varphi(\varrho, \gamma + \alpha) + i\,\psi(\varrho, \gamma + \alpha)]\,d\alpha.$$

Die Function $u_1 + iv_1$ entsteht hier in der Weise, dass die Function $(u + iv)\,d\alpha$ gleichsam um den Mittelpunkt von K gedreht wird und zwar successive um einen Winkel $= d\alpha$, $2\,d\alpha$ u. s. w. und dass die so entstandenen Functionen sich über einander lagern. Eine etwaige Unstetigkeit oder Unbestimmtheit von $u + iv$ in einem einzelnen Punkte würde sich also auf den ganzen Kreis vertheilen, den ein solcher Punkt beschreibt. Aber der letztere erzeugt hierdurch nicht etwa eine stetige Folge solcher Ausnahmepunkte, sondern wegen der Multiplication mit dem unendlich kleinen $d\alpha$ verschwindet die Unstetigkeit oder Unbestimmtheit gänzlich. Die Function $u_1 + iv_1$ ist überall bestimmt, endlich, eindeutig und stetig und wenigstens zwischen den von den etwaigen singulären Punkten beschriebenen Kreisen überall monogen. Nun sind aber die reellen Functionen φ und ψ in $\gamma + \alpha$ periodisch nach dem Intervall 2π. Setzt man also $\gamma + \alpha = \zeta$, $d\alpha = d\zeta$, so können die Integrationsgrenzen unverändert bleiben; die Integrale sind daher von γ unabhängig und die Function $u_1 + iv_1$ würde demnach nur von ϱ abhängig sein. Hieraus folgt aber, da diese Eigenschaft keiner wirklichen, von einem Punkte zum andern veränderlichen Function zukommt, dass $u_1 + iv_1$ zwischen je zwei der von den etwaigen Ausnahmepunkten beschriebenen Kreisen constant ist. Da ferner auch auf diesen Kreisen keine Unstetigkeit stattfindet, so ist $u_1 + iv_1$ innerhalb des ganzen Kreises K eine Constante. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\varrho,\zeta)+i\,\psi(\varrho,\zeta)]\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\,d\zeta=u_1+iv_1$$

hat also längs beliebigen zu K concentrischen Kreisen innerhalb K, sowie längs K selbst denselben Werth und zwar, wie sich durch Betrachtung eines unendlich kleinen Kreises ergiebt, denjenigen von $u+iv$ im Mittelpunkte. Nennen wir also den Werth von $u+iv$ in diesem Punkte u_0+iv_0, so ist für einen beliebigen der angegebenen Integrationswege:*

$$\text{3)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\,d\zeta=u_0+iv_0.$$

II. Wir wollen jetzt den Werth von $u+iv$ (er heisse $u'_0+iv'_0$) in irgend einem andern Punkte M' des Kreises K, der jedoch ebenfalls kein singulärer Punkt sei, bestimmen. Auf bekannte Weise durch stereographische Projection von der Ebene auf die Kugel und von der Kugel zurück auf die Ebene in anderer Lage projiciren wir den Kreis K so auf sich selbst, dass dem Punkte M' in der Projection der Mittelpunkt und der Durchmesser durch M' sich selbst entspricht. Ein Radius MA entspricht dann wegen der bekannten Eigenschaften der stereographischen Projection einem Kreisbogen $M'A'$. Aus der Conformität aber folgt jetzt, dass MA' eine Tangente des Bogens ist, sowie dass die Tangente $M'B$ und der Radius MA mit MM' gleiche Winkel bilden. Es ist also

$$\beta=\delta+\varepsilon=\delta+(\zeta-\beta),$$

mithin

$$\text{4)}\qquad \zeta=2\beta-\delta.$$

Nun ist nach 3) in dem transformirten Kreise K, wo der Werth $u'_0+iv'_0$ mit M' in den Mittelpunkt gekommen ist,

$$u'_0+iv'_0=\frac{1}{2\pi}\int(u+iv)\,d\zeta,$$

---

* Dieser Satz mit dem hier gegebenen Beweise desselben lässt sich statt des gewöhnlich als Ausgangspunkt dienenden Satzes von Cauchy zur Grundlage der ganzen Functionentheorie machen. Man erhält durch denselben, wie weiterhin gezeigt wird, einen Ausdruck für die Function innerhalb eines Kreises, in welchem sie überall endlich ist. Da man nun durch Kreise, welche sich theilweise decken, nach allen Theilen der Ebene mit Umgehung der Unendlichkeitspunkte gelangen kann, so hat man eine Darstellung der Function durch solche Integralausdrücke in ihrer ganzen Ausdehnung, an welchen dann die allgemeinen Eigenschaften mit Leichtigkeit nachzuweisen sind. Es scheint mir dies der einfachste und directeste Weg, von der ursprünglichen Quelle, den in der Definition enthaltenen Grundeigenschaften der Functionen aus zu den Sätzen von Cauchy, Riemann u. s. w. zu gelangen.

wo das Integral längs einem beliebigen, zu K concentrischen Kreise innerhalb K oder auch am Rande von K genommen werden kann. Geschieht Letzteres und setzt man dann für ζ den zur ursprünglichen Fläche gehörigen Werth aus 4), wo dann auch die Werthe von $u+iv$ wieder in den entsprechenden Punkten des nicht umgebildeten Randes von K zu nehmen sind, so erhält man

$$u'_0+iv'_0=\frac{1}{\pi}\int(u+iv)\left(d\beta-\frac{d\delta}{2}\right).$$

Man erhält also den Werth von $u+iv$ in einem beliebigen Punkte M', indem man zu jedem Bogenelemente eines diesen Punkt umschliessenden Binnenkreises den zugehörigen excentrischen Winkel am Punkte M' und den negativen halben Centriwinkel mit dem durch π dividirten Werthe von $u+iv$ in dem Bogenelement multiplicirt und von diesen Differentialgrössen das Integral bildet.

Obiges Integral hat offenbar in allen Punkten der Kreisfläche K einen bestimmten, endlichen, von einem Punkte zum andern sich stetig ändernden Werth. Hiermit ist also dargethan, dass einzelne singuläre Punkte, deren Möglichkeit innerhalb des Grundkreises bisher noch dahingestellt blieb, nicht vorhanden sein können. Denn man würde einen solchen Punkt immer mit einem Binnenkreise umgeben können, dessen Mittelpunkt kein singulärer Punkt wäre.

III. Unterwerfen wir jetzt die Function $u+iv$ bestimmten Randbedingungen, wobei wir immer vorläufig annehmen, dass eine denselben entsprechende Function wirklich existirt.

1. Fall. Der imaginäre Theil iv soll in jedem Punkte des Randes und aus jeder Richtung $=0$ werden mit Ausnahme eines einzigen Punktes Q, für welchen es der Function v gestattet ist, wo möglich auch andere Werthe anzunehmen, mit der Einschränkung jedoch, dass dieselben aus jeder Richtung innerhalb bestimmter, wenn auch beliebig weit gesteckter endlicher Grenzen bleiben.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\zeta$$

hat nach Gleichung 3), welche jetzt, nachdem die Abwesenheit von singulären Punkten im Innern des Grundkreises nachgewiesen ist, auf beliebige Binnenkreise angewendet werden kann, längs allen mit dem Grundkreise concentrischen Kreisen denselben Werth. Wenn sich nun ein solcher Kreis stetig vergrössert und so in den Randkreis übergeht, so convergirt v in allen Punkten gegen Null, mit etwaiger Ausnahme des Punktes Q. Da aber auch hier v endlich bleibt, so wird und war daher das Integral $=0$. Der Werth von v im Mittelpunkte ist also Null. Da man nun durch conforme Umbildung jeden Punkt P in den Mittelpunkt bringen kann und die Functionswerthe hierbei in den entsprechen-

den Punkten dieselben bleiben, so ist v am Rande noch $=0$ und in dem Punkte Q, der blos eine andere Lage erhalten hat, verhält sich die Function noch wesentlich so, wie früher. Die Function v ist daher auch in dem Punkte P der Null gleich. Den gestellten Randbedingungen genügt also nur eine Function $u + iv$, deren imaginärer Theil überall $=0$ ist, woraus dann weiter folgt, dass der reelle Theil u nur irgend eine Constante sein kann.

Offenbar gilt dies auch dann, wenn für mehrere Punkte eine Ausnahme, wie oben für Q gemacht wird, ja sogar wenn die Zahl derselben unendlich gross ist; jedoch muss in letzterem Falle die Einschränkung gemacht werden, dass durch die Ausnahmepunkte kein noch so kleiner Bogen in lauter unendlich kleine Theile zerlegt sein darf. Ueberdies möge sich eine endliche oder unendliche Zahl Bögen angeben lassen, welche jene Punkte einschliessen und so klein genommen werden können, dass ihre Summe beliebig klein ist.* Ausserhalb dieser Bögen ist dann $\int v\,d\zeta = 0$. Da aber innerhalb derselben v stets endlich bleibt, so kann auch hier $\int v\,d\zeta$ beliebig klein gemacht werden. Das ganze Integral wird also am Rande $=0$ und kann daher auch im Innern nur $=0$ gewesen sein.

2. Fall. Auf dem Rande sei eine reelle Function gegeben, die überall bestimmt, eindeutig, endlich und stetig ist, mit Ausnahme etwa einzelner Punkte, in welchen ein Uebergang von einem endlichen zu einem andern endlichen Werthe oder Unbestimmtheit stattfindet. Die Zahl dieser Punkte kann auch in der Weise, wie die der Ausnahmepunkte des ersten Falles unendlich gross sein. Die Function v soll in jedem Punkte des Randes und aus jeder Richtung den dort gegebenen Werth annehmen. Nur in den singulären Punkten ist das Verhalten der Function nur soweit vorgeschrieben, dass sie dort aus keiner Richtung bestimmte endliche Grenzen überschreiten darf.

Durch diese Bedingungen ist die Function v vollständig und u bis auf eine Constante bestimmt; denn die Differenz von zwei solchen Functionen v genügt den Bedingungen des ersten Falles und ist daher $=0$. Der

3. Fall ist eine Erweiterung des zweiten in der Weise, dass der gegebene Randwerth an einer oder mehreren Stellen (deren Zahl auch unendlich gross sein kann) unendlich wird oder dass der Function v gestattet wird, an einzelnen Stellen aus anderen Richtungen, als den tangentialen unendlich zu werden.

---

* Vergl. die Abhandlung des Herrn Cantor in den Leipziger Mathem. Ann. V S. 122.

** Es sei ausdrücklich bemerkt, dass Functionen von der Art der Weierstrass'schen ohne Differentialquotient nicht ausgeschlossen sind.

So lange über das Verhalten der Function v in den Unendlichkeitsstellen nichts Näheres festgestellt ist, ist dieselbe jetzt nicht vollständig bestimmt, da sie nicht aufhört, den Bedingungen zu genügen, wenn man irgend ein Vielfaches einer Function w hinzu addirt von der Eigenschaft, dass w in allen Randpunkten und aus allen Richtungen $= 0$ wird, mit Ausnahme einer Unendlichkeitsstelle des Randwerthes, wo bei Annäherung auf dem Rande zwar auch $w = 0$, aus einer oder mehreren anderen Richtungen aber $= \infty$ wird. Für die Existenz solcher Functionen führt Herr Schwarz S. 236 seiner Abhandlung in Bd. 74 von Borchardt's Journal ein Beispiel an.

IV. Wir wollen die Functionen u und v, deren Existenz den gestellten Bedingungen gemäss bisher nur vorausgesetzt wurde, aus den letzteren jetzt wirklich bestimmen.

Bezeichnen wir die von zwei festen Centren aus genommenen Leitstrahlen eines beweglichen Punktes P in der Ebene mit l' und l'' und die durch Drehung um die Centren nach links entstehenden Winkel der letzteren mit einer gemeinschaftlichen festen Anfangsrichtung mit φ' und φ'', so ist bekanntlich $u + iv$ eine mit Ausnahme der festen Centren überall eindeutige, stetige und monogene Function, wenn man setzt

$$u = \log l', \quad v = \varphi'$$

oder

$$u = \log l'', \quad v = \varphi''$$

und daher auch

$$u = \log l' - \log l'', \quad v = \varphi' - \varphi''$$

oder, wenn man den Winkel der beiden Leitstrahlen φ nennt,

$$5) \qquad u = \log \frac{l'}{l''}, \quad v = \varphi.$$

Der Winkel φ ist hier derjenige, um welchen, vom Punkte P aus gesehen, l' links von l'' liegt.

Der Rand sei nun in beliebige Bögen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ getheilt (Fig. 2). u und v sollen so bestimmt werden, dass v in den einzelnen Bögen die beliebig gegebenen constanten Werthe $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erhält. Wir setzen

$$6) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi}\left(u_1 \log \frac{l_2}{l_1} + u_2 \log \frac{l_3}{l_2} + \ldots + u_{n-1} \log \frac{l_n}{l_{n-1}} + u_n \log \frac{l_1}{l_n}\right) + c, \\ v &= \frac{u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + \ldots + u_n\lambda_n}{\pi} - \frac{u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n}{2\pi}, \end{aligned}$$

wo u und v die Werthe der Functionen in einem Punkte O, l_1, l_2 etc. dessen Leitstrahlen von den Endpunkten der Bögen sind, während α_1, α_2, ... die Centriwinkel der Bögen und λ_1, λ_2 etc. die excentrischen Winkel am Punkte O bedeuten. Die Function v erhält hier die vorgeschriebenen Randwerthe; denn wenn O z. B. auf dem Bogen b_1 liegt, so wird $\lambda_1 = \pi + \frac{\alpha_1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\alpha_2}{2}$, ..., $\lambda_n = \frac{\alpha_n}{2}$, mithin $v = v_1$. Beide Func-

tionen sind sowohl innerhalb, als ausserhalb des Kreises und längs der Kreislinie stetig; nur an den Endpunkten der Bögen finden Unstetigkeiten statt, indem hier v aus verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe erhält und u theils $+\infty$, theils $-\infty$ wird.

Nehmen wir die Bögen b unendlich klein und lassen wir den Randwerth eine ganz beliebige, jedoch denselben Einschränkungen wie S. 6 unterworfene Function V des Orts auf der Kreislinie sein, so werden für einen Punkt O innerhalb des Kreises auch sämmtliche excentrische Winkel unendlich klein $= d\lambda$; ebenso wird der Logarithmus des Quotienten von irgend zwei auf einander folgenden Leitstrahlen $\log \frac{l_{m+1}}{l_m} = d \log l$ und die Gleichungen 6) verwandeln sich in

$$7) \qquad u = c + \frac{1}{\pi} \int V d \log l, \quad v = \frac{1}{\pi} \int V (d\lambda - \tfrac{1}{2} d\alpha)^*,$$

wo die Integrationen sich über die ganze Kreislinie von rechts nach links herum erstrecken. Nennen wir x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes innerhalb des Kreises, ξ und η diejenigen eines Punktes der Kreislinie in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensytem mit dem Mittelpunkte des Kreises als Ursprung, so verwandeln sich die Gleichungen 7) in

$$8) \qquad \begin{aligned} u &= c + \frac{1}{\pi} \int \frac{V}{2} \cdot d \log [(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2], \\ v &= \frac{1}{\pi} \int V \left(d \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \frac{d\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

oder, wenn man, Polarcoordinaten einführend,

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t; \qquad \xi = \varrho \cos \gamma, \quad \eta = \varrho \sin \gamma$$

setzt, in

$$9) \qquad \begin{aligned} u &= c + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \frac{\varrho r \sin(t - \gamma)}{\varrho^2 + r^2 - 2 \varrho r \cos(t - \gamma)} d\gamma, \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \frac{\varrho^2 + r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2 \varrho r \cos(t - \gamma)} d\gamma. \end{aligned}$$

---

* In der S. 1 angeführten Abhandlung gelangt Herr Schläfli, ursprünglich von einem Satze von Cauchy ausgehend, auf S. 9 zu der Formel

$$u(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi = 0}^{\varphi = 2\pi} f(\vartheta + \varphi) \, d\chi,$$

welche dort für den Punkt C den reellen Theil des Functionswerthes in derselben Weise darstellt, wie hier die zweite der Gleichungen 7) für den Punkt O in Fig. 2 den imaginären Denn es ist das $d\chi$ des Herrn Schläfli dieselbe Grösse, wie hier $2 d\lambda = d\alpha$. Die Zerlegung von χ in λ und α bietet den Vortheil des leichteren Uebergangs vom Innern nach dem Rande.

Um $u+iv$ als Function von $x+iy$ darzustellen, geben wir von den Gleichungen 8) aus. Indem wir zunächst aus dem Ausdrucke für v das $\frac{d\alpha}{2}$ fortlassen, erhalten wir

$$\frac{1}{\pi}\int V\frac{(\eta-y)\,d\eta+(\xi-x)\,d\xi+i[(\xi-x)\,d\eta-(\eta-y)\,d\xi]}{(\eta-y)^2+(\xi-x)^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int V\frac{[(\xi-x)-i(\eta-y)]\,d\xi+i[(\xi-x)-i(\eta-y)]\,d\eta}{(\eta-y)^2+(\xi-x)^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int V\frac{d(\xi+i\eta)}{\xi+i\eta-(x+iy)}=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} V\frac{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)\,d\gamma}{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)-(x+iy)},$$

also, wenn man $\frac{d\alpha}{2}=\frac{d\gamma}{2}$ wieder hinzufügt,

$$10)\qquad u+iv=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} V\left[\frac{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)}{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)-(x+iy)}-\frac{1}{2}\right]d\gamma$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\frac{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)+(x+iy)}{\varrho(\cos\gamma+i\sin\gamma)-(x+iy)}\,d\gamma.$$

Diese Functionen sind nach III die einzigen, welche den gestellten Bedingungen genügen, falls der gegebene Randwerth nirgends unendlich ist und gefordert wird, dass auch die Function v an keiner Stelle und aus keiner Richtung unendlich werden soll.

Um das Verhalten von v an den Unstetigkeitsstellen des Randwerthes näher kennen zu lernen, so sei z. B. D (Fig. 3) ein solcher Punkt, in welchem V von dem Werthe V_a plötzlich zu V_b übergeht. Der Punkt O nähere sich diesem Punkte aus der Richtung ED, die Sehne AB möge sich hierbei parallel verschieben. Längs dem Bogen ACB wird $d\lambda-\frac{d\alpha}{2}$ bei unbegrenzter Annäherung von O an D eine Grösse zweiter Ordnung, mithin

$$\int V\left(d\lambda-\frac{d\alpha}{2}\right)=0.$$

Ferner wird

$$\text{auf } ADB \quad \int V\,d\alpha=0,$$
$$\text{„}\quad AD \quad \int V\,d\lambda=\mu V_a,$$
$$\text{„}\quad BD \quad \int V\,d\lambda=\nu V_b,$$

also die mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirte Summe dieser drei Theilintegrale oder der Werth von v im Punkte D:

$$11)\qquad V_d = \frac{1}{\pi}\int V\left(d\lambda - \frac{d\alpha}{2}\right) = \frac{\mu V_a + \nu V_b}{\pi}.$$

Wenn der gegebene Randwerth in einem oder mehreren Punkten unendlich wird, so zerlege man das den Werth von V im Mittelpunkte liefernde Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\,d\alpha$$

in mehrere Integrale, deren Differentialfunctionen nur an einer Grenze unendlich werden. Sind diese Integrale alle endlich, so ist auch das ganze endlich und es stellt

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left(d\lambda - \frac{d\alpha}{2}\right)$$

eine von den Functionen dar, die den gegebenen Randwerth haben. Für das Verhalten der Function in einem Unendlichkeitspunkte giebt dann die Gleichung 11)

$$v = \frac{\mu V_a + \nu V_b}{\pi}.$$

Ist nur einer der Werthe im Unstetigkeitspunkte, etwa V_a, unendlich gross, so wird v stets unendlich gross, von welcher Richtung auch der Punkt O sich nähern mag. Nur wenn $\mu = 0$ ist, der Punkt sich also auf dem Rande von der Seite des V_b her nähert, wird $v = V_b$. Jedoch kann man sich auf einer krummen Linie so nähern, dass v einen beliebigen Werth zwischen V_b und dem unendlichen V_a erhält. Wenn man nämlich zwei dem Punkte D zu beiden Seiten sehr nahe Punkte durch einen Bogen innerhalb des Kreises verbindet, so sind die Werthe von v an den Enden dieses Bogens sehr nahe $= V_b$ und V_a $(= \pm \infty)$. Wegen der Stetigkeit von v innerhalb des Kreises hat aber v auf dem Bogen alle Werthe zwischen jenen beiden und man kann daher in der Nähe des Punktes D nach diesem eine krumme Linie ziehen, so dass auf derselben überall, also auch in D der Werth von v eine beliebig gegebene Grösse zwischen V_b und dem unendlichen V_a ist. Alle diese krummen Linien schliessen sich aber im Punkte D dem Randbogen BD an, da aus jeder andern Richtung v unendlich gross wird. Sind beide Werthe V_a und V_b unendlich gross und von gleichen Zeichen, so hat v im Unstetigkeitspunkte nur unendlich grosse Werthe. Wenn endlich der eine Werth, etwa $V_a = +\infty$, der andere $V_b = -\infty$ ist, so kann man wieder zwei benachbarte Punkte durch einen Bogen verbinden, an dessen Enden V die Werthe $+\infty$ und $-\infty$ hat. Auf dem Bogen finden deshalb auch alle zwischenliegenden Werthe statt und man kann also in der Nähe des

Punktes D nach diesem eine Linie ziehen, auf welcher überall v einen beliebig gegebenen endlichen Werth hat.

Kommen unter den Einzelintegralen unendlich grosse vor, so ist das ganze Integral unendlich gross oder unbestimmt, je nachdem die einzelnen von gleichen Zeichen sind oder nicht. In ersterem Falle ist keine Function möglich, die den gegebenen Randwerth hat, da, wenn eine solche existirte, das Integral

$$\int_0^{2\pi} v \, d\alpha$$

längs einem stetig wachsenden Binnenkreise genommen, nothwendig unendlich werden, und daher auch, da es constant ist, überall unendlich sein müsste.

In dem zweiten Falle, sowie auch wenn irgend eines der Einzelintegrale keinen bestimmten Werth haben sollte, ist das Integral

$$\int_0^{2\pi} V\left(d\lambda - \frac{d\alpha}{2}\right)$$

unbestimmt und kann daher mehrere Functionen v mit dem vorgeschriebenen Randwerthe darstellen. Uebrigens ist, wie schon früher bemerkt, in keinem dieser Fälle die Function durch den Randwerth eindeutig bestimmt.

Sollte die gegebene Randfunction an irgend einer Stelle einen unbestimmten Werth haben, so hängt das Verhalten der innern Function bei der Annäherung an den Rand von der besondern Art der Unbestimmtheit ab; der Grenzwerth kann je nach den besonderen Umständen ein bestimmter oder auch ebenfalls unbestimmt sein.

V. Berühren wir noch kurz die von der vorigen nicht wesentlich verschiedene Aufgabe, eine Function $u + iv$ zu bestimmen, welche ausserhalb des Kreises in der ganzen Ebene den Bedingungen S. 8 genügt und auf dem Grundkreise gegebene Werthe von v liefert. Die Formeln sind dieselben, wie früher, nur mit entgegengesetzten Zeichen, weil die unendlich kleinen excentrischen Winkel $d\lambda$ an einem äussern Punkte auf der diesem Punkte zugewendeten convexen Seite des Kreises negativ sind. Es wird also

$$u = c - \frac{1}{\pi}\int V \, d \log \varrho = c - \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\varrho r \sin(t-\gamma)\, d\gamma}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(t-\gamma)},$$

$$v = -\frac{1}{\pi}\int V\left(d\lambda - \frac{d\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int V \frac{(\varrho^2 - r^2)\, d\gamma}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(t-\gamma)},$$

$$u + iv = c - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \frac{\varrho(\cos\gamma + i\sin\gamma) + (x+iy)}{\varrho(\cos\gamma + i\sin\gamma) - (x+iy)}\,d\gamma.$$

Dass v hier die vorgeschriebenen Randwerthe hat und sich auch in den Unstetigkeitspunkten so verhält, wie eine innere Function, ergiebt sich auf dieselbe Weise, wie für letztere, indem man einen Punkt Q (Fig. 3) sich dem Randpunkte G nähern lässt. Auch hier kann nur eine Function mit vorgeschriebenen endlichen Randwerthen von v existiren, weil man den äussern Theil der Ebene auf den Kreis projiciren kann, wo man dann im entgegengesetzten Falle auch im Innern verschiedene Functionen mit demselben Randwerthe haben würde.

VI. Der Radius des Grundkreises sei unendlich gross, die Function $u + iv$ also in der einen Hälfte der durch eine unendliche Gerade getheilten Ebene zu bestimmen, wenn v auf dieser Geraden überall gegeben ist. Um u und v in einem beliebigen Punkte P zu bestimmen, bezeichnen wir den Leitstrahl von P nach einem Punkte Q der Geraden mit l, den Drehungswinkel dieses Leitstrahls um P nach links mit λ, den gegebenen Werth von v in Q mit V und setzen

$$u = \frac{1}{\pi}\int V\,d\log l, \quad v = \frac{1}{\pi}\int V\,d\lambda.$$

Dass v auf der Geraden überall den vorgeschriebenen Werth und in den Unstetigkeitspunkten aus jeder Richtung einen Zwischenwerth erhält, ergiebt sich ebenso einfach, wie früher, wenn man einen Punkt sich der Linie nähern lässt.

Nehmen wir die Gerade senkrecht zur Axe der x und ξ, mit der positiven Abscisse ξ_0 und den Ordinaten η, bezeichnen wir ferner die Coordinaten des Punktes P, welcher mit dem Coordinatenursprung auf derselben Seite der Geraden liegen mag, mit x und y, so wird

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{\partial}{\partial\eta} \log\sqrt{(\xi_0 - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

$$v = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{\partial}{\partial\eta} \operatorname{arctg}\frac{\eta - y}{\xi_0 - x} \text{ *}$$

oder

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{\eta - y}{(\xi_0 - x)^2 + (\eta - y)^2}\,d\eta,$$

* Vergl. Christoffel, „Ueber die Integration u. s. w." in den Göttinger Nachrichten 1871, S. 440.

$$v = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V \frac{\xi_0 - x}{(\xi_0 - x)^2 + (\eta - y)^2} d\eta.$$

VII. Vorstehendes lässt sich leicht auf mehrdeutige Functionen mit einem Windungspunkte ausdehnen.* Wir legen um den Kreis eine zur Ebene senkrechte Cylinderfläche und lassen auf dieser einen Punkt n-mal sich rings herum bewegen. Die Bewegung kann eine ganz beliebige sein, auch eine solche, dass die einzelnen Umläufe auf irgendwelchen Strecken zusammenfallen; nur darf sie nie rückläufig werden und muss zum Ausgangspunkte zurückführen. Die Ordinate des von dem Punkte durchlaufenen Weges sei der gegebene, im Allgemeinen n-deutige Randwerth V des Theiles v der so zu bestimmenden Function $u + iv$, dass der Mittelpunkt des Kreises ein Windungspunkt wird. Es erscheint hier V immer als stetige Function, welche an den Stellen, wo sie etwa in gewöhnlicher Weise betrachtet, plötzlich von einem endlichen oder unendlichen grossen Werthe zu einem andern übergeht, auch alle Zwischenwerthe hat. Der Randwerth V sei als Function des früher mit γ bezeichneten Winkels gegeben, also $= V(\gamma)$.

Wir betrachten die Bodenfläche des Cylinders als eine n-fach gewundene Fläche und projiciren sie conform auf eine einfache Kreisfläche mit dem Radius $\varrho' = \sqrt[n]{\varrho}$. Wenn nun (r, t) in der ursprünglichen und (r', t') in der neuen Kreisfläche zwei entsprechende Punkte sind, so ist in dem einfachen Kreise der Randwerth $V'(\gamma')$ eindeutig und es bestimmen sich durch denselben die eindeutigen Functionen

$$u = c \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(\gamma') \cdot \frac{r' \varrho' \sin(t' - \gamma')}{r'^2 + \varrho'^2 - 2 r' \varrho' \cos(t' - \gamma')} d\gamma',$$

$$v = \quad \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(\gamma') \cdot \frac{\varrho'^2 - r'^2}{r'^2 + \varrho'^2 - 2 r' \varrho' \cos(t' - \gamma')} d\gamma',$$

$$u' + i v' = c \pm \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} V'(\gamma') \cdot \frac{\varrho'(\cos\gamma' + i \sin\gamma') + (x' + iy')}{\varrho'(\cos\gamma' + i \sin\gamma') - (x' + iy')} d\gamma',$$

wo die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die Function innerhalb oder ausserhalb des Kreises bestimmt werden soll. In letzterem Falle tritt an die Stelle des Mittelpunktes des Kreises überall der unendlich ferne Punkt der Ebene.

---

* Vergl. Schwarz, „Ueber die Differentialgleichung $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$" in den Berliner Monatsberichten von 1870, S. 778.

Um obige Functionswerthe nach den entsprechenden Punkten des ursprünglichen Kreises zurückzuversetzen, muss r' durch $\sqrt[n]{r}$, ϱ' durch $\sqrt[n]{\varrho}$ und t' durch $\frac{t}{n}$ ersetzt werden. Zugleich kann man aber auch die Integrationsvariable γ' durch $\frac{\gamma}{n}$ ersetzen, wodurch auch $V(\gamma)$ oder V an die Stelle von $V'(\gamma')$ tritt, und man erhält dann

$$u = c \pm \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} V \frac{\sqrt[n]{r\varrho}\, \sin\frac{t-\gamma}{n}}{\sqrt[n]{r^2} + \sqrt[n]{\varrho^2} - 2\sqrt[n]{r\varrho}\, \cos\frac{t-\gamma}{n}}\, d\gamma,$$

$$v = \pm \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} V \frac{\sqrt[n]{\varrho^2} - \sqrt[n]{r^2}}{\sqrt[n]{r^2} + \sqrt[n]{\varrho^2} - 2\sqrt[n]{r\varrho}\, \cos\frac{t-\gamma}{n}}\, d\gamma,$$

$$u + iv = \pm \frac{i}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} V \frac{\sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\gamma}{n} + i\sin\frac{\gamma}{n}\right) + \sqrt[n]{x+iy}}{\sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\gamma}{n} + i\sin\frac{\gamma}{n}\right) - \sqrt[n]{x+iy}}\, d\gamma.$$

Soll nicht der Mittelpunkt, sondern irgend ein anderer Punkt Windungspunkt werden, so projicire man nur den Kreis auf sich selbst, so dass dieser Punkt Mittelpunkt wird, bestimme die Function mit letzterem als Windungspunkt und projicire rückwärts.

II.

Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden.

Von

Dr. F. Buka,

Privatdocent an der königl. techn. Hochschule in Berlin.

Hierzu Taf. I Fig. 4—9.

Der Zusammenhang, welcher zwischen den Krümmungsradien beliebiger Schnitte einer windschiefen Fläche in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden besteht, die zu einer solchen gehörige Hauptkrümmungsmittelpunkts-Curve, ihre Construction und Discussion, Construction und Discussion der osculirenden Regelfläche zweiter Ordnung, die windschiefe Fläche, welche von den Tangenten der Krümmungslinien in ihren Schnittpunkten mit einer geraden Erzeugenden bedeckt wird, und ihres Asymptotenkegels etc. bilden den Gegenstand der folgenden Untersuchung. Dieselbe ist wesentlich geometrisch geführt und geht von der gleichzeitigen Betrachtung zweier benachbarten windschiefen Elemente aus. Die gefundenen Resultate, deren Brauchbarkeit einige Anwendungen beweisen mögen, dürften ein besonderes Interesse für die kinematische Geometrie haben, weil sich die allgemeinste Bewegung eines starren Systems auf das Rollen und Gleiten einer windschiefen Fläche auf einer ebensolchen zweiten zurückführen lässt. — Der systematischen Entwickelung wegen sind die Sätze über die Tangentialebenen einer windschiefen Fläche in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden in gedrängter Kürze hergeleitet. — Man vergleiche hierzu Chasles' Aufsatz in der *Correspondance mathématique et physique, tome XI.* Im Uebrigen ist bei bereits bekannten Resultaten die bezügliche Literatur angegeben.

Fig. 4. g, g' seien zwei benachbarte Erzeugende einer windschiefen Fläche, $O_0 O'_0 = d$ ihre kürzeste Distanz, w ihr Contingenzwinkel. Im „Centralpunkt" O'_0 errichten wir senkrecht zu g' die Grundebene. Je nachdem wir in O'_0 auf ihr stehend den über der Ebene liegenden Theil von g gegen die durch O_0 zu g' parallele g_0 rechts oder links gedreht sehen, wird das von g und g' eingeschlossene „wind-

schiefe Element" rechts oder links geschränkt genannt und w mit positivem oder negativem Zeichen versehen. — Zwei windschiefe Elemente sind congruent, wenn sie bei gleicher kürzester Distanz gleiche und mit demselben Vorzeichen versehene Contingenzwinkel besitzen. Da wir nun bei allen von einander unabhängigen Elementen, sobald wir singuläre Elemente ausschliessen, gleiche kürzeste Distanzen voraussetzen dürfen, wird die Grösse $s = \frac{d}{w}$, in welche w mit dem gebührenden Zeichen eingehen mag, vollständig zur Charakterisirung eines windschiefen Elements ausreichen. Ihr absoluter Werth — Parameter genannt — ist umgekehrt proportional der Grösse der Schränkung, ihr Vorzeichen giebt über die Art derselben Aufschluss. Den reciproken Werth des Parameters nennen wir „Schränkung".

Jede Gerade γ', welche zwei unendlich nahe Punkte P und P' von g und g' verbindet, ist Tangente der windschiefen Fläche. Es folgt:

Haben zwei windschiefe Flächen Elemente gleicher und gleichartiger Schränkung, so können sie längs derselben (auf vierfache Art) zur Berührung gebracht werden.

Die Flächen lassen sich nämlich auf zweierlei Weise so legen, dass sich die kürzesten Distanzen decken und um diese wieder auf zwei verschiedene Arten so drehen, dass die Erzeugenden coincidiren. Jede Tangente der einen Fläche ist dann auch eine solche für die andere, d. h. die Flächen berühren sich längs des Elements. — Den Winkel 2λ, welchen eine Tangente γ' mit der Erzeugenden g' bildet, zählen wir auf derjenigen Seite der Ebene $g'\gamma'$, welche uns, wenn wir in O'_0 auf der Grundebene stehen und nach P visiren, zur Rechten liegt, und rechnen ihn dort von g' aus im Bewegungssinne des Uhrzeigers. Den Winkel φ, welchen die Ebene $g'\gamma'$ mit der kürzesten Distanz $O'_0 O_0$ einschliesst, zählen wir analog von $O'_0 O_0$ aus. — Die Projection eines Gebildes Γ auf die Grundebene wird durch Γ_0 bezeichnet. P' werden wir als Berührungspunkt der Tangente mit der windschiefen Fläche auffassen und seine Entfernung vom Centralpunkte O'_0 r nennen. Bestimmen wir PP_0 aus dem Dreieck PO_0P_0 und dem Trapez $PP_0P'O'_0$, so ergiebt sich

$$PP_0 = \frac{P_0 O_0}{w} = \frac{d}{w} \, . \, tg\,\varphi = s \, . \, tg\,\varphi$$

$$= P'O'_0 + P_0 O'_0 \, ctg\, 2\lambda = r + \frac{d}{\cos\varphi} \, . \, ctg\, 2\lambda,$$

$$\text{I*)} \qquad s \, . \, tg\,\varphi = r + \frac{d}{\cos\varphi} \, . \, ctg\, 2\lambda.$$

Aus der leicht zu verificirenden Relation $PP' . \sin 2\lambda = \frac{d}{\cos\varphi}$ folgt für endliche Werthe von r, dass, so lange die Gerade PP' Tangente sein soll, also PP' unendlich klein ist, $\sin 2\lambda$ und $\cos\varphi$ endliche Werthe

haben müssen, dass also $\frac{d}{\cos\varphi} \cdot ctg\, 2\lambda$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist. Sobald wir solche vernachlässigen dürfen, verschwindet aus I*) Winkel 2λ, die Beziehung zwischen r und φ geht über in

I) $$s \cdot tg\,\varphi = r$$

und wird daher unabhängig von der speciellen Lage der gewählten Tangente $P'P$ des Punktes P'. Da φ der Winkel ist, welchen die durch $P'P$ und g' gehende Ebene mit der kürzesten Distanz bildet, besagt dies:

Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen erster Ordnung sind alle Geraden, welche ein windschiefes Element in einem Punkte P' berühren, als in einer Ebene liegend anzunehmen; diese Ebene wird Tangentialebene genannt; ihr Neigungswinkel φ gegen die kürzeste Distanz hängt eindeutig ab von der Entfernung ihres Berührungspunktes vom Centralpunkte.

Wir folgern aus I):

Bei rechtsgeschränkten Elementen liegen die Berührungspunkte der durch den ersten Quadranten führenden Tangentialebenen oberhalb der Grundebene, bei linksgeschränkten unterhalb.

Die Tangentialebene im Centralpunkte führt durch die kürzeste Distanz, sie wird Centralebene genannt; rechtwinklig zu ihr steht die „Asymptotenebene“ des Elements, welche es im Unendlichen berührt.

Je zwei Tangentialebenen, deren Berührungspunkte vom Centralpunkte gleiche Entfernung haben, haben gleiche Neigung gegen die Centralebene.

Die Berührungspunkte der gegen die Centralebene um 45^0 geneigten Ebenen sind vom Centralpunkt um s entfernt. Sobald sie bekannt sind, ist Schränkung und Centralpunkt gegeben; daher dienen sie häufig zur Construction dieser Grössen.

Sind r und r' die Entfernungen der Berührungspunkte zweier zu einander rechtwinkligen Ebenen, so folgt aus dem Product der Gleichungen $r = s \cdot tg\,\varphi$, $r' = -s \cdot ctg\,\varphi$

$$r \cdot r' = -s^2,$$

d. h.:

Die Berührungspunkte der zu einander rechtwinkligen Tangentialebenen bilden auf der Erzeugenden eine hyperbolische Involution.

Diejenigen Tangenten eines windschiefen Elements, welche parallel einer beliebigen Ebene E sind, bilden die eine Schaar Gerader eines Paraboloids, zu dessen anderer

Schaar g und g' gehören und dessen Richtebenen E und die Asymptotenebene des Elements sind. Insbesondere liegen die zur Grundebene parallelen Tangenten auf einem gleichseitigen Paraboloid, dessen Scheitelgeraden g' und die kürzeste Distanz sind. Lässt man dasselbe um g' eine Drehung von 90^0 ausführen und geht hierbei die Tangente γ' in die Lage γ'_0 über, so steht γ'_0 normal auf der Tangentialebene $g'\gamma'$ und ist demnach eine Normale der Fläche; d. h.: die Normalen in den Punkten von g' bilden ein gleichseitiges Paraboloid.

Tragen wir auf einer beliebigen, in O'_0 auf g' senkrechten Geraden $s = O'_0 Q$ ab und verbinden Q mit P', so ist

$$P'O'_0 = r = s \,.\, tg\, P'QO'_0 \text{ und nach I) } r = s \,.\, tg\, \varphi,$$

folglich

$$P'QO'_0 = \varphi.$$

Ist P'_1 Berührungspunkt einer zweiten Tangentialebene des Elements, φ_1 ihr Neigungswinkel gegen die Centralebene, so ist

$$P'_1 Q P_1 = \varphi - \varphi_1,$$

d. h.:

Errichtet man im Centralpunkt ein Loth gleich dem reciproken Werthe der Schränkung, so erblickt man von dessen Endpunkte eine beliebige Strecke der Erzeugenden unter demjenigen Winkel, welchen die Berührungsebenen des Elements in den Endpunkten der Strecke mit einander bilden.

Sind also die Berührungspunkte P'_1, P'_2, P'_3 dreier Tangentialebenen T_1, T_2, T_3 gegeben, so werden in einer beliebigen durch g' gehenden Ebene etwa über $P'_1 P'_2$ und $P'_1 P'_3$ Kreisabschnitte construirt, welche die von T_1 mit T_2 und T_3 gebildeten Winkel φ_{12} und φ_{13} fassen. φ_{12} und φ_{13} sind von T_1 aus in demselben Sinne zu zählen. Der zweite Schnittpunkt der Kreise liefert Q, das Loth aus Q auf g' liefert die Schränkung, sein Fusspunkt den Centralpunkt O'_0, der von ihm mit $QP'_1 \ldots$ gebildete Winkel die Centralebene. Mit Hilfe der Grundebene endlich wird untersucht, ob das Element rechts oder links geschränkt sei.*

Es ist ersichtlich, wie hiernach, sobald eine windschiefe Fläche durch drei Leitcurven gegeben ist, für jede Lage der Erzeugenden mit grosser Leichtigkeit Centralpunkt, Centralebene, sowie Grösse und Sinn der Schränkung gefunden werden können.

Die gegebene Definition von Tangentialebene reicht nicht mehr aus, sobald es sich um Krümmungsverhältnisse handelt, also unendlich kleine Grössen eine wichtige Rolle spielen. Zum Zwecke genauerer Bestim-

---

* *De la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, troisième partie, art. 845, 846.* Der Satz rührt von Mannheim her.

mungen ziehen wir (Fig. 5) auch noch die zweite Nachbargerade von g', g'' in den Kreis unserer Betrachtungen. Die kürzeste Distanz von $g'g''$ sei $O'O''=d$, ihr Contingenzwinkel w'. $O_0 O'_0$ und $O'O''$ mögen einen beliebigen unendlich kleinen Winkel ω bilden. Erscheint die über O'_0 hinaus verlängerte $O'_0 O''_0$ dem wie früher stehenden Beobachter gegen $O'_0 O_0$ recht gedreht, so wird ω positiv gerechnet, sonst negativ. Die Gerade $O'O_0$ möge mit g' den nach der früheren Methode zu zählenden Winkel ψ bilden. Ist $\psi \lesseqgtr 90$, so liegt O' unterhalb, resp. oberhalb der Grundebene und ist demnach $\delta = d.ctg\psi$ positiv, resp. negativ zu rechnen. Die Schränkung des von den kürzesten Distanzen $O_0 O'_0$, $O'O''$ gebildeten „conjugirten Elementes" ist

$$\frac{\omega}{\delta}=\frac{1}{\sigma}.$$

Die Vereinbarungen über Zählung von ω und δ sind derartig getroffen, dass das Zeichen von σ die Art der Schränkung des conjugirten Elements richtig angiebt.

Die stetige Folge der Centralpunkte wird „Strictionslinie" genannt; ψ ist der Winkel, welchen ihre Tangente $O'O_0$ mit der zugehörigen Erzeugenden bildet.

Die stetige Folge der conjugirten Elemente bildet im Allgemeinen eine windschiefe Fläche, deren kürzeste Distanzen auf der Urfläche liegen und welche diese längs der Strictionslinie berührt.

Ist P' ein beliebiger Punkt von g', so bestimmen die Ebenen gP' und $P'g''$ in ihrer Schnittlinie γ' eine Gerade, welche die drei Erzeugenden g, g', g'' etwa in P, P', P'' trifft. Man schliesst hieraus:

In unendlicher Nähe des Punktes P' ist die windschiefe Fläche mit den beiden Ebenen $g\gamma'$ und $\gamma'g''$ identisch.

Winkel $P_0 O'_0 O_0$ sei gleich φ, also Winkel $O''_0 O'_0 P''_0$ gleich $\varphi-\omega$. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung ist $P_0 O'_0 = O'_0 P''_0$, folglich auch $PP'=P'P''$. Winkel $g'\gamma'$ sei gleich 2λ. Dann ist

$$\text{II)} \qquad PP'=\frac{O'_0 P_0}{\sin 2\lambda}=\frac{d}{\cos\varphi \,.\, \sin 2\lambda}.$$

Schneidet eine Kugel vom Radius 1 und Centrum P die drei Geraden PP_0, g, γ' in den Punkten $\Pi G \Gamma$, so ergiebt sich aus diesem sphärischen Dreieck, dessen Winkel $G\Gamma\Pi = \nu$ den unendlich kleinen Neigungswinkel der Ebene $g\gamma'$ gegen die Ebene $g'\gamma'$ darstellt, da $arc\, G\Gamma$ nur unendlich wenig von $arc\, \Pi\Gamma = arc\, 2\lambda$ differirt und Winkel $O_0 P_0 O'_0 =$ Winkel $G\Pi\Gamma = 90^0-\varphi$ ist,

$$\frac{\sin G\Gamma}{\cos\varphi}=\frac{\sin \Pi G}{\sin\nu},$$

$$\text{III)} \qquad \nu=\frac{w\,.\cos\varphi}{\sin 2\lambda}.$$

Der Neigungswinkel der Ebene $\gamma' g''$ gegen die Ebene $g'\gamma'$ wird erhalten, wenn man in III) statt φ $\varphi - \omega$, statt w das um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung verschiedene w' einführt. Er ist also bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung ebenfalls gleich ν. Wir sehen also:

(Fig. 6.) Die beiden Ebenen $g\gamma'$ und $\gamma' g''$, welche die windschiefe Fläche in unendlicher Nähe des Punktes P' ersetzen, bilden mit der Ebene $g'\gamma'$ gleiche unendlich kleine Neigungswinkel; der Punkt P' liegt in der Mitte von PP''; die Geraden g und g'' begrenzen die Bogenelemente, welche eine beliebige Ebene des Bündels P' aus der Fläche schneidet, und schliessen mit PP'' gleiche Winkel 2λ ein. Daher hat die in P' auf der Ebene $g'\gamma'$ senkrechte Gerade die charakteristische Eigenschaft einer Flächennormale; sie ist Normale eines jeden durch sie geführten Schnittes. Die zu ihr senkrechte Ebene $g'\gamma'$ ist daher als Tangentialebene des Punktes P' aufzufassen.

Sei $RP'R''$ der zu γ' senkrechte Normalschnitt, also $\angle RP'R'' = 180 - 2\nu$, und $QP'Q''$ ein beliebiger Normalschnitt und $\angle RQP' = 2\lambda'$ gleich dem von $P'Q$ und γ' gebildeten Winkel, so ist

$$\frac{QP'}{\sin 2\lambda} = \frac{PP'}{\sin 2\lambda'},$$

$$\text{IV)} \qquad QP' = \frac{d}{\cos\varphi \,.\, \sin 2\lambda'}.$$

Zur Bestimmung des Winkels $QP'Q'' = 180^0 - 2\nu'$ verlängern wir $P'Q$ und $P'Q''$, bis sie die durch R und R'' zu γ' parallelen Geraden in q, q'' treffen, und finden, da Dreieck $RP'R''$ die Projection des Dreiecks $qP'q''$ ist,

$$\overline{RP'^2} \,.\, \sin 2\nu = \frac{RP'^2}{\cos^2 RP'q} \,.\, \sin 2\nu' \,.\, \cos RP'q$$

und, da $RP'q = 90 - (2\lambda' - 2\lambda)$ ist,

$$\text{V)} \qquad 2\nu' = 2\nu \,.\, \sin(2\lambda' - 2\lambda) = \frac{2 \,.\, w \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin(2\lambda' - 2\lambda)}{\sin 2\lambda}.$$

Aus IV) und V) folgt, dass der Krümmungsradius des Schnittes $QP'Q''$

$$R_{2\lambda'} = \frac{QP'}{2\nu'} = \frac{\dfrac{d}{\cos\varphi \,.\, \sin 2\lambda'}}{\dfrac{2w \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin(2\lambda' - 2\lambda)}{\sin 2\lambda}},$$

$$\text{VI)} \qquad 2R_{2\lambda'} = \frac{s}{\cos^2\varphi} \,.\, \frac{\sin 2\lambda}{\sin 2\lambda' \,.\, \sin(2\lambda' - 2\lambda)}$$

ist. Je nachdem der Normalschnitt $QP'Q''$ den Winkel 2λ selbst oder den Nebenwinkel theilt, haben die Winkel $2\nu'$ und damit die Radien $R_{2\lambda'}$ entgegengesetzte Vorzeichen, die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte sind durch P' getrennt. Ein Blick auf Fig. 6 lehrt dasselbe.

$R_{2\lambda'}$ erreicht sein Maximum ∞, wenn $2\lambda' = 0$ oder $= 2\lambda$ wird, d. h. für die durch g' und γ' gehenden Schnitte. Er erreicht sein Minimum, wenn $\sin 2\lambda' . \sin(2\lambda' - 2\lambda)$ Maximum wird. Dies geschieht für $\sin(4\lambda' - 2\lambda) = 0$, also $2\lambda' = \lambda$ und $2\lambda' = 90^0 + \lambda$, d. h. für diejenigen Schnitte, „Hauptschnitte" genannt, welche den Winkel 2λ halbiren.

Von allen Normalschnitten desselben Winkelraums hat der denselben halbirende Hauptschnitt den kleinsten Krümmungsradius.

Seien R_a und R_b die zum Winkelraum 2λ, resp. dem Nebenwinkelraum gehörigen Hauptkrümmungsradien, M_a, M_b die entsprechenden Hauptkrümmungsmittelpunkte.

Durch Substitution von $2\lambda' = \lambda$, resp. $2\lambda' = 90 + \lambda$ in VI) folgt

$$\text{VII)} \qquad R_a = -\frac{s}{\cos^2\varphi} . \operatorname{ctg}\lambda,$$

$$\text{VIII)} \qquad R_b = \frac{s}{\cos^2\varphi} . \operatorname{tg}\lambda$$

und für das Product von R_a und R_b, das Krümmungsmass des Punktes P',

$$\text{IX)} \qquad \frac{1}{R_a . R_b} = -\frac{\cos^4\varphi}{s^2} *.$$

Das Krümmungsmass einer windschiefen Fläche in den Punkten einer Erzeugenden hängt nur ab von der im betreffenden Elemente herrschenden Schränkung und der Entfernung der Punkte vom Centralpunkte; in diesem Punkte hat es seinen grössten Werth gleich dem Quadrate der Schränkung, im unendlich fernen Punkte der Erzeugenden seinen kleinsten Werth gleich 0.

Wird eine windschiefe Fläche so deformirt, dass die Schränkung der einzelnen Elemente ungeändert bleibt, so bleibt auch das Krümmungsmass der einzelnen Punkte ungeändert**.

Eine solche Deformation haben wir immer dann, wenn wir die windschiefe Fläche ohne Dehnung deformiren, weil mit Aenderung der

---

* Diese Formel ist bereits bekannt; vergl. *De la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, trois. partie, p. 32.*

** Eine solche, mit Dehnung verbundene Deformation, wie diejenige des allgemeinen hyperbolischen Paraboloids in das gleichseitige, ist S. 45 besprochen. — Ueberhaupt können wir ohne Aenderung der Schränkung, also auch des Krümmungsmasses der einzelnen Punkte, jede windschiefe Fläche in ein gerades Konoid verwandeln. — Die windschiefen Flächen, welche bei der Bewegung eines unveränderlichen Systems im Raume auf einander rollen und gleiten, haben in solchen Elementen, welche während der Bewegung auf einander fallen, gleiche Schränkung (Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. I S. 291), also haben sie auch in solchen Punkten, welche auf einander fallen, gleiches Krümmungsmass.

Schränkung eines Elements $g'g''$ nothwendig die Aenderung der Entfernung zweier Punkte $P'P''$ der Geraden $g'g''$ verknüpft wäre. Also liegt in Gleichung IX) der Beweis des Gauss'schen Satzes über die Deformation undehnbarer Flächen für windschiefe Flächen.

Wir legen durch QP' einen schiefen Schnitt, welcher mit der Normalen den Winkel ε bildet; er treffe g'' in Q''_0. Um P' beschreiben wir eine Kugel vom Radius 1. Dieselbe wird von $P'Q''$, $P'Q''_0$ und der über P' hinaus verlängerten QP' in einem unendlich kleinen sphärischen Dreieck geschnitten, dessen Hypotenuse den Contingenzwinkel $2\nu'_\varepsilon$ von QP' und $P'Q''_0$, dessen eine Kathete den Contingenzwinkel $2\nu'$ von QP' und $P'Q''$ darstellt, während diese Kathete mit der Hypotenuse den Winkel ε bildet. Folglich ist

$$2\nu'_\varepsilon \,.\, \cos\varepsilon = 2\nu'.$$

Da auch die zweite Kathete unendlich klein ist, kann die Grösse $Q''Q''_0$ nur unendlich klein der zweiten Ordnung sein und es ist $P'Q''_0$ mit $P'Q''$ zusammenfallend zu denken. Wird demnach der Krümmungsradius des schiefen Schnittes $R_{2\nu'_\varepsilon}$ genannt, so ist

$$R_{2\nu'_\varepsilon} = \frac{QP'}{2\nu'_\varepsilon} = \frac{QP'}{2\nu'} \,.\, \cos\varepsilon = R_{2\nu'} \,.\, \cos\varepsilon.$$

Die Krümmungsradien aller durch eine Tangente führenden schiefen Schnitte liegen in der zur Tangente senkrechten Ebene auf der Peripherie des über dem zugehörigen Normalschnitt-Radius als Durchmesser beschriebenen Kreises. (Meusnier'scher Satz.)

Führen wir in Formel VI) den Winkel v ein, welchen das Element QP' mit der Richtung des Hauptschnittes R_a bildet, setzen also $v = 2\lambda' - \lambda$, so gewinnt VI) die Gestalt

$$2R_{2\lambda'} = 2R_v = \frac{s}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\sin 2\lambda}{\sin(v+\lambda)\sin(v-\lambda)}$$

oder

$$\frac{1}{R_v} = \frac{\cos^2\varphi}{s} \cdot \frac{\sin^2 v\cos^2\lambda - \cos^2 v\sin^2\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos^2\varphi}{s} \cdot \left(\frac{\sin^2 v}{tg\,\lambda} - \frac{\cos^2 v}{ctg\,\lambda}\right),$$

also unter Zuhilfenahme von VII) und VIII)

$$\text{XI)} \qquad \frac{1}{R_v} = \frac{\cos^2 v}{R_a} + \frac{\sin^2 v}{R_b} \quad \text{(Euler'scher Satz).}$$

Wird

$$\frac{1}{R_{v+90}} = \frac{\sin^2 v}{R_a} + \frac{\cos^2 v}{R_b}$$

hierzu addirt, so folgt

$$\text{XII)} \qquad \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_{v+90}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}.$$

Die Summe der reciproken Krümmungsradien je zweier auf einander senkrechten Normalschnitte ist constant.

Denken wir in P' die Krümmungskreise aller Normalschnitte construirt und die so entstandene Fläche von zwei auf der Normale von P' senkrechten Ebenen geschnitten, deren Entfernung von P' $P'N_+ = P'N_- = c$ sei. Die eine dieser Ebenen schneidet alle positiven, die andere alle negativen Krümmungskreise.

Sind S_a, S_b, S_v die Schnittpunkte der Ebenen mit den Hauptschnitten, resp. einem beliebigen Normalschnitt, so ist

$\overline{S_v N_\pm}^2 = \pm c . 2 R_v, \quad \overline{S_a N_-}^2 = - c . 2 R_a = + a^2, \quad \overline{S_b N_+}^2 = + c . 2 R_b = b^2,$

und diese Werthe in XI) eingeführt, geben als Gleichung der Schnittcurve beider Ebenen mit der osculirenden Fläche

$$\text{XIII)} \qquad 1 = \mp \frac{\overline{S_v N}^2 . \cos^2 v}{a^2} + \frac{\overline{S_b N}^2 . \sin^2 v}{b^2},$$

also zwei conjugirte Hyperbeln, deren Asymptoten parallel den Geraden g', γ' sind. Es ist leicht zu sehen, wie man sie zur Construction der einzelnen Krümmungsradien verwerthen kann.

Lässt man c zu einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung werden, so kann jeder Punkt S_v auch als Punkt der windschiefen Fläche betrachtet werden und wir dürfen mithin den Satz aussprechen:

Die windschiefe Fläche wird durch zwei von der Tangentialebene des Punktes P' um unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung entfernte Ebenen in zwei conjugirten Hyperbeln — Indicatrices genannt — geschnitten, deren Asymptoten g' und γ' und deren Radii vectores proportional den Quadratwurzeln aus den Krümmungsradien der durch sie führenden Normalschnitte sind.

Die windschiefe Fläche in unendlicher Nähe des Punktes P' können wir identificiren mit den Kegeln, welche die conjugirten Hyperbeln aus P' projiciren.

Denkt man in S_v die Tangente des zugehörigen Krümmungskreises und nennt ihren Schnittpunkt mit der Normale in P' K, ferner die unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung KN_+ — wir nehmen S_v auf einem positiven Normalschnitte an — c_0, so ist

$$c_0(R_0 - c) = 2 c . R_v,$$

also bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen vierter Ordnung

$$c_0 = 2 c,$$

d. h. K fällt mit N_- zusammen und ist allen Tangenten in den Punkten der positiven Indicatrix gemein. Analoges gilt für die Punkte der negativen Indicatrix und wir haben den Satz:

Legt man aus zwei auf der Normale des Punktes P' gelegenen, von ihm um die unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung c entfernten Punkten N_+, N_- Berührungskegel an die Fläche, so sind dieselben Kegel zweiten Grades,

zwei ihrer Hauptebenen fallen mit den Hauptschnitten zusammen, die dritte ist parallel der Tangentialebene in P'. Die Berührungscurven sind identisch mit den Indicatrixhyperbeln.

Die Berührungsebene des Kegels N_- in der Kante $N_- S_v$ ist Berührungsebene der Fläche im Punkte S_v, die Kegelnormale also auch Flächennormale. Darnach folgt:

Die Flächennormalen in den Punkten der Indicatrix sind im Allgemeinen windschief gegen die Normale in P'; nur diejenigen in den Scheiteln der Indicatrixhyperbeln treffen sie in den Krümmungsmittelpunkten der Hauptschnitte.

Wir haben vorhin gesehen, dass die Ebene π', welche g und g'' in P und P'' trifft, als Berührungsebene der windschiefen Fläche im Schnittpunkte P' von PP'' mit g' aufzufassen ist. Jedoch folgt daraus nicht, dass die Schnittcurve von π' mit der windschiefen Fläche n^{ter} Ordnung in P' einen Wendepunkt hat. Vielmehr wird diese aus g' und einer Curve C $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehende Linie, welche nach Construction P und P'' enthält, g' im Allgemeinen in einem von P' um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung entfernten Punkte P'_s schneiden, so dass PP'' nur als gewöhnliche Tangente aufgefasst werden darf. Ausser diesem Punkte P'_s muss C mit g' noch $(n-2)$ Punkte Π' gemein haben. Die Nachbarn eines jeden solchen Punktes Π' können offenbar weder auf g, noch g'' liegen, weil diese windschief zu g' sind und mit π' nur die Punkte P und P'' gemein haben; sie liegen mithin auf Schnittpunkten der g' mit nicht benachbarten Erzeugenden. Daraus ergeben sich die Sätze:*

Auf jeder Erzeugenden einer windschiefen Fläche liegen im Allgemeinen $(n-2)$ Doppelpunkte.

Alle durch das Ebenenbüschel g' bestimmten Curven C haben $(n-2)$ Punkte Π' gemein.

Jede dieser Curven schneidet g' in einem weiteren Punkte P'_s, welcher als Berührungspunkt der betreffenden Ebene mit der Fläche aufzufassen ist. Ihre Tangenten γ' in den Punkten P'_s bilden die zweite Schaar Gerader derjenigen Regelfläche zweiter Ordnung, zu deren erster Schaar g, g', g'' gehören. Die Geraden γ' bilden mit g' zusammen ausserdem die Asymptoten der zu den Punkten von g' gehörigen Indicatrices.

---

* Vergl. Salmon-Fiedler, Analyt. Geometrie der Curven im Raume etc., Leipzig 1865, Art. 207.

Da nämlich durch das Ebenenbüschel g' die Punktreihen g und g'' hinsichtlich der Punkte P und P'' projectivisch auf einander bezogen werden, gehören die Verbindungslinien γ' entsprechender Punkte zur zweiten Schaar eines hyperbolischen Paraboloids oder einmanteligen Hyperboloids, zu dessen erster Schaar g, g', g'' gehören, je nachdem diese drei Geraden eine Richtebene haben oder nicht. Die definirte Regelfläche zweiter Ordnung wird, weil sie sich von allen solchen Flächen der windschiefen Fläche längs g' auf's Innigste anschmiegt, osculirende Fläche genannt.

Da jeder Berührungsebene π' ein einziger Berührungspunkt P' auf g' entspricht und bei stetiger Bewegung von π' auch P' stetig fortschreitet, ist das Büschel π' zur Punktreihe P' projectivisch. Die Normale der windschiefen Fläche in P' kann nun als Schnittlinie der durch g' gehenden, zur Ebene π' normalen Ebene π'_0 und der in P' zu g' normalen Ebene E aufgefasst werden. Geschieht dies für jeden Punkt P', so erhalten wir die Normalen der Fläche in den Punkten der Erzeugenden g' als Schnittlinien der beiden zum Büschel π' projectivischen Büschel π'_0 und E. Die Normalen liegen also, da das eine Büschel eine unendlich ferne Axe hat, auf einem hyperbolischen Paraboloid, und zwar ist dasselbe, da sie sämmtlich auf g' senkrecht stehen, gleichseitig.

Die Normalen einer windschiefen Fläche in den Punkten einer Erzeugenden g' liegen auf einem gleichseitigen Paraboloid.

Halten wir diesen Satz* mit dem auf S. 24 gewonnenen zusammen, aus welchem folgt, dass, wenn die Hauptschnitte des Punktes P' g in den Punkten A und B treffen, die Normalen der windschiefen Fläche in A und B diejenige in P' in den Hauptkrümmungsmittelpunkten M_a und M_b treffen, so können wir den Satz aussprechen:

Die zu einer Erzeugenden g' gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen auf der Schnittcurve zweier gleichseitiger Paraboloide, also im Allgemeinen in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche wir Centracurve nennen wollen.

Zur genaueren Discussion dieser Curve ist zunächst der Zusammenhang zwischen dem Asymptotenwinkel 2λ und den Bestimmungsstücken der Elemente gg' und $g'g''$ zu ermitteln.

Es ist (Fig. 6)

$$PP_0 - P''P''_0 = P_0P''_0 \,.\, ctg\, 2\lambda,$$

$$PP_0 = P_0O_0 \,.\, ctg\, w = \frac{d}{w} \,.\, tg\,\varphi = s \,.\, tg\,\varphi,$$

---

* Der auf S. 18 gegebene Beweis erscheint für die folgenden Schlüsse nicht streng genug.

$$P''P''_0 = \frac{d}{w'} . tg\,\varphi' - O''O''_0 = s' . tg(\varphi - \omega) - \delta,$$

also

$$PP_0 = P''P''_0 = s\,tg\,\varphi + \delta - s'\,tg(\varphi - \omega),$$

ferner

$$P_0P''_0 = P_0O'_0 + O'_0P''_0 = \frac{d}{cos\,\varphi} + \frac{d}{cos\,(\varphi - \omega)}.$$

Mithin ist

$$s\,tg\,\varphi + \delta - s'\,tg(\varphi - \omega) = \left(\frac{d}{cos\,\varphi} + \frac{d}{cos\,(\varphi - \omega)}\right) ctg\,2\lambda$$

oder

$$s . sin\,\varphi . cos\,(\varphi - \omega) + \delta . cos\,\varphi . cos\,(\varphi - \omega) - (s + ds)\,cos\,\varphi . sin\,(\varphi - \omega)$$
$$= d . cos\,\varphi + cos(\varphi - \omega)\,ctg\,2\lambda$$

und bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung

XIV*) $$s . \omega + \delta . cos^2\varphi - ds . sin\,\varphi . cos\,\varphi = 2d . cos\,\varphi . ctg\,2\lambda$$

oder

XIV) $$ctg\,\psi . \frac{s + \sigma . cos^2\varphi}{\sigma . cos\,\varphi} - \frac{ds}{d} . sin\,\varphi = 2\,ctg\,2\lambda.$$

Vor Allem ist jetzt zu untersuchen, welche Seite einer Normale auf Grund der von uns getroffenen Vereinbarung als positive, welche als negative zu betrachten ist.

Aus den Formeln VII) und VIII) geht hervor, dass die Hauptkrümmungsradien nie den Werth 0 haben und nur für $\varphi = 90^0$ unendlich gross werden. Die Centracurve besteht mithin aus zwei durch die Centralebene getrennten, ins Unendliche verlaufenden Aesten. Also sind überhaupt positive und negative Seiten der Normalen durch diese Ebene getrennt, und wenn wir bei einer einzigen die Richtungen zu unterscheiden wissen, sind wir bei allen orientirt. Nun ist die Lage des auf der Centralnormalen befindlichen Mittelpunktes M_0 des durch die Punkte $O_0 O'_0 O''_0$ gelegten „Grundkreises" sehr leicht festgestellt. Ist nämlich ω positiv, so liegt M_0 auf derjenigen Seite der Centralnormalen, welche durch eine Drehung von 90^0 im Bewegungssinne des Uhrzeigers auf $O'_0 O$ fällt. Es ist aber der Radius dieses Kreises

$$R_0 = \frac{d}{\omega} = \sigma . tg\,\psi,$$

also positiv, wenn ω positiv ist, und mithin muss die genannte Richtung der Centralnormalen positiv sein. — Weiter folgt:

Der in O'_0 auf der Grundebene stehende, nach g sehende Beobachter hat alle positiven Richtungen der Normalen zur Linken, alle negativen zur Rechten.

Wir führen ein Coordinatensystem ein, dessen positive x-, y- und z-Axe mit den Richtungen von $O'_0 O_0$ und den positiven Richtungen der Centralnormalen und der Erzeugenden g' coincidirt. In diesem System lauten die Gleichungen der durch P' gehenden Flächennormalen

$$y \cdot tg\,\varphi = x, \quad z = s \cdot tg\,\varphi,$$

mithin ist diejenige des Normalenparaboloids

XV) $$z \cdot y = s \cdot x.$$

Setzen wir in Gleichung XIV)

$$2 \cdot ctg\,2\lambda = ctg\,\lambda - tg\,\lambda,$$

ferner nach VIII)

$$tg\,\lambda = \frac{R \cdot cos^2\varphi}{s},$$

so erhalten wir die in R quadratische Gleichung

XVI*) $$ctg\,\psi \cdot \frac{s + \sigma \cdot cos^2\varphi}{\sigma \cdot cos\,\varphi} - \frac{ds}{d} \cdot sin\,\varphi = \frac{s}{R \cdot cos^2\varphi} - \frac{R \cdot cos^2\varphi}{s},$$

welche uns durch ihre Wurzeln R_a und R_b zu jedem Winkel φ, d. h. zu jedem Punkte von g' die beiden Hauptkrümmungsradien liefert. — Wir können XVI*) auch als Gleichung der Projection der Centracurve auf die Grundebene auffassen und dieselbe durch Substitution von

$$R\,cos\,\varphi = y, \quad R\,sin\,\varphi = x$$

in die Form

XVI) $$s^2(x^2+y^2)[-y \cdot ctg\,\psi + \sigma] = \sigma \cdot y^2\left[s \cdot ctg\,\psi \cdot y + y^2 + s \cdot \frac{ds}{d} \cdot x\right]$$

bringen.

Eliminiren wir aus XV) und XVI) x, so erhalten wir die Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene des Elements in der Form

XVII) $$(s^2+z^2)[\sigma - y \cdot ctg\,\psi] = \sigma \cdot y\left[s \cdot ctg\,\psi + \frac{ds}{d} \cdot z + y\right].$$

Die Projection der Centracurve auf die Grundebene ist eine Curve vierten Grades, diejenige auf die Asymptotenebene eine solche dritten Grades.

Man constatirt leicht, dass letztere, so lange σ endlich ist, die Centralnormale im Unendlichen trifft, ein Resultat, welches uns bei Bestimmung der Asymptoten der Centracurve Dienste leisten wird.

Um zunächst die Richtung festzustellen, in welcher wir nach den unendlich fernen Punkten der Centracurve gelangen, setzen wir in XVI*)

$$R = s \cdot tg\,\varphi \cdot tg\,\vartheta,$$

indem wir uns M_a und M_b mit O'_0 verbunden denken und den wie die Asymptotenwinkel gezählten, von MO'_0 und g' eingeschlossenen Winkel ϑ nennen. Lassen wir gleichzeitig, um zu den Krümmungsradien der unendlich fernen Punkte von g' zu gelangen, φ nur um eine unendlich kleine Grösse Δ von 90^0 abweichen, so erhalten wir

$$tg\,\vartheta_1^\infty = \frac{\sigma \cdot tg\,\psi}{s}.$$

Im Allgemeinen bestehen zwischen ϑ_a und ϑ_b die Relationen

$$R_a = s \cdot tg\,\varphi \cdot tg\,\vartheta_a, \quad R_b = s \cdot tg\,\varphi \cdot tg\,\vartheta_b,$$

folglich

$$tg\,\vartheta_a \,.\, tg\,\vartheta_b = -\frac{1}{\sin^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi},$$

also hier

$$tg\,\vartheta_1^\infty \,.\, tg\,\vartheta_2^\infty = \tfrac{1}{0} = \infty$$

und mithin, da $tg\,\vartheta_1^\infty$ endlich gefunden wurde,

$$tg\,\vartheta_2^\infty = \infty, \quad \vartheta_2^\infty = 90^0.$$

Somit führen von O'_0 aus zwei in der Centralebene gelegene Strahlen nach den unendlich fernen Punkten und man findet leicht auf dem Normalenparaboloid zwei zu ihnen parallele Erzeugende. Wie nämlich diejenige Erzeugende der Schaar der Normalen, welche mit der Centralnormalen den Winkel φ bildet, den Abstand $s\,.\,tg\,\varphi$ vom Scheitel O'_0 hat, wird diejenige Erzeugende der andern Schaar, welche mit g' den Winkel ϑ_1^∞ bildet, die Centralnormale im Abstande $s\,.\,tg\,\vartheta_1^\infty = s\,.\,tg\,\psi$ schneiden, d. h. durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehen, während die andere, da $s\,.\,tg\,\vartheta_2^\infty = \infty$ ist, mit der unendlich fernen Geraden der Grundebene coincidirt.

Da weiter die Tangenten der Centracurve, weil dieselbe auf dem Normalenparaboloid liegt, auch diese Fläche berühren müssen, letztere aber im unendlich fernen Punkte einer im Endlichen liegenden Erzeugenden nur von dieser berührt wird, folgt, dass die durch den Grundkreismittelpunkt führende Erzeugende eine im Endlichen liegende Asymptote der Curve ist. Von der andern Asymptote wissen wir vorerst nur, dass sie in der unendlich fernen Berührungsebene des Paraboloids liegt und der unendlich fernen Erzeugenden, also der Grundebene parallel ist. Da aber die Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene die Centralnormale im unendlich fernen Punkte schneidet, muss die zweite Asymptote nothwendig in der Grundebene selbst liegen; also fällt sie mit der unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids zusammen. Die gefundenen Resultate gelten jedoch nur, wenn σ endlich ist, und wir können somit nur sagen:

So lange σ einen endlichen Werth hat, besitzt die Centracurve zwei Asymptoten, deren eine die durch den Grundkreismittelpunkt führende und deren andere die in der Grundebene gelegene unendlich ferne Erzeugende des Normalenparaboloids ist.

Da bei der Orthogonalprojection Asymptote in Asymptote übergeht, ausser wenn die Projectionsebene senkrecht zu ihr steht, folgt, gleichfalls unter der Beschränkung, dass σ endlich ist:

Die Projection der Centracurve auf die Grundebene hat die durch den Grundkreismittelpunkt gehende Parallele zur kürzesten Distanz und die unendlich ferne Gerade zu Asymptoten.

Die Projection der Centracurve auf die Centralebene wird von der durch O'_0 führenden, gegen g' um $\vartheta_1^\infty = arc.tg\frac{\sigma.tg\psi}{s}$ geneigten Geraden und von der verlängerten kürzesten Distanz im Unendlichen berührt.

Die Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene besitzt die durch den Grundkreismittelpunkt parallel zu g' gelegte und die unendlich ferne Gerade als Asymptoten.

Aus der Lage des Grundkreismittelpunktes ergiebt sich, zu welchem Aste der Centracurve die einzelnen Asymptoten gehören.

Windschiefe Flächen, deren Erzeugende einer „Richtebene" parallel sind, nennt man Cylindroide. Die kürzesten Distanzen sind beständig normal zur Richtebene und liegen mithin auf einem Cylinder. Winkel ω hat den Werth 0, also ist σ unendlich gross. Die Gleichung 14) geht für $\varphi = 90 - \varDelta$ und $R = s.tg\varphi.tg\vartheta$ in

$$-\frac{ds}{d} = \frac{1}{\varDelta.tg\vartheta} - \varDelta\, tg\vartheta$$

über, welche für ϑ die Werthe

$$\vartheta_1^\infty = 90^0, \quad \vartheta_2^\infty = 90^0$$

liefert. Beide Asymptoten liegen also in der unendlich fernen Berührungsebene des Paraboloids und sind jedenfalls der unendlich fernen Erzeugenden derselben parallel. Eine weitere Ebene, in der sie enthalten sind, finden wir durch die Asymptoten der Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene.

Aus XVII) geht für $\sigma = \infty$ als Gleichung dieser Curve

$$\text{XVIII)} \qquad (s^2 + z^2) = s.tg\psi.y + \frac{ds}{d}.y.z + y^2$$

hervor. Setzen wir in ihr

$$z = \varrho.cos v, \quad y = \varrho.sin v \quad \text{und} \quad \frac{ds}{2d} = ctg\, 2v,$$

so wird für die unendlich fernen Punkte

$$cos^2 v = \frac{ds}{2d}.sin v.cos v + sin^2 v$$

oder

$$ctg\, 2v = ctg\, 2v.$$

$$v_\infty = v, \quad v'_\infty = v - 90^0.$$

Bei Cylindroidflächen ist die Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene eine gleichseitige Hyperbel. Die Asymptoten der Centracurve selbst führen durch die unendlich fernen Punkte dieser Hyperbel und sind parallel der unendlich fernen Geraden des Paraboloids.

Die Projectionen der Centracurve einer Cylindroidfläche auf die Grundebene und die Asymptotenebene werden von den unendlich fernen Geraden dieser Ebenen doppelt berührt.

Wir heben noch den Satz hervor:

Die Centracurve einer Cylindroidfläche ist die Schnittcurve des gleichseitigen Normalenparaboloids mit einem gleichseitig hyperbolischen Cylinder, dessen Kanten auf der Scheiteltangentialebene des Paraboloids senkrecht stehen.

Stehen sämmtliche Erzeugende der windschiefen Fläche auf einer Geraden senkrecht, so nennt man dieselbe gerades Konoid. Bei diesem ist $\psi = 90^0$, also $ctg\,\psi = 0$. Die eben gefundene gleichseitige Hyperbel hat ihren Mittelpunkt im Scheitel O'_0.

Die osculirende Regelfläche. Nennen wir die laufenden Coordinaten einer Asymptote γ' in unserem Coordinatensystem x, y, z, so bestehen zwischen ihnen und den Grössen s, φ, 2λ die Beziehungen

$$-y = x \,.\, tg\,\varphi, \quad z = s \,.\, tg\,\varphi + \sqrt{x^2 + y^2} \,.\, ctg\,2\lambda,$$

also

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad ctg\,2\lambda = \frac{z\,.\,x + s\,.\,y}{x\,.\,\sqrt{x^2+y^2}},$$

und wir erhalten aus XIV) durch Substitution dieser Werthe als Gleichung der osculirenden Regelfläche zweiter Ordnung

$$\text{XIX)} \quad x^2(s+\sigma) + y^2 \,.\, s + \sigma \,.\, tg\,\psi \,.\, \frac{ds}{d} \,.\, xy - 2\sigma \,.\, tg\,\psi \,.\, xz - 2 \,.\, s \,.\, \sigma \,.\, tg\,\psi \,.\, y = 0.$$

Diese Gleichung wird durch

$$x = 0, \quad y = 2\sigma \,.\, tg\,\psi, \quad z = z$$

befriedigt, d. h.:

Die zu g' parallele Gerade der Schaar γ' führt durch den zweiten Schnittpunkt Ω'_0 der Centralnormalen mit dem Grundkreise.

Dieser Satz ist geometrisch sofort ersichtlich, wenn man erwägt, dass diejenige Ebene des Büschels g', welche durch Ω'_0 geht, g und g'' im Unendlichen trifft. Aus ihm folgt:

Der Mittelpunkt der osculirenden Regelfläche liegt auf der durch den Grundkreismittelpunkt gehenden Parallelen zu g'.

Der Mittelpunkt ist demnach durch ein zweites Paar paralleler Geraden des Hyperboloids bestimmt. Sei P'_{45} der von O'_0 um s entfernte Punkt, γ'_{45} seine Asymptote, $2\lambda_{45}$ sein Asymptotenwinkel; γ'_0, $2\lambda_0$ seien die entsprechenden Grössen des Centralpunktes. Wir legen durch Ω'_0 eine zur Asymptotenebene parallele Ebene und nennen ihren Schnittpunkt

mit g'_{45} Γ'_{45}. Die durch Γ'_{45} zu γ'_0 parallele Gerade g'_0 liegt auf dem Hyperboloid. Trifft sie die in Ω'_0 auf der Grundebene errichtete Normale im Punkte S, so schneidet SO'_0 die durch den Grundkreismittelpunkt parallel zu g' gehende Gerade im Mittelpunkte des osculirenden Hyperboloids.

Für den Fall, dass $ds = 0$ ist, ist O'_0 ein Scheitel des osculirenden Hyperboloids und der Mittelpunkt desselben fällt mit dem Grundkreismittelpunkte zusammen.

Bei Cylindroidflächen rückt, da σ unendlich gross ist, die zu g' parallele Erzeugende γ' ins Unendliche, das osculirende Hyperboloid geht in ein hyperbolisches Paraboloid über, dessen Gleichung aus XIX) gefunden wird:

XX) $$x^2 + tg\,\psi\left[\frac{ds}{d}x.y - 2.xz - 2s.y\right] = 0.$$

Wir bestimmen den Scheitel desselben, indem wir zunächst mit Hilfe zweier Geraden γ', etwa der leicht zu construirenden γ'_0 und γ'_{45}, die Richtebene der Schaar γ' construiren. Die durch den Scheitel eines hyperbolischen Paraboloids führenden Erzeugenden stehen auf der Schnittlinie der Richtebenen senkrecht; ihre Richtung ist also, da letztere bekannt sind, ebenfalls bekannt. Legen wir daher durch eine beliebige Gerade γ' der Schaar γ' eine Ebene parallel zu g_s, so wird sie g_s enthalten müssen, weil g_s jede Erzeugende der Schaar γ' trifft; sie schneide etwa g'_0 in Q, so ist Q ein Punkt von g_s. Auf dieselbe Weise bestimmt man die wahre Lage von γ_s und hat dann im Schnittpunkte S von g_s und γ_s den Scheitel des osculirenden Paraboloids.

Bei allen geraden Konoiden ist das osculirende Paraboloid gleichseitig; die eine seiner Strictionslinien fällt mit derjenigen der Konoidfläche zusammen, die andere finden wir als kürzesten Abstand einer beliebigen Geraden γ' von der ersten Strictionslinie. Der Schnittpunkt beider ist der Scheitel des Paraboloids. Beim Zeichnen der Centracurve geht man von der Construction der Asymptotenwinkel 2λ aus und verwendet hierzu zweckmässig die Schnittcurve der osculirenden Fläche mit einer zur Asymptotenebene parallelen und von derselben um s entfernten Ebene; diese Curve muss, weil ihre Ebene parallel zweien Erzeugenden der osculirenden Fläche ist, im allgemeinen Falle eine Parabel, bei Cylindroiden eine Gerade sein. Ihre Gleichung wird für $x = s$ aus XIX) gefunden; sie lautet:

$$y^2 + 2y.\sigma.tg\,\psi\left[\frac{ds}{2d} - 1\right] - 2\sigma.tg\,\psi.z = -s(s+\sigma).$$

Setzen wir

$$\sigma.tg\,\psi\left[\frac{ds}{2d} - 1\right] = a, \quad \sigma.tg\,\psi = b, \quad -s(s+\sigma) = c,$$

$$y' + a = y, \quad z' + \frac{a^2 - c}{2b} = z,$$

so geht sie in die Form

$$y'^2 = 2\sigma . tg\psi . z'$$

über; daraus schliessen wir:

Die **Gestalt** der Parabel, in welcher die osculirende Fläche von einer zur Asymptotenebene parallelen und von ihr um s entfernten Ebene geschnitten wird, hängt nur vom Radius des Grundkreises ab; ihre **Lage** variirt mit den Schränkungen des Elements und des conjugirten Elements, jedoch ist die Axe stets der Erzeugenden g' parallel. Durch denjenigen Parabelpunkt, dessen Abscisse $-y$ ist, führt die Asymptote, welche g' in der Entfernung $z=y$ vom Centralpunkte O'_0 trifft. — Bei Cylindroidflächen geht die Curve in eine Gerade über, welche im Specialfall der geraden Konoide die verlängerte kürzeste Distanz schneidet.

Sobald man die Asymptotenwinkel construirt hat, wird man mit Hilfe der Formeln VI), VII), VIII) für die einzelnen Punkte von g' Radien beliebiger Normalschnitte und Hauptkrümmungsradien darstellen.

Gleichung XIV) lässt noch eine interessante Deutung zu. Zieht man nämlich durch O'_0 Parallelen zu den Asymptoten γ', so stellt XIV) die Gleichung der Schnittcurve des entstehenden Kegels zweiter Ordnung mit einer zu g' normalen, von O'_0 um die Einheit entfernten Ebene dar. Im rechtwinkligen Coordinatensystem lautet dieselbe, wenn

$$tg\,2\lambda = r, \quad r . cos\,\varphi = x, \quad r . sin\,\varphi = -y$$

gesetzt wird,

$$x^2(s+\sigma) + y^2 . s + \sigma . tg\psi . \frac{ds}{d} x . y - 2\sigma . tg\psi . x = 0.$$

Ist σ unendlich gross, so zerfällt die Curve in die Geraden

$$\text{XXI*)} \qquad x=0, \quad x + tg\psi . \frac{ds}{d} . y - 2 . tg\psi = 0, \quad z = 1.$$

Die durch die erstere und den Punkt O'_0 bestimmte Ebene ist Richtebene für die Schaar g' der osculirenden Fläche; letztere bestimmt mit O'_0 die Richtebene für die Schaar γ'.

Die Halbirungslinien der Asymptotenwinkel sind Tangenten der Krümmungslinien. Setzen wir also in XIV)

$$2\, ctg\, 2\lambda = ctg\lambda - tg\lambda, \quad tg\varphi = -\frac{y}{x}, \quad z = s . tg\varphi + \sqrt{x^2+y^2} . ctg\lambda,$$

also

$$ctg\lambda = \frac{z . x + s . y}{x . \sqrt{x^2+y^2}},$$

so erhalten wir die Gleichung derjenigen Regelfläche, welche von den Tangenten der Krümmungslinien in den Punkten einer Erzeugenden gebildet wird:

$$\text{XXII)}\quad \left[s.(x^2+y^2)+\sigma.x^2+\sigma.tg\psi\frac{ds}{d}.x.y\right][zx+sy]$$
$$=[(zx+sy)^2-x^2(x^2+y^2)].\sigma.tg\psi.$$

Diese Fläche ist also vom vierten Grade*.

Um den Asymptotenkegel derselben zu finden, ziehen wir durch O'_0 Parallelen zu den einzelnen Halbirungslinien der Asymptotenwinkel und erhalten die Gleichung der Schnittcurve des Kegels mit der zu g' senkrechten, von O'_0 um die Einheit entfernten Ebene, wenn wir in XIV)

$$2\,ctg\,2\lambda=ctg\,\lambda-tg\,\lambda,\quad tg\,\lambda.cos\,\varphi=x,\quad tg\,\lambda.sin\,\varphi=-y$$

setzen:

$$\text{XXIII)}\quad s(x^2+y^2)+\sigma.x^2+\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d}.x.y=\sigma.tg\psi.x[1-(x^2+y^2)].$$

Bei Cylindroiden zerfällt diese Curve in die Gerade

$$x=0,\quad z=1$$

und den Kreis

$$\text{XXIII*)}\quad ctg\psi.x+\frac{ds}{d}.y+x^2+y^2=1,$$

also der Asymptotenkegel in die Asymptotenebene des Elements und einen Kegel zweiter Ordnung.

Die Asymptotenebene enthält die Halbirungslinien aller Winkel, welche die Erzeugenden der Schaar g' mit g' bilden, sie bleibt also hier ausser Betracht; wir können somit den Satz aussprechen:

Die Tangenten der Krümmungslinien in den Punkten einer Erzeugenden liegen stets auf einer Fläche vierter Ordnung. Der Asymptotenkegel derselben ist im Allgemeinen dritter Ordnung; nur bei den Cylindroiden ist es ein Kegel zweiter Ordnung, dessen eines System Kreisschnitte der Grundebene parallel ist.

Singuläre Elemente.** Wir untersuchen nur solche, deren Schränkung unendlich gross oder unendlich klein ist. Im ersten Falle ist d und wegen der Beziehung $d=\delta.tg\psi$ auch δ unendlich klein zweiter Ordnung.

Aus Formel I)

$$r=s.tg\varphi$$

folgt, dass die Berührungspunkte der durch g' gehenden Berührungsebenen mit der windschiefen Fläche nur dann eine endliche Entfernung von O'_0 haben, wenn φ um eine unendlich kleine Grösse Δ von 90^0 differirt, d. h.:

* Und nicht, wie Weyr, „Krümmung windschiefer Flächen", synthetisch herleitet, vom fünften Grade. Uebrigens erstreckt sich Weyr's Untersuchung nur auf die Ordnung dieser Fläche, ihren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene und ihre Doppelcurve g'. (Siehe Prager Sitzungsberichte 1870.)

** Vergl. die Darstellung von De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive, troisième partie, art. 837 sq.*

Die Normalen einer windschiefen Fläche in den Punkten eines unendlich stark geschränkten Elements liegen in der Centralebene desselben.

Sobald $\varphi = 90 - \varDelta$ und d unendlich klein zweiter Ordnung ist, ist 2λ — gleichgiltig, ob σ endlich ist oder nicht — eine unendlich kleine Grösse. Die eine Art Hauptschnitte bildet also mit g', die andere mit der Centralnormalen unendlich kleine Winkel. Demnach ist für alle Punkte von g' — mit Ausnahme von o'_0 — R_a unendlich gross. Zur Bestimmung von R_b folgt aus XV) für $\varphi = 90 - \varDelta$

$$\frac{s}{\sigma . tg\,\psi . \varDelta} + ctg\,\psi . \varDelta - \frac{ds}{d} = \frac{s}{R\varDelta^2} - \frac{\varDelta^2 . R}{s}.$$

Wird hier für $\varDelta$ aus der Relation $R = s . tg\,\varphi$

$$\varDelta = \frac{s}{r}$$

gesetzt, so erhalten wir bei Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder

$$R_b\left(\frac{s}{\sigma . tg\,\psi} . r - s . \frac{ds}{d}\right) = r^2$$

oder, da

$$\frac{s}{\sigma . tg\,\psi} = \frac{\omega}{w}, \quad s . \frac{ds}{d} = \frac{ds}{w},$$

in unserem Coordinatensystem

$$x\left[\frac{\omega}{w} . z - \frac{ds}{w}\right] = z^2.$$

Die Centracurve eines unendlich stark geschränkten Elementes besteht aus der unendlich fernen Geraden der Centralebene, aus der mit der kürzesten Distanz zusammenfallenden Geraden und aus einer durch den Centralpunkt gehenden Hyperbel; auf ersterer liegen die Punkte M_a, auf letzterer die Punkte M_b. Von den Asymptoten der Hyperbel bildet die eine mit g' den Winkel $\vartheta_a^\infty = 90^0$, die andere den durch die Beziehung $tg\,\vartheta_b^\infty = \frac{\sigma . tg\,\psi}{s} = \frac{w}{\omega}$ gegebenen Winkel ϑ_b^∞. Gehört das Element zu einer Cylindroidfläche, so liegen die Punkte M_b auf einer Parabel, welche ihren Scheitel im Centralpunkte und in ihm g' zur Tangente hat.

Im Scheitel O'_0 hat das Element das Krümmungsmass 0, d. h. jeder durch ihn führende Schnitt, also auch die Strictionslinie, hat dort einen Rückkehrpunkt. — Da jeder Kreis, welcher die Curve in ihrem Rückkehrpunkte berührt, als Krümmungskreis in diesem Punkte betrachtet werden kann, weil er drei Folgepunkte der Curve enthält, ist jeder Punkt der durch die kürzeste Distanz bestimmten Geraden als Hauptkrümmungsmittelpunkt des Elements für den Scheitel aufzufassen und diese Gerade daher zur Centracurve zu rechnen.

Zu dem von O'_0 um $\frac{ds}{\omega}$ entfernten Punkte A gehört ein unendlich grosser Krümmungsradius R_b und da auch R_a unendlich ist, wird die windschiefe Fläche dort von der zugehörigen Berührungsebene osculirt. Dieselbe schliesst mit der Asymptotenebene einen unendlich kleinen Winkel ein und fällt daher in der Grenzlage mit ihr zusammen. Nach Früherem liegt der Berührungspunkt A einer durch g' gelegten Ebene mit der Fläche auf der Schnittcurve beider und ist die zugehörige Curventangente die Asymptote γ' für Punkt A. Also ist A ein Schnittpunkt von g' mit derjenigen Curve, welche die Asymptotenebene aus der Fläche herausschneidet, und g' Tangente dieser Curve in A. Da nun die Punkte, welche die Curve mit g und g'' gemein hat, auf verschiedenen Seiten von g liegen, wird sie in A einen Wendepunkt haben; also:

Wenn eine Fläche in einer Erzeugenden g' unendlich stark geschränkt ist, so ist g' Wendetangente für die von der Asymptotenebene aus der Fläche herausgeschnittene Curve. Der Berührungspunkt dieser Wendetangente mit der Curve ist gleichzeitig derjenige Berührungspunkt der Asymptotenebene mit der Fläche, in welcher letztere von ersterer osculirt wird.

Wenn O'_0 im Unendlichen, A im Endlichen liegt und s unendlich klein ist, geht die Hyperbel in eine gleichseitige über.

Ist s unendlich klein und ds gleich Null, so fällt A mit dem Centralpunkte zusammen. Die Curve der Punkte M_b besteht aus der durch die kürzeste Distanz gehenden und einer gegen die Erzeugende um ϑ_b^∞ geneigten Geraden, wo $tg\,\vartheta_b^\infty = \frac{w}{\omega}$ ist. Die windschiefe Fläche hat also dort den Charakter einer abwickelbaren.

Herrscht in einem Elemente unendlich kleine Schränkung, also ist d unendlich gross gegen w, so erhalten wir Punkte im Endlichen nur, wenn φ unendlich klein ist. Aus der Formel XIV)

$$\frac{s}{\sigma . tg\,\psi . cos\,\varphi} + ctg\,\psi . cos\,\varphi - \frac{ds}{d} . sin\,\varphi = \frac{s}{R\,cos^2\,\varphi} - \frac{R . cos^2\,\varphi}{s}$$

folgt nach Division mit s und Substitution von $\varphi = \Delta$

$$\sigma . tg\,\psi = R.$$

Der andere Hauptkrümmungsradius wird, da das Krümmungsmass unendlich ist, unendlich gross sein. Also:

Elemente, welche unendlich schwach geschränkt sind, haben in allen endlichen Punkten die Centralebene zur Berührungsebene. Ihre Normalen liegen in der Asymptotenebene; die eine Schaar der Hauptschnitte geht durch

die Erzeugende, die andere ist also normal auf ihr; die Hauptkrümmungsradien der einen Art sind unendlich gross, die der andern constant. Die Fläche wird in einem solchen Elemente von einem Cylinder osculirt.

Man kann auch geometrisch leicht beweisen, dass die osculirende Fläche, weil $gg'g''$ parallel sind und der Grundkreis einen endlichen Radius hat, in der That ein Cylinder sein muss. Die Lage, welche der Centralpunkt auf der Erzeugenden einnimmt, ist darum ohne Einfluss auf die Grösse der Hauptkrümmungsradien.

Anwendungen. Für Flächen constanter Schränkung ist

$$ds = 0,$$

also folgt aus XIV)

$$\frac{s + \sigma . \cos^2 \varphi}{\sigma . tg \psi . \cos \varphi} = 2 . ctg 2\lambda,$$

d. h. diejenigen Werthe von 2λ, welche den Winkeln φ und $360 - \varphi$ entsprechen, mithin zu zwei vom Centralpunkte gleichweit entfernten Punkten der Erzeugenden gehören, sind einander gleich. Aus VI) folgt, dass alsdann je zwei gegen g' gleich geneigte Normalschnitte gleiche Krümmungsradien haben, und so können wir den Satz aussprechen:

Flächen constanter Schränkung haben in je zwei Punkten einer Erzeugenden, welche von dem Centralpunkte derselben gleichweit entfernt sind, gleiche positive und gleiche negative Krümmungsradien.

Rotationshyperboloid. (Fig. 7.) $AO' = \varrho$ sei die kürzeste Distanz zweier windschiefer Geraden a und g'. Durch A gehe parallel zu g' die Gerade g'_*. Das Ganze bilde ein starres System und rotire um a ohne Verschiebung. Hierbei beschreibt g' ein Rotationshyperboloid, g'_* seinen Asymptotenkegel. Durch eine unendlich kleine Drehung um den Winkel τ gelange das Gebilde G' in die Lage G. Die Ebene $g_* g'_*$ ist parallel den Geraden gg', also parallel der Asymptotenebene des von denselben erzeugten windschiefen Elements. Die durch g' zur Asymptotenebene senkrechte Ebene muss g im Fusspunkte der kürzesten Distanz treffen. Nennen wir die durch O' zu a parallele Gerade a', so wird, da g'_* einen Rotationskegel beschreibt, also die Ebene ag'_* senkrecht zur Tangentialebene $g'_* g_*$ ist, die Ebene $a'g'$ Centralebene des Elements gg' sein. Somit ist O_0, der Schnittpunkt von g mit der Ebene $a'g'$, Fusspunkt der kürzesten Distanz und das von O_0 auf g' gefällte Loth $O_0 O'_0$ die kürzeste Distanz selbst. — Den von a und g' gebildeten Winkel wollen wir, in A auf der zu a senkrechten Ebene stehend, von a' aus im Bewegungssinne des Uhrzeigers zählen und $\varkappa$ nennen. Dann ergiebt sich:

1) $$d = O_0 O'_0 = O_0 O' . \cos \varkappa = \varrho . \tau . \cos \varkappa.$$

Winkel $\widehat{g_* g'_*}$ ist gleich dem Contingenzwinkel w der Geraden gg'. Tragen wir von A aus auf g'_* $AG'=1$ ab und legen durch G' eine zu a senkrechte Ebene, welche g_* und a in G, resp. A' trifft, so ist

2) $$GG' = 1 . w = sin\varkappa . \tau,$$

folglich der reciproke Werth der Schränkung des Rotationshyperboloids

3) $$s = \varrho . ctg\varkappa.$$

Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Fläche der kürzesten Distanzen ebenfalls ein Rotationshyperboloid ist, dessen Axe a mit der Erzeugenden den Winkel $90^0 + \varkappa$ bildet. Somit ist

4) $$\sigma = -\varrho . tg\varkappa.$$

Man erkennt ferner leicht, dass der von O' beschriebene Kreis, der Kehlkreis des Hyperboloids, gleichzeitig Strictionslinie und mithin

5) $$\psi = 90 - \varkappa$$

ist. $O'A$ kann als Centralnormale aufgefasst werden.

Berücksichtigen wir die für s, σ, ψ gefundenen Werthe, sowie die aus 3) folgende Constanz der Schränkung, so geht Gleichung XVI) über in

6) $$\varrho^2 . ctg^2\varkappa (x^2 + y^2)(y + \varrho) . tg\varkappa = \varrho . tg\varkappa . y^3(\varrho + y).$$

Sie wird befriedigt durch

$$y = -\varrho,$$

d. h.:

Die Projection der Centracurve auf die Grundebene zerfällt in eine durch A gehende, zur Centralnormalen senkrechte Gerade und eine Curve dritter Ordnung.

Auf ersterer liegen die Projectionen der Punkte M_a, diese selbst im Schnitte einer in A zur Centralnormalen senkrechten Ebene mit dem Normalenparaboloid, also in einer Erzeugenden desselben. Da der Ast der Punkte M_a eine Gerade ist, muss er mit seiner auf S. 28 bestimmten Asymptote coincidiren. Es ist

$$tg\,\vartheta_1^\infty = -\frac{\varrho . tg\varkappa . ctg\varkappa}{\varrho . ctg\varkappa} = tg(180 - \varkappa).$$

Da $\vartheta_1^\infty > 90^0$ ist, gehört die durch ihn vertretene Asymptote zum Aste der Punkte M_a. Also ist der Ast der Punkte M_a die durch A, den Krümmungsmittelpunkt des Grundkreises führende, mit g' den Winkel $180 - \varkappa$ einschliessende Gerade, also die Axe a. — Dieses Resultat lässt sich auf andere Art weit leichter herleiten und ist es nur zur Verification der gegebenen Sätze in der geschehenen Weise entwickelt worden.

Die Centracurve ist im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung; da die Punkte M_a in einer Geraden liegen, folgt:

Die Centracurve des Rotationshyperboloids besteht aus einer Geraden — der Axe des Hyperboloids — und einer Raumcurve dritter Ordnung; da letztere die unend-

lich ferne Gerade der Grundebene zur Asymptote hat, ist sie eine räumliche Parabel.

Als Projection des Astes M_b auf die zur Asymptotenrichtung desselben senkrechte Ebene, das ist die Asymptotenebene des Elements, müssen wir demnach eine Parabel erhalten, und in der That zerfällt XVII), die Gleichung der Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene, in

$$y = -\varrho, \quad z^2 = \varrho(y - \varrho . ctg^2 \varkappa).$$

Die Projectionen der Centracurve eines Rotationshyperboloids auf die durch den Mittelpunkt der Fläche und die betreffende Erzeugende gelegte Ebene besteht aus der Projection der Axe auf dieselbe und aus einer Parabel, deren Axe mit dem entsprechenden Radius des Kehlkreises zusammenfällt, deren Parameter die Länge dieses Radius hat und deren Scheitel vom Mittelpunkte des Hyperboloids um die Strecke $\frac{\varrho}{sin^2 \varkappa}$ entfernt ist.

Der Ast der Punkte M_b kann auch auf folgende Weise construirt werden. Wir suchen für die einzelnen Punkte P'_* einer Meridianhyperbel die Normale, deren Schnittpunkt M_a mit der Axe a und den zur Hyperbel gehörigen Krümmungsmittelpunkt M^*_b. M_a und M^*_b sind Hauptkrümmungsmittelpunkte für P'. Eine Rotationsfläche hat in den Punkten eines Parallelkreises gleiche Hauptkrümmungsradien. Somit brauchen wir $M_a M^*_b$ nur in unveränderter Neigung gegen die Axe a um diese rotiren zu lassen, bis sie die Gerade g' in P' schneidet, um die Hauptkrümmungsmittelpunkte für denselben zu erhalten. Da die Punkte M^*_b in der Krümmungsmittelpunktcurve der Meridianhyperbel liegen, erhalten wir den Satz:

Die Centrafläche eines einschaligen Rotationshyperboloids besteht aus der Axe desselben und einer Rotationsfläche, deren Meridiancurve die Evolute der Meridianhyperbel ist. Diese Fläche ist von zwei Schaaren räumlicher Parabeln bedeckt, welche sich paarweise in Punkten des Kehlkreises schneiden; je zwei räumliche Parabeln derselben Schaar sind congruent, je zwei verschiedener Schaaren symmetrisch.

Dieselben Resultate, welche für g' gefunden worden sind, gelten nämlich auch für die auf demselben Hyperboloid liegende, gegen g' um $180 - \varkappa$ geneigte Gerade γ'.

Da die Centracurve von g' die Schnittcurve zweier auf einanderfolgender Normalenparaboloide ist, können wir auch sagen:

Wenn ein gleichseitiges Paraboloid um eine Gerade a der einen Schaar — ohne Gleitung — rotirt, beschreibt die

Strictionslinie der andern Schaar ein Rotationshyperboloid, dessen Centrafläche aus a und der Enveloppe des Paraboloids besteht.

Aus 6) folgt für $y = -\varrho$ und unter Berücksichtigung von Formel VIII)

7) $$M_a = -\frac{\varrho}{cos\,\varphi}, \quad M_b = \frac{\varrho \,.\, ctg^2 \varkappa}{cos^3 \varphi}.$$

Man verificirt leicht, dass die Projection des Astes M_b, welcher sich auf Grund der Relation 7) sehr bequem zeichnen lässt, für die gegen die kürzeste Distanz um 30^0 geneigten Normalen einen Wendepunkt besitzt.

Sobald für einen Punkt der Erzeugenden g' einer beliebigen windschiefen Fläche $2\lambda = 90^0$ ist, haben daselbst positive und negative Hauptkrümmungsradien gleiche absolute Länge. Nach XIV) tritt dies ein, sobald die Fläche constanter Schränkung

$$cos^2 \varphi = -\frac{s}{\sigma}$$

ist, also vor Allem nur dann, wenn die Fläche und die Fläche ihrer kürzesten Distanzen entgegengesetzt geschränkt sind. Für das einschalige Rotationshyperboloid geht die gefundene Bedingung über in

$$cos^2 \varphi = \frac{\varrho \,.\, ctg\, \varkappa}{\varrho \,.\, tg\, \varkappa} = ctg^2 \varkappa.$$

Auf jedem einschaligen Rotationshyperboloid, dessen Erzeugende mit der Axe einen Winkel einschliessen, welcher kleiner als 45^0 ist, existiren zwei Parallelkreise, in deren Punkten positive und negative Hauptkrümmungsradien absolut gerechnet gleich sind. Auf diesen Kreisen schneidet jede Gerade der einen Schaar zwei Gerade der andern Schaar unter rechtem Winkel. Sobald der Winkel zwischen Axe und Erzeugender gleich 45^0 ist, fallen diese Parallelkreise mit dem Kehlkreis zusammen.

Die Wendelfläche. (Fig. 8.) Zwei windschiefe Gerade a und g' mit dem kürzesten Abstande $\varrho = AO'$ und dem — wie S. 36 beim Rotationshyperboloid gezählten — Winkel $\varkappa$ mögen ein starres System bilden, welches um a rotirt und sich längs a verschiebt. Wenn Drehungswinkel τ und Grösse der Verschiebung v ein constantes Verhältniss haben, erzeugt g' eine windschiefe Schraubenfläche. — Sind g_0 und g die Lagen von g' nach blosser Rotation, resp. nach hinzugetretener Verschiebung, so ist — wie bei dem Rotationshyperboloid — die durch g' zu AO' senkrechte Ebene Asymptotenebene des Elements $g'g$; ihre Schnittpunkte mit g_0 und g seien beziehungsweise C_0 und O_0; die von C_0 und O_0 auf g' gefällten Lothe $C_0C'_0$ und $O_0O'_0$ sind die kürzesten Distanzen der Geraden g_0g' und gg', während O_0C_0 gleich b ist.

Wir finden

1) $$O_0 O'_0 = C_0 C'_0 + C_0 O_0 \cos(90^0 - \varkappa) = \varrho . \tau . \cos\varkappa + b . \sin\varkappa,$$

während der von gg' eingeschlossene Winkel gleich dem von $g_0 g'$ gebildeten, also

2) $$w = \tau . \sin\varkappa$$

ist. Somit folgt

3) $$s = \varrho . ctg\varkappa + \frac{b}{\tau}.$$

b und τ werden analog wie S. 19 δ und ω gerechnet.

Nennen wir η den von $O'O_0$ und der Axe gebildeten Winkel, so ist

$$b = \varrho . \tau . ctg(180 - \eta)$$

und 3) geht über in

4) $$s = \varrho(ctg\varkappa - ctg\eta) = \varrho . \frac{\sin\psi}{\sin\eta . \sin\varkappa},$$

wenn wir den von $O'_0 O_0$ und g' gebildeten Winkel $\eta - \varkappa = \psi$ setzen.

Aus der gegebenen Erzeugungsweise geht hervor, dass die Strictionslinie eine Schraubenlinie vom Steigungswinkel η und die Fläche der kürzesten Distanzen eine windschiefe Schraubenfläche ist, deren Schränkung

5) $$\sigma = -\varrho . \frac{\cos\psi}{\sin\eta . \cos\varkappa}$$

bestimmt.

Wenn die Gerade g' die Axe a selbst schneidet, so entsteht eine axiale Schraubenfläche, deren Schränkung nach 3) durch

6) $$s = \frac{b}{\tau}$$

ausgedrückt ist. Mithin ist die Schränkung der axialen Schraubenflächen unabhängig vom Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Axe, sie hängt nur ab von b und τ. Alle Geraden also, welche wir uns in der Ebene ag' denken, erzeugen, während g' eine axiale windschiefe Schraubenfläche erzeugt, eine ebensolche Fläche von gleichgrosser und gleichartiger Schränkung. Daraus folgt insbesondere:

Eine axiale Schraubenfläche und die axiale Schraubenfläche ihrer kürzesten Distanzen haben völlig gleiche Schränkung.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir etwas näher auf die allgemeine Wendelfläche oder gerade Schraubenfläche ein, deren Erzeugende mit der Axe einen Winkel von 90^0 bilden. Hier ist

α) $$\begin{cases} s = \frac{b}{\tau} = \varrho . tg\psi, \quad \frac{ds}{d} = 0, \\ \sigma = \infty, \end{cases}$$

also nach XIV)

$$ctg\psi . \cos\varphi = 2 . ctg 2\lambda.$$

Nach VI) ist der Radius eines zu g' senkrechten Normalschnittes

$$R_s = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{s}{\cos^2\varphi} \cdot tg\, 2\lambda,$$

also in unserem Falle

$$\beta) \qquad R_s = \tfrac{1}{2} \frac{s}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{2 \cdot tg\,\psi}{\cos\varphi} = \frac{s \cdot tg\,\psi}{\cos^3\varphi} = \frac{\varrho \cdot tg^2\psi}{\cos^3\varphi}.$$

Wir fanden bei dem Rotationshyperboloide eine ähnliche Formel für die Curve der Punkte M_b und sahen, dass dieselben auf einer räumlichen Parabel lagen; hieraus schliessen wir:

Die Krümmungsmittelpunkte aller zu einer Erzeugenden einer Wendelfläche senkrechten Normalschnitte liegen in einer räumlichen Parabel.

Wir können dieselbe mit Hilfe eines Rotationshyperboloids, dessen Axe diejenige der Schraubenfläche im Punkte A unter dem Winkel ψ trifft, construiren.

Aus XXI*) folgt:

Die Richtebene der Schaar γ' geht durch die Centralnormale und bildet mit g' einen Winkel ν, wo

$$tg\,\nu = 2\, tg\,\psi$$

ist.

Wir schliessen aus XXIII):

Die Richtungen der Hauptschnitte in den Punkten einer Erzeugenden der Wendelfläche sind den Kanten eines Kegels zweiter Ordnung parallel, dessen eine Hauptebene mit der Centralebene dieser Erzeugenden coincidirt und dessen eines System Kreisschnitte parallel der Grundebene ist.

Gleichung XVIII) lehrt:

Die Projection der Centracurve auf die Asymptotenebene ist eine gleichseitige Hyperbel, deren reelle Axe mit der Centralnormalen coincidirt und die Länge $\varrho . tg\,\psi$ hat, während ihr Mittelpunkt um die Strecke $-\frac{\varrho}{2}$ vom Centralpunkte entfernt ist.

Die Centracurve einer Wendelfläche ist die Durchschnittslinie eines gleichseitigen Paraboloids mit einem gleichseitig hyperbolischen Cylinder, dessen Kanten der Scheitelnormalen des Paraboloids parallel sind, während der Mittelpunkt der Hyperbel auf der einen Strictionslinie liegt und ihre reelle Axe mit derselben coincidirt.

Bei der axialen geraden Schraubenfläche ist

$$\psi = 90^0,$$

also

$$ctg\, 2\lambda = 0, \quad 2\lambda = 90^0.$$

Hieraus folgt

$$R_a = -R_b.$$

In jedem Punkte einer axialen geraden Schraubenfläche haben positiver und negativer Hauptkrümmungsradius unter einander dieselbe Länge.*

Die Centracurve ist der Durchschnitt eines gleichseitigen Paraboloids mit einem gleichseitig hyperbolischen Cylinder, dessen Kanten auf der Scheiteltangentialebene des Paraboloids senkrecht stehen. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt im Scheitel dieser Fläche**, ihre Axen fallen mit den Strictionslinien derselben zusammen.

Die Richtebene der Asymptoten γ' ist die Grundebene der Erzeugenden g'.

Die Tangenten der Krümmungslinien in den Punkten einer Erzeugenden sind parallel den Kanten eines Rotationskegels, dessen Axe diese Erzeugende ist und dessen Kanten mit der Axe einen Winkel von 45^0 bilden. Die einzelnen Krümmungslinien schneiden also alle Erzeugenden unter diesem constanten Winkel.

Curven gleichen Krümmungsmasses auf dem hyperbolischen Paraboloid. (Fig 9.) Wir beziehen das Paraboloid auf ein Coordinatensystem, dessen x- und y-Axe mit den Scheitelgeraden und dessen z-Axe mit der Scheitelnormale coincidirt. Gegeben sei diejenige zur xz-Ebene parallele Gerade γ der Schaar Γ, welche mit der xy-Ebene einen Winkel von 45^0 bildet; sie treffe die y-Axe in der Entfernung a vom Scheitel S. Die Scheitelgeraden mögen den Winkel 2α einschliessen.

Den Winkel ν, welchen eine beliebige Gerade g' der Schaar G mit der xy-Ebene bildet, zählen wir, entsprechend dem Früheren, von ihrer Projection g'_0 auf die Scheitelebene aus im Sinne des Uhrzeigers. Man erkennt leicht, dass die Schaaren G und Γ entgegengesetzt geschränkt sind; nach unserer Figur hat die Schaar G positive, die Schaar Γ negative Schränkung.

Die Gerade g' ist bestimmt durch die Gleichungen

$$x = a \,.\, tg\nu, \tag{1}$$

$$y \,.\, tg\nu = z. \tag{2}$$

Ist g die Nachbargerade von g' für wachsendes x, g_0 ihre Projection auf die xy-Ebene, so ist der in Richtung der x-Axe gemessene Abstand von g_0 und g'_0

$$dx = a \,.\, \frac{d\nu}{cos^2\nu}, \tag{3}$$

---

* Diesen Satz hat Meusnier zuerst bewiesen.

** Vergl. die Herleitung dieses Satzes, De la Gournerie a. a. O. Art. 1038. Er erwähnt gleichzeitig ohne Beweis, dass die Projection der Centracurve auf die Grundebene bei jedem geraden Konoid eine Hyperbel sei. Wir sahen S. 29, dass sie bei jedem „Cylindroid“ eine „gleichseitige“ Hyperbel ist.

während der senkrechte Abstand d von g_0 und g'_0, also gleichzeitig derjenige von g und g'

4) $$d = dx.\sin 2\alpha$$

ist. dv ist der Contingenzwinkel von g und g', also die Schränkung in g'

5) $$s = \frac{a.\sin 2\alpha}{\cos^2 v}.$$

Da je zwei Gerade der Schaar G und Γ, welche von S gleiche Entfernung haben, gegen die xy-Ebene gleich geneigt sind, herrscht in ihnen gleiche — wenn auch entgegengesetzt gerichtete — Schränkung. Alle Erzeugenden der Schaar G sind der yz-Ebene parallel, also ist die Fläche der kürzesten Distanzen ein zur yz-Ebene normaler Cylinder, welcher das hyperbolische Paraboloid in der Strictionslinie, dem Orte der Centralpunkte der Schaar G, berührt. Den Centralpunkt von g' finden wir im Schnittpunkte dieser Geraden mit der Orthogonalprojection g_l von g auf die durch g' gehende Leitebene. Die Gleichung von g_l in dieser Ebene ist

6) $$(y - dx.\cos\alpha)\, tg(v + dv) = z.$$

Combiniren wir dieselbe mit der entsprechenden Gleichung

$$y.tg v = z$$

von g' und nennen die Coordinaten des Punktes $g_l g'$, also des Centralpunktes x', y', z', so folgt zunächst

$$y'.\frac{dv}{\cos^2 v} = dx.\cos 2\alpha.tg v$$

oder, da nach 3) $\frac{dx}{dv} = \frac{a}{\cos^2 v}$ ist,

7) $$y' = a.tg v.\cos 2\alpha, \quad x' = a.tg v, \quad z' = a.tg^2 v.\cos 2\alpha,$$

wo die Werthe von x' und z' durch Substitution von y' in 1) und 2) folgen.

Eliminiren wir aus den beiden ersten Gleichungen des Systems 7) und aus der ersten und letzten $tg v$, so erhalten wir die Gleichungen der Projection der Strictionslinie auf die xy-Ebene und yz-Ebene in der Form

8) $$\frac{y'}{x'} = \cos 2\alpha,$$

9) $$y'^2 = a.\cos^2\alpha\, z'.$$

Vertauschen wir in den Ausdrücken 7), 8), 9) x' mit y', so erhalten wir die entsprechenden Formen für die Strictionslinie der Schaar Γ, können also sagen:

Die Strictionslinien der beiden Schaaren Gerader eines hyperbolischen Paraboloids sind Parabeln, welche durch den Scheitel führen. Die Ebenen derselben gehen durch die Scheitelnormale und schliessen mit den Scheitelgeraden gleiche Winkel ein.

Trägt man auf der y-Axe eine beliebige Strecke SP ab, errichtet in P ein Loth, zieht durch die Mitte von SP eine Parallele zur x-Axe, welche das Loth in Q trifft, so ist SQ die durch 8) dargestellte Gerade. Der Winkel φ, welchen sie mit der y-Axe bildet, ist durch die Relation

$$2 . tg\,\varphi = tg\,\alpha$$

bestimmt. Die entsprechende Gerade der Schaar Γ liegt symmetrisch zur Halbirungslinie des Winkels der Scheitelgeraden.

Da $\frac{1}{R_a . R_b}$ das Krümmungsmass eines Punktes darstellt, wird in Punkten gleichen Krümmungsmasses einer windschiefen Fläche die Grösse $\frac{s}{\cos^2\varphi}$ einen constanten Werth c haben, also

$$s^2 + s^2 . tg^2\varphi = s . c$$

sein müssen. Ist nun P' ein Punkt von g', welcher dieser Bedingung genügt, l seine Entfernung vom Schnittpunkte P der Geraden g' mit der x-Axe, l_0 seine Entfernung vom Centralpunkte O'_0 der g', so folgt aus I)

$$(l - l_0) = s . tg\,\varphi,$$

wodurch die vorige Gleichung in

$$(l - l_0)^2 = s(c - s)$$

oder, nach Einführung des in 5) gegebenen Werthes von s, in

$$(l - l_0)^2 . \cos^2\nu = a \sin 2\alpha \left(c - \frac{a . \sin 2\alpha}{\cos^2\nu}\right)$$

übergeht. Berücksichtigt man noch, dass

$$(l - l_0)\cos\nu = y - y' = y - a . tg\,\nu . \cos 2\alpha$$

und nach 1)

$$tg\,\nu = \frac{x}{a}$$

ist, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$10)\qquad y^2 - 2xy . \cos 2\alpha + x^2 = a . \sin 2\alpha(c - a \sin 2\alpha).$$

Dieselbe Gleichung gilt, weil sie durch Vertauschung von x und y ungeändert bleibt, für die Schaar Γ. Transformiren wir sie in ein System, dessen Axen die Halbirungslinien des Winkels der Scheitelgeraden sind, so erhalten wir

$$11)\qquad \frac{x_0^2}{ctg^2\alpha} + \frac{y_0^2}{tg^2\alpha} = c^2.$$

10) und 11) lehren:

Die Curven gleichen Krümmungsmasses eines hyperbolischen Paraboloids haben zur Orthogonalprojection auf dessen Scheitelebene ein System ähnlicher Ellipsen, deren Axen den Winkel der Scheitelgeraden halbiren. — Je eine Scheitelgerade und die Schnittlinie derjenigen Ebene, welche die Strictionslinie der andern Schaar ent-

hält, mit der Scheitelebene enthalten ein Paar conjugirter Durchmesser dieser Curven.

Letzteres folgt daraus, dass je zwei vom Centralpunkte O'_0 der Geraden g' gleichweit entfernte Punkte P' und P'_1 gleiches Krümmungsmass haben, dass die Projectionen der drei Punkte auf einer Parallelen zur y-Axe liegen und die Projection des Punktes O'_0 die Projection der Strecke PP'_1 halbirt.

Setzen wir in den gefundenen Gleichungen $2\alpha = 90^0$, so geht das allgemeine hyperbolische Paraboloid in ein gleichseitiges über, die Strictionslinien fallen mit den Scheitelgeraden zusammen, das System Ellipsen verwandelt sich in ein System von Kreisen.

Errichten wir in S auf der y-Axe eine Senkrechte X, welche von der durch g' gehenden Leitebene in o'_0 getroffen werde, ziehen wir durch o'_0 eine Parallele g'_* zu g' und verfahren ebenso mit sämmtlichen Geraden der Schaar G, so bedeckt die Schaar G_0 ein gleichseitiges Paraboloid; denn die Gleichung von g'_0 ist im System Xy

$$X = a.\sin 2\alpha.\operatorname{tg} v, \quad y.\operatorname{tg} v = z.$$

Dieses gleichseitige Paraboloid können wir nun auch durch Deformation aus dem allgemeinen Paraboloid erzeugen, indem wir jedes Element des letzteren zwischen den begrenzenden Asymptotenebenen so lange parallel mit sich verschieben, bis der Centralpunkt O'_0 nach o'_0 gelangt. Hierbei bleibt die Schränkung jedes Elementes ungeändert und das gleichseitige Paraboloid wird also Punkt für Punkt mit dem allgemeinen hyperbolischen Paraboloid gleiches Krümmungsmass besitzen, obschon diese Deformation mit Dehnung verknüpft ist. Die Curven gleichen Krümmungsmasses der ersten Fläche verwandeln sich in solche der abgeleiteten, ebenso die Projectionen der ersteren auf die xy-Ebene in solche der letzteren, die Ellipsen in Kreise.

Eine Gerade g', welche beständig drei feste Leitcurven trifft, erzeugt eine (im Allgemeinen) windschiefe Fläche W. Wir wollen eine beliebige Lage der g' und damit die Schnittpunkte P'_1, P'_2, P'_3 derselben mit den Leitcurven, sowie die Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Krümmungsradien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der letzteren in den Punkten P'_1, ... als gegeben voraussetzen und mit Hilfe der früheren Entwickelungen diejenigen Grössen bestimmen, von welchen die Krümmung der windschiefen Fläche in den Punkten von g' abhängt.

Zunächst wird der Centralpunkt O'_0, die Richtung der kürzesten Distanz $O'_0 O_0$ und die Schränkung $\frac{1}{s}$ für g' zu berechnen sein.*

Es sei $r_{\varkappa\lambda} = r_\varkappa - r_\lambda$, $\varphi_{\varkappa\lambda} = \varphi_\varkappa - \varphi_\lambda$, $\varphi^{\varkappa\lambda} = \varphi_\varkappa + \varphi_\lambda$, wo $r_\varkappa$ und $\varphi_\varkappa$ die frühere Bedeutung haben.

---

* Vergl. S. 18 die constructive Lösung, welche Mannheim hierfür gegeben hat.

Durch die drei bekannten Taugentialebenen $\overline{t_1 g'}$, $\overline{t_2 g'}$, $\overline{t_3 g'}$ der Fläche W und ihre Berührungspunkte P'_1, P'_2, P'_3 mit derselben sind gegeben

$$r_{12},\ r_{23},\ r_{31};\quad \varphi_{12},\ \varphi_{23},\ \varphi_{31}.$$

Durch sie sind s, r_1, r_2, r_3; φ_1, φ_2, φ_3 auszudrücken.

Nach Gleichung 1) ist

$$1)\qquad r_1 = s . tg\,\varphi_1,\quad r_2 = s . tg\,\varphi_2,\quad r_3 = s . tg\,\varphi_3.$$

Statt $r_2 = s . tg\,\varphi_2$ schreiben wir

$$r_1 - r_{12} = s . tg(\varphi_1 - \varphi_{12}) = s . \frac{tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_{12}}{1 + tg\,\varphi_1 . tg\,\varphi_{12}} = s . \frac{r_1 - s . tg\,\varphi_{12}}{s + r_1 . tg\,\varphi_{12}}$$

oder

$$r_1^2\, tg\,\varphi_{12} - r_1 r_{12}\, tg\,\varphi_{12} = s . r_{12} - s^2 . tg\,\varphi_{12},$$

für $r_3 = s . tg\,\varphi_3$ analog

$$r_1^2\, tg\,\varphi_{31} + r_1 r_{31}\, tg\,\varphi_{31} = s . r_{31} - s^2 . tg\,\varphi_{31}.$$

Hieraus folgt

$$r_1 . tg\,\varphi_{12} . tg\,\varphi_{31} [r_{12} + r_{31}] = s\,|- r_{12}\, tg\,\varphi_{31} + r_{31}\, tg\,\varphi_{12}|$$

oder, weil

$$r_{12} + r_{31} = - r_2 + r_3 = r_{32} = - r_{23}$$

ist,

$$2)\qquad r_1 = s . \frac{r_{12}\, tg\,\varphi_{31} - r_{31}\, tg\,\varphi_{12}}{r_{23}\, tg\,\varphi_{31}\, tg\,\varphi_{12}}.$$

Da $\frac{r_1}{s} = tg\,\varphi_1$ ist, liefern 2) und analog gebildete Formeln die Winkel φ_1, φ_2, φ_3. Damit ist die Richtung der kürzesten Distanz bestimmt

Wir bilden analog 2)

$$r_2 = s . \frac{r_{31}\, tg\,\varphi_{12} - r_{12}\, tg\,\varphi_{23}}{r_{31}\, tg\,\varphi_{12}\, tg\,\varphi_{23}}$$

und erhalten durch Subtraction dieser Gleichung von 2)

$$r_1 - r_2$$

$$= r_{12} = \frac{s}{tg\,\varphi_{12}} . \frac{(r_{12}\, tg\,\varphi_{31} - r_{31}\, tg\,\varphi_{12}) r_{31}\, tg\,\varphi_{23} - (r_{23}\, tg\,\varphi_{12} - r_{12}\, tg\,\varphi_{31}) r_{23}\, tg\,\varphi_{31}}{r_{23} . r_{31} . tg\,\varphi_{23} . tg\,\varphi_{31}},$$

$$\frac{1}{s} = \frac{- r^2_{31}\, tg\,\varphi_{12}\, tg\,\varphi_{23} - r^2_{23}\, tg\,\varphi_{31}\, tg\,\varphi_{12} + r_{12}\, tg\,\varphi_{23}\, tg\,\varphi_{31} [r_{31} + r_{23}]}{r_{12} . r_{23} . r_{31} . tg\,\varphi_{12} . tg\,\varphi_{23} . tg\,\varphi_{31}}.$$

Mithin ist die Schränkung von g'

$$3)\qquad \frac{1}{s} = - \frac{r^2_{12}\, ctg\,\varphi_{12} + r^2_{23}\, ctg\,\varphi_{23} + r^2_{31}\, ctg\,\varphi_{31}}{r_{12} . r_{23} . r_{31}}.$$

Aus 2) und 3) ergiebt sich unmittelbar der Werth für $r_1 \ldots$ und damit die Lage des Centralpunktes.

Wir gehen nunmehr daran, die Winkel $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, $2\lambda_3$, welche die Asymptoten γ'_1, γ'_2, γ'_3 der windschiefen Fläche in $P'_1 \ldots$ mit g'_1 bilden, zu bestimmen. Die Winkel $2\lambda'_1$, $2\lambda'_2$, $2\lambda'_3$, welche g' mit t_1, t_2, t_3 einschliesst, und die Winkel ε_1, ε_2, ε_3, welche die Flächennormalen N_1, N_2, N_3 — d. s. die Lothe der Ebenen $\overline{t_1 g'} \ldots$ in $P'_1 \ldots$ — mit den Hauptnor-

malen n_1, n_2, n_3 der Leitcurven in diesen Punkten bilden, sind als bekannt zu betrachten.

Die Ebene $\overline{t_1 N_1}$ ist ein Normalschnitt, die Ebene $\overline{t_1 n_1}$ ein schiefer Schnitt der windschiefen Fläche; der Neigungswinkel beider ist ε_1, sonach, wenn wir $R_{2\lambda'_1}$ den Krümmungsradius des Normalschnittes nennen,

$$R_{2\lambda'_1} = \frac{\varrho_1}{\cos \varepsilon_1}$$

und nach Gleichung VI)

$$2\, R_{2\lambda'_1} = \frac{s}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{\sin 2\lambda_1}{\sin 2\lambda'_1 \sin(2\lambda'_1 - 2\lambda_1)},$$

also

$$\frac{2\varrho_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{s}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{\sin 2\lambda_1}{\sin 2\lambda'_1 (\sin 2\lambda'_1 \cos 2\lambda_1 - \cos 2\lambda'_1 \sin 2\lambda_1)}$$
$$= \frac{s}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{1}{\sin^2 2\lambda'_1} \; \frac{1}{ctg\, 2\lambda_1 - ctg\, 2\lambda'_1},$$

folglich

$$4) \qquad 2\, ctg\, 2\lambda_1 = \frac{s \,.\cos \varepsilon_1}{\cos^2 \varphi_1 \,.\, \varrho_1 \,.\sin^2 2\lambda'_1} + 2\, ctg\, 2\lambda'_1 .$$

Nun lässt sich das Krümmungsmass $-\frac{\cos^4 \varphi_1}{s^2}$, ... der von g' erzeugten windschiefen Fläche in den Punkten P'_1 ... sehr leicht durch die Grössen r_{12} ..., φ_{12} ... ausdrücken, so dass wir bei Berechnung der Winkel $2\lambda_1$ ... nicht auf die Formeln 2) und 3) zurückzugehen brauchen. Wir erhalten nämlich durch Subtraction je zweier der Gleichungen 1)

$$5) \quad r_{12} = s \,.\frac{\sin \varphi_{12}}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}, \quad r_{23} = s \,.\frac{\sin \varphi_{23}}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_3}, \quad r_{31} = s \,.\frac{\sin \varphi_{31}}{\cos \varphi_3 \cos \varphi_1}.$$

Dividiren wir das Product des ersten und letzten dieser Ausdrücke durch den mittelsten, so ergiebt sich

$$6) \qquad \frac{s}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{r_{12} \,.\, r_{31} \sin \varphi_{23}}{\sin \varphi_{12} \sin \varphi_{31}\; r_{23}},$$

woraus ohne Weiteres der Werth des Krümmungsmasses folgt.

Wir können nunmehr die Grössen s, r_1 ..., φ_1 ..., $2\lambda_1$ ... als gegeben ansehen und gelangen zu dem letzten Theile der Aufgabe, welcher seiner Wichtigkeit wegen besonders präcisirt werden mag:

Von einer Erzeugenden g' einer windschiefen Fläche sind Schränkung, Centralpunkt und Richtung der kürzesten Distanz, sowie die Asymptoten γ'_1, γ'_2, γ'_3 dreier Punkte P'_1, P'_2, P'_3 gegeben. Es ist die Schränkung $\frac{1}{\sigma}$ des conjugirten Elements, der Winkel ψ, welchen die Strictionslinie mit der Erzeugenden g' bildet, und die Grösse $\frac{ds}{d}$ zu bestimmen.

Aus Gleichung XIV) folgt:

$$-\cos^2\varphi_1.\sigma + \sin\varphi_1\cos\varphi_1.\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d} + 2\,ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1.\sigma.tg\psi = s,$$

$$-\cos^2\varphi_2.\sigma + \sin\varphi_2\cos\varphi_2.\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d} + 2\,ctg\,2\lambda^2\cos\varphi_2.\sigma.tg\psi = s,$$

$$-\cos^2\varphi_3.\sigma + \sin\varphi_3\cos\varphi_3.\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d} + 2\,ctg\,2\lambda_3\cos\varphi_3.\sigma.tg\psi = s.$$

In diesen Gleichungen fassen wir σ, $\sigma.tg\psi$, $\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d}$ als Unbekannte auf. Die Determinante der Coefficienten ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} -\cos^2\varphi_1, & \sin\varphi_1\cos\varphi_1; & 2\,ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1 \\ -\cos^2\varphi_2, & \sin\varphi_2\cos\varphi_2, & 2\,ctg\,2\lambda_2\cos\varphi_2 \\ -\cos^2\varphi_3, & \sin\varphi_3\cos\varphi_3, & 2\,ctg\,2\lambda_3\cos\varphi_3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3[ctg\,2\lambda_1\sin\varphi_{23} + ctg\,2\lambda_2\sin\varphi_{31} + ctg\,2\lambda_3\sin\varphi_{12}].$$

Setzen wir $\sigma = \frac{Z_\sigma}{\varDelta}$, $\sigma.tg\psi = \frac{Z_{\sigma.tg\psi}}{\varDelta}$, $\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d} = \frac{Z_{\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d}}}{\varDelta}$, so ist

$$Z_\sigma = \begin{vmatrix} -s, & \sin\varphi_1\cos\varphi_1, & 2\,ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1 \\ -s, & \sin\varphi_2\cos\varphi_2, & 2\,ctg\,2\lambda_2\cos\varphi_2 \\ -s, & \sin\varphi_3\cos\varphi_3, & 2\,ctg\,2\lambda_3\cos\varphi_3 \end{vmatrix}$$
$$= 2s[ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1\cos\varphi^{23}\sin\varphi_{23} + \ldots + \ldots],$$

$$Z_{\sigma.tg\psi.\frac{ds}{d}} = \begin{vmatrix} -\cos^2\varphi_1, & s, & 2\,ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1 \\ -\cos^2\varphi_2, & s, & 2\,ctg\,2\lambda_2\cos\varphi_2 \\ -\cos^2\varphi_3, & s, & 2\,ctg\,2\lambda_3\cos\varphi_3 \end{vmatrix}$$
$$= 2s[ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1\sin\varphi^{23}\sin\varphi_{23} + \ldots + \ldots],$$

$$Z_{\sigma.tg\psi} = \begin{vmatrix} -\cos^2\varphi_1, & \sin\varphi_1\cos\varphi_1, & s \\ -\cos^2\varphi_2, & \sin\varphi_2\cos\varphi_2, & s \\ -\cos^2\varphi_3, & \sin\varphi_3\cos\varphi_3, & s \end{vmatrix}$$
$$= s[\sin\varphi_{12}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \ldots + \ldots].$$

Sonach ist

$$7)\quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{s}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3}.\frac{ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1\cos\varphi^{23}\sin\varphi_{23} + \ldots}{ctg\,2\lambda_1\sin\varphi_{23} + \ldots} \\ &= \frac{ctg\,2\lambda_1\, r_{23}\cos\varphi^{23} + \ldots}{ctg\,2\lambda_1\sin\varphi_{23} + \ldots}, \end{aligned}$$

wo der letzte Ausdruck durch Berücksichtigung der Formeln 5) gefunden wird. — Ferner ist

$$8)\quad tg\psi = \tfrac{1}{2}.\frac{\sin\varphi_{23}\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \ldots}{ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1\cos\varphi^{23}\sin\varphi_{23} + \ldots} = \frac{s}{2}.\frac{\frac{\sin\varphi_{23}}{\cos\varphi_1} + \ldots}{ctg\,2\lambda_1\, r_{23}\cos\varphi^{23} + \ldots},$$

$$9)\quad \frac{ds}{d} = 2.\frac{ctg\,2\lambda_1\cos\varphi_1\sin\varphi^{23}\sin\varphi_{23} + \ldots}{\cos\varphi_2\cos\varphi_3\sin\varphi_{23} + \ldots} = \frac{2}{s}.\frac{ctg\,2\lambda_1\, r_{23}\sin\varphi^{23} + \ldots}{\frac{\sin\varphi_{23}}{\cos\varphi_1} + \ldots}$$

Hiermit ist die gestellte Aufgabe gelöst. — Aus den Formeln 7), 8), 9), welche sich vielfach modificiren lassen, entnehmen wir Folgendes:

Die Bedingung dafür, dass die osculirende Regelfläche zweiter Ordnung in der Erzeugenden g' ihren Scheitel hat, mit anderen Worten, dass in den g' benachbarten Elementen die Schränkung constant, also $ds = 0$ ist, ist

$$10)\qquad ctg\, 2\lambda_1\, r_{23} \sin \varphi^{23} + \ldots = 0.$$

Die osculirende Regelfläche ist ein hyperbolisches Paraboloid, sobald

$$11)\qquad ctg\, 2\lambda_1 \sin \varphi_{23} + \ldots = 0$$

ist. Die Strictionslinie schneidet g' senkrecht, falls sich

$$12)\qquad ctg\, 2\lambda_1\, r_{23} \cos \varphi^{23} + \ldots = 0$$

ergiebt. Dann ist das osculirende Paraboloid gleichseitig.

Soll die Strictionslinie die Erzeugende g' berühren, also die windschiefe Fläche in g' abwickelbar sein, so muss die Gleichung

$$13)\qquad \frac{\sin \varphi_{23}}{\cos \varphi_1} + \frac{\sin \varphi_{31}}{\cos \varphi_2} + \frac{\sin \varphi_{12}}{\cos \varphi_3} = 0$$

bestehen.

In der That folgt aus 13) und der aus der identischen Gleichung $r_{12} + r_{23} + r_{31} = 0$ folgenden Relation

$$14)\qquad \sin \varphi_{23} \cos \varphi_1 + \sin \varphi_{31} \cos \varphi_2 + \sin \varphi_{12} \cos \varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = 0,$$

also nach 3)

$$\frac{1}{s} = \infty.$$

III.

Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie.

Von

Dr. Siegmund Günther,

Gymnasialprofessor in Ansbach.

Hierzu Taf. I Fig. 10—12.

§ 1.

Genesis des Problems.

Die sphärische Astronomie pflegt in neuerer Zeit, seitdem die so sehr erhöhte Genauigkeit der Beobachtungs- und Messungsmethoden dies ermöglicht, die Coordinaten eines Himmelsortes wenigstens für eines der drei gebräuchlichen Systeme, für dasjenige des Aequators, direct zu bestimmen. In früheren Zeiten war dies anders; angesichts der Schwierigkeiten, mit denen jede Ortsbestimmung verknüpft war, pflegte man nur eine gewisse Anzahl von Fundamentalsternen scharf zu bestimmen und diejenigen Punkte, deren Lage gerade zu fixiren war, durch gemessene Abstände mit jenen ersteren zu verbinden. Hierzu jedoch waren noch immer gute Instrumente erforderlich, und insbesondere war es Tycho Brahe, der, wie z. B. aus der interessanten Darstellung von Lockyer[1]) ersehen werden kann, seinen Sextanten speciell zu dieser Aufgabe bestimmte. Beobachter jedoch, denen ein eigentlicher astronomischer Apparat mangelte, sahen sich völlig ausser Stande, den Ort irgend eines merkwürdigen Gestirns anders, als durch eine oberflächliche Beschreibung anzugeben, und ähnlich ist auch heute noch die Situation für Viele, die gleichwohl gern in der Lage wären, die Ortsbestimmung z. B. für Meteore und ähnliche Himmelserscheinungen in einer für die Forschung selbst verwendbaren Weise anzugeben.

Der geistvolle Lehrer Kepler's, Michael Mästlin, verfiel auf ein Verfahren, ohne Zuziehung anderer Hilfsmittel, als sie sich im Besitz eines Jeden zu befinden pflegen, diese anscheinend so schwierige Aufgabe zu lösen. Selbst tüchtiger Theoretiker und feiner Beobachter, verfügte er doch lange Zeit hindurch über gar keine Instrumente und sah sich so gezwungen, durch allerlei Auskunftsmittel diesem Mangel abzuhelfen. So bediente er sich, was damals noch ganz neu war, einer Uhr, um den

scheinbaren Durchmesser der Sonne zu bestimmen[2]). Als aber im Jahre 1572 der bekannte neue Stern in der Cassiopeja aufloderte, dessen Erscheinen sämmtliche Astronomen zu eingehenden Untersuchungen und vorerst also zu möglichst exacten Ortsbestimmungen herausforderte, wünschte auch Mästlin nicht zurückzubleiben und erdachte eben die sehr einfache Methode, von welcher hier die Rede sein soll.

Kästner, der einzige unter allen uns bekannten Historikern, welcher dieser Methode Erwähnung thut, schildert dieselbe mit folgenden Worten[3]): „Mästlin sucht zwey Paar Sterne, mit deren jedem der Planet in einer geraden Linie, eigentlich Bogen eines grössten Kreises, erscheint. Die Rechnung daraus ist mühsam, das Verfahren braucht aber keine Werkzeuge, und giebt soviel Genauigkeit, als Werkzeuge geben.“ Mit besonderem Glücke setzte Mästlin diese seine Idee bei der Bestimmung des genannten neuen Sternes, sowie bei derjenigen des Cometen von 1577 ins Werk. Tycho Brahe, der in seiner berühmten Monographie des Cassiopeja-Sternes zusammenbrachte, was nur irgend über dieses Phänomen geschrieben worden war, räumt in der sehr umfangreichen Literatur der kleinen von Mästlin verfassten Abhandlung einen Ehrenplatz ein, da ihr Autor, mit Nichts weiter, als mit einem Faden zur Feststellung des Alignements versehen, weit mehr geleistet habe, als Andere mit den besten Instrumenten[4]). Es fand sich, dass der Stern einerseits mit einem Sterne im Knie der Cassiopeja und einem ebensolchen am Ellenbogen des Cepheus, andererseits mit zwei Sternen im Stuhl der Cassiopeja und im Fusse des kleinen Bären in ein und demselben Hauptkreise sich befand, wie sich eben durch Vorhalten eines straff gespannten Fadens vor das Auge constatiren liess. Als Ekliptikcoordinaten ergaben sich für die vier Normalsterne den bekannten Sternverzeichnissen zufolge die nachstehenden Werthe: $46^0\,22'$ *lat. n.*, $62^0\,35'\,30''$ *lat. n.*, $51^0\,14'\,30''$ *lat. n.*, $29^0\,51'\,30''$ *lat. n.*; die Längen wurden nach damaligem Gebrauche zu $11^0\,57'$♉, $27^0\,30'\,30''$♈, $29^0\,11'\,30''$♈ und $13^0\,34'$♌ angegeben; dies giebt, da die Zählung vom Widderpunkte ausgeht und jedes Zeichen zu 30^0 zu rechnen ist, resp. $41^0\,57'$ *long.*, $27^0\,30'\,30''$ *long.*, $29^0\,11'\,30''$ *long.*, $133^0\,34'$ *long.* Hieraus berechnet sich nach Mästlin die gesuchte Position zu $53^0\,39'$ in nördlicher Breite und zu $7^0\,38'$ in Länge[5]).

Ins Geometrische übersetzt, hat Mästlin's Problem somit diese Fassung zu erhalten:

Es soll in einem sphärischen Viereck, dessen Oberfläche geringer ist, als die einer Halbkugel*, der Durch-

* Wir führen diese beschränkende Bedingung hier lediglich deshalb ein, um das Resultat zu einem eindeutigen zu machen, da sonst immer noch ausdrücklich bemerkt werden müsste, welcher von den beiden Schnittpunkten der gesuchte ist. Natürlich ist es der mit den gegebenen vier Punkten auf der nämlichen Halbkugel liegende.

schnittspunkt der Diagonalen gefunden werden, sobald die Coordinaten der vier Eckpunkte mit Bezug auf ein irgendwie gewähltes sphärisch-rechtwinkliges Axensystem gegeben sind.

Dass die sphärisch-trigonometrische Lösung dieser Aufgabe von Mästlin nur auf Umwegen und mittelst eines ermüdenden Calculs, der mehrere Grossfolioseiten in Anspruch nimmt, erbracht ward, ist Kästner'n (s. o.) zuzugeben. Die zu Gebote stehenden Sinustafeln waren schwer zu behandeln, von Rechnungsvortheilen kannte man höchstens die Prosthaphäresis*, und zudem musste jeder Schritt, den die Rechnung machte, durch eine Construction gestützt werden. Allein auch heutzutage noch wird auf trigonometrischem Wege nur sehr langsam das Ziel erreicht werden, da insgemein alle Fragen sphärisch-polygonometrischer Natur auf verwickelte Formeln zu führen pflegen. Es wird sich daher empfehlen, einen andern Weg der Auflösung zu betreten.

Ehe wir jedoch hierzu übergehen, sei noch daran erinnert, dass diese Methode, den Ort eines Sternes festzulegen, nur geringen Fehlern ausgesetzt ist. Auch ohne Hilfe der Differentialrechnung lässt sich dies durch eine einfache geometrische Betrachtung zeigen. Sei $ABCD$ (Fig. 10) das Viereck, dessen Diagonalen AC und BD in ihrem Schnittpunkte S den gewünschten Ort ergeben; als einzig denkbare Fehlerquelle ist dann wohl die anzusehen, dass die Verbindungslinie AC oder BD, oder beide Kreise zugleich, nicht genau durch den Punkt S hindurchgehen, dass also nicht S, sondern S' eigentlich in jenen Durchschnittspunkt zu liegen kommt. Die Distanz SS' wird, wenn der Beobachter nur einigermassen genau verfährt und zugleich eine tüchtige astrognostische Kenntniss besitzt, niemals irgend beträchtlich werden können. Wären andererseits die vier Ecksterne im Sternkatalog nicht hinreichend genau verzeichnet, so dass etwa nicht A, B, C, D (Fig. 11) als die genauen Positionen zu betrachten, diese vielmehr bezüglich nach A', B', C', D' zu verlegen wären, so dürfen doch jedenfalls AA', BB', CC', DD' als sehr kleine Bogenstücke, praktisch sonach als Differentiale gelten. Schneiden sich die beiden Kreise AC und $A'C'$ in T, so kann das unendlich schmale Kugeldreieck $AA'T$ mit einem ebenen Dreieck vertauscht werden, und zieht man noch $S's$ parallel $A'A$, so gilt die Proportion $A'A : S's = A'T : S'T$, woraus $S's < A'A$ folgt. Da aber der Unterschied zwischen $S'S$ und $S's$ jedenfalls unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, so ist auch $S'S < A'A$ und demnach um so mehr eine sehr kleine Grösse. Dem Verfahren lässt sich also, wie bereits Mästlin und Tycho aus den dadurch erzielten Ergebnissen geschlossen hatten, erhebliche Genauigkeit nicht absprechen.

---

* Mästlin erlebte noch die Erfindung der Logarithmen, verhielt sich aber gegen dieselben, die ihm Kepler nicht genug anpreisen konnte, ablehnend, weil er sich vollem Verständnisse der Neuerung nicht mehr gewachsen glaubte.

§ 2.

Analytisch-geometrische Lösung der Aufgabe.

Wir wählen das Centrum der Himmelskugel zum Ursprung eines orthogonalen Coordinatensystems, dessen positive Z- und Y-Axe resp. durch den Pol der Ekliptik und durch den Widderpunkt hindurchgehen. Bezeichnet man sodann, wie gewöhnlich, die astronomische Länge durch l, die astronomische Breite durch b, so hat man folgende Transformationsformeln (die Längen in der Ordnung der Zeichen gerechnet):

$$x = \sin l \cos b,$$
$$y = \cos l \cos b, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$z = \sin b.$$

Die Coordinaten der vier Punkte A, C, B, D mögen in der Weise unterschieden werden, dass ihren — rechtwinkligen oder polaren — Coordinaten in der angegebenen Reihenfolge resp. die Indices 1, 2, 3, 4 angehängt werden.

Die Gleichungen zweier Ebenen, welche einerseits durch den Mittelpunkt der Kugel, andererseits bezüglich durch die Punkte A, C und B, D hindurchgehen, sind bekanntlich folgende:

$$\begin{vmatrix} -z_1 & y_1 \\ -z_2 & y_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -z_3 & y_3 \\ -z_4 & y_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_3 & -z_3 \\ x_4 & -z_4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} z = 0.$$

Gehen wir zu Polarcoordinaten über, so lässt sich die dritte der in jeder Gleichung vorkommenden Determinanten leicht auswerthen, denn es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin l_1 \cos b_1 & \cos l_1 \cos b_1 \\ \sin l_2 \cos b_2 & \cos l_2 \cos b_2 \end{vmatrix} = \cos b_1 \cos b_2 \sin(l_1 - l_2).$$

Bei den anderen beiden Gleichungsdeterminanten bleibt nur die directe Ausrechnung übrig, und man findet so als die beiden Bedingungsgleichungen, aus welchen b und l, d. h. die beiden dem gesuchten Schnittpunkte zugehörigen Polarcoordinaten zu berechnen sind, die nachstehenden:

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} &(\sin l_1 \cos b_1 \sin b_2 - \sin l_2 \cos b_2 \sin b_1) \cos b \sin l \\ &+ (\cos l_1 \cos b_1 \sin b_2 - \cos l_2 \cos b_2 \sin b_1) \cos b \cos l \\ &+ \cos l_1 \cos l_2 \sin(b_1 - b_2) \sin b = 0, \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad \begin{aligned} &(\sin l_3 \cos b_3 \sin b_4 - \sin l_4 \cos b_4 \sin b_3) \cos b \sin l \\ &+ (\cos l_3 \cos b_3 \sin b_4 - \cos l_4 \cos b_4 \sin l_3) \cos b \cos l \\ &+ \cos l_3 \cos l_4 \sin(b_3 - b_4) \sin b = 0. \end{aligned}$$

Dass diese beiden Gleichungen die richtigen sind, lehrt uns eine sehr einfache Controlrechnung. Für den Fall nämlich, dass $b_1 = -b_2 = b_3 = -b_4$,

$l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$ wäre, müssten sich, wie ein Blick auf Fig. 12 darthut, die Diagonalen auf der Ekliptik durchschneiden, so dass

$$b = 0, \quad l = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

wäre. Führen wir die angedeutete Specialisirung oben durch, so nehmen unsere Bestimmungsgleichungen diese Gestalt an:

$$\sin b_2 \cos b_2 (\sin l_1 - \sin l_2) \cos b \sin l + \sin b_2 \cos b_2 (\cos l_1 - \cos l_2) \cos b \cos l$$
$$- \cos l_1 \cos b_2 \sin 2 b_2 \sin b = 0,$$
$$\sin b_4 \cos b_4 (\sin l_3 - \sin l_4) \cos b \sin l + \sin b_4 \cos b_4 (\cos l_3 - \cos l_4) \cos b \cos l$$
$$- \cos l_3 \cos l_4 \sin 2 b_4 \sin b = 0.$$

Da der Voraussetzung gemäss $b_2 = b_4$, $\sin l_1 - \sin l_4 = \sin l_2 - \sin l_3$, $\cos l_1 - \cos l_4 = \cos l_2 - \cos l_3$, so folgt durch Addition

$$2 \cos l_1 \cos l_2 \sin 2 b_2 \sin b = 0,$$

und dem kann nur durch $b = 0$ genügt werden. Führt man diesen Werth von b in der ersten Gleichung ein, so erhält man

$$\sin b_2 \cos b_2 (\sin l_1 - \sin l_2) \sin l = - \sin b_2 \cos b_2 (\cos l_1 - \cos l_2) \cos l,$$

$$\tang l = - \frac{\cos l_1 - \cos l_2}{\sin l_1 - \sin l_2},$$

$$\tang l = \frac{2 \sin \frac{l_1 + l_2}{2} \sin \frac{l_1 - l_2}{2}}{2 \cos \frac{l_1 + l_2}{2} \sin \frac{l_1 - l_2}{2}} = \tang \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad l = \frac{l_1 + l_2}{2},$$

wie behauptet worden war.

§ 3.

Adaptirung der Lösung für den logarithmischen Calcul.

Die directe Auflösung der Gleichungen I) und II) wird, wenn zugleich den Ansprüchen des Rechners möglichste Rechnung getragen werden soll, in folgender Weise zu bewerkstelligen sein. Man setze

$$\sin l_1 \sin b_2 = r_1 \sin \varphi_1, \quad \cos l_1 \sin b_2 = \varrho_1 \sin \psi_1,$$
$$\sin l_2 \cos b_2 = r_1 \cos \varphi_1, \quad \cos l_2 \cos b_2 = \varrho_1 \cos \psi_1,$$
$$\sin l_3 \sin b_4 = r_2 \sin \varphi_2, \quad \cos l_3 \sin b_4 = \varrho_2 \sin \psi_2,$$
$$\sin l_4 \cos b_4 = r_2 \cos \varphi_2, \quad \cos l_4 \cos b_4 = \varrho_2 \cos \psi_2,$$

also

$$\varphi_i = \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{\sin l_i}{\sin l_{i+1}} \tang b_{i+1} \right), \quad r_i = \frac{\sin l_i \sin b_{i+1}}{\sin \varphi_i} \quad (i = 1, 2),$$
$$\psi_i = \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{\cos l_i}{\cos l_{i+1}} \tang b_{i+1} \right), \quad \varrho_i = \frac{\cos l_i \sin b_{i+1}}{\sin \psi_i} \quad (i = 1, 2).$$

Dividirt man dann noch I) und II) jeweils durch $\cos b$, so ergeben sich die neuen Gleichungen

$$\text{III)} \quad r_1 \sin (\varphi_1 - b_1) \sin l + \varrho_1 \sin (\psi_1 - b_1) \cos l + M_1 \tang b = 0,$$

IV) $r_2 \sin(\varphi_2 - b_3) \sin l + \varrho_2 \sin(\psi_2 - b_3) \cos l + M_2 \tang b = 0.$

Der Kürze halber ist hier

$$\cos l_1 \cos l_2 \sin(b_1 - b_2) = M_1, \quad \cos l_3 \cos l_4 \sin(b_3 - b_4) = M_2$$

gesetzt worden. Abermals setzen wir, ähnlich wie oben,

$$r_1 \sin(\varphi_1 - b_1) = R \cos \Phi, \quad \varrho_1 \sin(\psi_1 - b_1) = R \sin \Phi,$$
$$r_2 \sin(\varphi_2 - b_3) = P \cos \Psi, \quad \varrho_2 \sin(\psi_2 - b_3) = P \sin \Psi$$

und bekommen so statt III) und IV) resp.

V) $$R \sin(\Phi + l) = - M_1 \tang b,$$

VI) $$P \sin(\Psi + l) = - M_2 \tang b,$$

woraus endlich durch Division folgt

VII) $$\frac{\sin(\Phi + l)}{\sin(\Psi + l)} = \frac{M_1 P}{M_2 R}.$$

Ist hieraus l berechnet, so folgt aus V)

$$\tang(180^0 - b) = \frac{R}{M_1} \sin(\Phi + l),$$

VIII) $$b = 180^0 - \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{R}{M_1} \sin(\Phi + l)\right].$$

Damit wäre die Aufgabe als solche gelöst; da jedoch die Gleichung VII) keine bequeme Berechnung des Werthes von l ermöglicht, so handelt es sich zunächst noch darum, die Auflösung derselben in eine logarithmisch brauchbare Form umzugiessen.

Denken wir uns $M_1 P$ und $M_2 R$, wo etwa $M_1 P < M_2 R$ vorausgesetzt werde, als Masszahlen zweier Seiten eines geradlinigen Dreiecks, so sind nach Gleichung VII) $(\Phi + l)$ und $(\Psi + l)$ resp. die jenen Seiten gegenüberliegenden Dreieckswinkel. Die Mollweide'sche Tangentenformel ergiebt also

$$\frac{\tang \frac{1}{2}[(\Psi + l) - (\Phi + l)]}{\tang \frac{1}{2}[(\Psi + l) + (\Phi + l)]} = \frac{M_2 R - M_1 P}{M_2 R + M_1 P}.$$

Dies giebt

$$\tang\left(l + \frac{\Psi + \Phi}{2}\right) = \frac{M_2 R + M_1 P}{M_2 R - M_1 P} \tang \frac{\Psi - \Phi}{2}$$

oder, wenn noch der Bruch zur Rechten gleich Q gesetzt wird,

IX) $$l = \operatorname{arc\,tang}\left(Q \tang \frac{\Psi - \Phi}{2}\right) - \frac{\Psi + \Phi}{2}.$$

Da es wünschenswerth ist, auch den Bruch Q direct und ohne Anwendung Gauss'scher Logarithmen berechnen zu können, so schlagen wir, nachdem der Bruch auf die Form

$$Q = \frac{\frac{M_2 R}{M_1 P} + 1}{\frac{M_2 R}{M_1 P} - 1}$$

gebracht ist, einen der folgenden beiden Wege ein.

1. Wir setzen

$$\frac{M_2 R}{M_1 P} = tang\,\chi$$

und bekommen

Xa) $$Q = \frac{tang\,\chi + 1}{tang\,\chi - 1} = cotang\,(\chi - 45^0).$$

2. Wir bedienen uns der hyperbolischen Functionen, welche bei der Aufgabe, den Logarithmus einer Summe zu finden, stets mit Vortheil gebraucht werden[6]). Es sei successive

$$\sqrt{\frac{M_2 R}{M_1 P}} = \mathfrak{Sin}\,u, \quad \sqrt{\frac{M_2 R}{M_1 P}} = \mathfrak{Cos}\,v;$$

diese Substitutionen sind zulässig, insofern der hyperbolische Sinus alle reellen Werthe zwischen 0 und ∞, der hyperbolische Cosinus alle reellen Werthe zwischen 1 und ∞ anzunehmen vermag. Alsdann wird

Xb) $$Q = \frac{\mathfrak{Sin}^2 u + 1}{\mathfrak{Cos}^2 v - 1} = \frac{\mathfrak{Cos}^2 u}{\mathfrak{Sin}^2 v},$$

und diese Formel eignet sich um deswillen sehr gut für die Praxis, weil, wenn $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Cos}\,v$ in der Tabelle aufgeschlagen werden, die für die Lösung erforderlichen Werthe von $\mathfrak{Cos}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,v$ sofort ebenfalls gefunden sind.

Durch die Relationen VII), VIII), IX) und, je nach Umständen, Xa) oder Xb) ist somit die eingangs gestellte Aufgabe mit der in solchen complicirteren Fällen überhaupt erreichbaren Eleganz gelöst. Die Berechnung des Mästlin'schen Exempels nimmt hiernach nicht mehr, als eine Folioseite in Anspruch.

Anmerkungen.

1) Lockyer, Die Beobachtung der Sterne sonst und jetzt, deutsch v. Siebert, Braunschweig 1880. S. 58 flgg.

2) Kästner, Geschichte der Mathematik, 2. Bd., Göttingen 1797. S. 449.

3) *Ibid.* S. 447.

4) *Ibid.* S. 618.

5) *Tychonis Brahi Dani, Astronomiae Instauratae Progymnasmata, Pragae Bohemiae 1610.* S. 550.

6) Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen, Halle 1881. S. 152 flgg.

Kleinere Mittheilungen.

I. Das Verhältniss der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten.

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine durch den Punkt (x, y, z) der Fläche $f(x, y, z) = 0$ gehende Gerade mit den rechtwinklig angenommenen Coordinatenaxen bildet, so sind die Richtungen der Inflexionstangenten in diesem Punkte bestimmt durch die Gleichungen

$$\left(\alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d}{dy} + \gamma \frac{d}{dz}\right) f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

und

$$\left(\alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d}{dy} + \gamma \frac{d}{dz}\right)^2 f = \alpha^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22} + 2\alpha\gamma f_{13} + 2\beta\gamma f_{23} + \gamma^2 f_{33} = 0.$$

Eliminirt man hier etwa α, so ergeben sich die Coefficienten der resultirenden Gleichung als Unterdeterminanten der erweiterten Hesse'schen Determinante

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

und wenn man diese in der Art ausdrückt, dass man dem F dieselben Zeiger ansetzt, welche die entsprechenden Elemente in F bei f haben, so heisst diese Gleichung:

$$\beta^2 F_{33} - 2\beta\gamma F_{23} + \gamma^2 F_{22} = 0$$

und liefert sofort

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{F_{33}} \cdot \left(F_{23} \pm \sqrt{F^2_{23} - F_{22} \cdot F_{33}}\right) = \frac{1}{F_{33}} \cdot \left(F_{23} \pm f_1 \cdot \sqrt{F}\right).$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung und mit Beachtung, dass $f_1 F_{13} + f_2 F_{23} + f_3 F_{33}$ verschwindet, wird dann auch

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{F_{33}} \left(F_{13} \mp f_2 \sqrt{F}\right).$$

Indem nun so die Richtungen der zwei Inflexionstangenten des Näheren bestimmt sind, erhält man hieraus in bekannter Weise für den Winkel der Inflexionstangenten

$$tang\,\varphi = \frac{2\sqrt{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\cdot F}}{F_{11}+F_{22}+F_{33}}.$$

Je nachdem F positiv, Null oder negativ ist, hat man demnach zwei verschieden gerichtete oder zwei zusammenfallende Inflexionstangenten, oder ihre Richtungen werden imaginär.

Die durch die Gleichung $F=0$ dargestellte Hesse'sche Fläche schneidet die gegebene Fläche $f=0$ in der Linie, welche die Punkte mit zusammenfallenden Inflexionstangenten enthält. Da ferner der Uebergang von $F>0$ zu $F<0$ hier nur über $F=0$ erfolgt, so theilt diese Schnittlinie die gegebene Fläche in Zonen, deren Punkte einerseits je zwei Inflexionstangenten, andererseits keine solche besitzen, also in Hinblick auf die zugehörige Indicatrix dort hyperbolische, hier elliptische Punkte sind.

Endlich sind von den Punkten mit zwei Inflexionstangenten noch diejenigen hervorzuheben, bei welchen jene sich rechtwinklig schneiden; diese sind bestimmt durch die Gleichung $F_{11}+F_{22}+F_{33}=0$.

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien dienen bekanntlich die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \lambda\varrho = \sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.$$

Erstere giebt entwickelt, mit den bereits gebrauchten Bezeichnungen,

$$(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\cdot\lambda^2+(F_{11}+F_{22}+F_{33})\cdot\lambda - F = 0,$$

daher mittelst letzterer für einen Hauptkrümmungsradius ϱ:

$$\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{F_{11}+F_{12}+F_{13}}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^{3/2}}-\frac{F}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}=0.$$

Hieraus folgt sofort einmal

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{F}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2},$$

also dass für $F>0$, d. i. bei hyperbolischen Punkten, die beiden Krümmungsradien entgegengesetzt gerichtet sind; dann

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = -\frac{F_{11}+F_{22}+F_{33}}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^{3/2}},$$

was sehen lässt, dass bei Punkten mit zu einander senkrechten Inflexionstangenten die beiden Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind.

Für $F=0$, d. i. bei parabolischen Punkten, wird $\frac{1}{\varrho_1}=0$ oder ϱ_1 unendlich gross und

$$\frac{1}{\varrho_2} = -\frac{F_{11}+F_{22}+F_{33}}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^{3/2}}.$$

Allgemein wird durch Auflösung

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{-(F_{11}+F_{22}+F_{33})\pm\sqrt{(F_{11}+F_{22}+F_{33})^2+4F.(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}}{2(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\pm 2\sqrt{F.(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}}{2(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^{3/2}}.\left\{\mp\frac{F_{11}+F_{22}+F_{33}}{2\sqrt{F.(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}}+\sqrt{\frac{(F_{11}+F_{22}+F_{33})^2}{4F(f_1^2+f_2^2+f_3^2)}+1}\right\},$$

mithin wegen Früherem

$$\frac{1}{\varrho}=\pm\frac{\sqrt{F}}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.(cosec\,\varphi\mp cotg\,\varphi),$$

dann

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sqrt{F}}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.tang\,\frac{\varphi}{2},\quad\frac{1}{\varrho_2}=-\frac{\sqrt{F}}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.cotg\,\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt endlich

$$-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=tang^2\,\frac{\varphi}{2},$$

also das Verhältniss der beiden Hauptkrümmungsradien, durch den Winkel der beiden Inflexionstangenten bestimmt, und umgekehrt. — Dieses Ergebniss findet seine Bestätigung in der Betrachtung der beiden unendlich nahe ober- und unterhalb der Berührungsebene parallel dieser gemachten Schnitte; diese sind Hyperbeln mit den Inflexionstangenten parallelen Asymptoten, deren Hauptaxen durch ihr Verhältniss die Winkel letzterer messen und als Sehnen der beiden Hauptkrümmungskreise im Quadrat hier sich verhalten wie die zugehörigen Durchmesser oder Radien.

Regensburg. Prof. Dietrich.

II. Ueber Summen und Producte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven.

Die bekannte Zerlegung von x^n-y^n und x^n+y^n in Factoren von den Formen

$$x-y,\quad x+y,\quad x^2-2xy\cos\frac{k\pi}{n}+y^2$$

hat bisher nur die eine geometrische Deutung erfahren, welche den Namen des Cotes'schen Theoremes führt; dagegen scheint unbemerkt geblieben zu sein, dass sich aus derselben Quelle verschiedene Eigenschaften der Vectoren von Ellipsen und einigen anderen Curven herleiten lassen. In der That bedarf es hierzu nur einer kleinen Umgestaltung der gewöhnlichen vier Productenformeln; für

$$x=\sqrt{\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}}$$

und durch umgekehrte Anordnung der Factoren entstehen nämlich folgende Gleichungen.

Für gerade n ist:

$$1)\quad \begin{aligned}&\left(\xi+\eta\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\xi+\eta\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(\xi+\eta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\left\{\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}-\left(\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}\right\},\end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned}&\left(\xi+\eta\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\xi+\eta\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(\xi+\eta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\\&=\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}+\left(\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n};\end{aligned}$$

und für ungerade n:

$$3)\quad \begin{aligned}&\left(\xi+\eta\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\xi+\eta\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(\xi+\eta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\xi+\eta}}\left\{\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}+\left(\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}\right\},\end{aligned}$$

$$4)\quad \begin{aligned}&\left(\xi+\eta\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\xi+\eta\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(\xi+\eta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\xi-\eta}}\left\{\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}-\left(\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac12 n}\right\}.\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich eine neue Gruppe von Formeln, wenn man beiderseits die Logarithmen nimmt und nach ξ differenzirt; es ist nämlich bei geraden n:

$$5)\quad \begin{aligned}&\frac12\cdot\frac{1}{\xi+\eta}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}\\&+\frac12\cdot\frac{1}{\xi-\eta}=\frac{n}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\cdot\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}+(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}-(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}},\end{aligned}$$

$$6)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{3\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}\\&=\frac{n}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\cdot\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}-(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}+(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}};\end{aligned}$$

und bei ungeraden n:

$$7)\quad \begin{aligned}&\frac12\cdot\frac{1}{\xi+\eta}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{4\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}\\&=\frac{n}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\cdot\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}-(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}+(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac12 n}},\end{aligned}$$

$$8)\quad \frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{3\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{\xi+\eta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi-\eta}$$
$$=\frac{n}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\cdot\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac{1}{2}n}+(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac{1}{2}n}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac{1}{2}n}-(\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2})^{\frac{1}{2}n}}.$$

Durch wiederholte Differentiationen nach ξ können daraus weitere Formeln hergeleitet werden, in denen linker Hand die zweiten oder höheren Potenzen der obigen Nenner vorkommen.

Nimmt man in den letzten vier Gleichungen

$$\xi=a,\quad \eta=\sqrt{a^2-b^2},$$

und multiplicirt beiderseits mit b^2, so hat man Summanden von der Form

$$r_k=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}.\cos\frac{k\pi}{n}},$$

wobei r_k geometrisch den Focalvector bedeutet, welcher in einer aus den Halbaxen a und b construirten Ellipse der wahren Anomalie $\frac{k\pi}{n}$ entspricht. Diese Vectoren besitzen nun folgende Eigenschaften.

Für gerade n ist:

$$9)\quad \tfrac{1}{2}r_0+r_2+r_4+r_6+\ldots+r_{n-2}+\tfrac{1}{2}r_n=\frac{nb}{2}\cdot\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$10)\quad r_1+r_3+r_5+\ldots+r_{n-1}=\frac{nb}{2}\cdot\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}};$$

und für ungerade n:

$$11)\quad \tfrac{1}{2}r_0+r_2+r_4+r_6+\ldots+r_{n-1}=\frac{nb}{2}\cdot\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$12)\quad r_1+r_3+r_5+\ldots+r_{n-2}+\tfrac{1}{2}r_n=\frac{nb}{2}\cdot\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}n}+(a-b)^{\frac{1}{2}n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n}-(a-b)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Die Summe der Gleichungen 9) und 10) giebt Dasselbe, wie die Summe von 11) und 12), nämlich für jedes n:

$$13)\quad \tfrac{1}{2}r_0+r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+\tfrac{1}{2}r_n=nb\,\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{(a+b)^n-(a-b)^n};$$

das nämliche Resultat erhält man aus Nr. 5), wenn man $2n$ an die Stelle von n treten lässt.

Bezeichnen S_0, S_1, S_2, S_3 die in Nr. 9) bis Nr. 12) vorkommenden Summen, so gelten die einfachen Relationen

$$14)\quad \frac{S_0S_1}{n^2}=\frac{S_2S_3}{n^2}=\frac{b^2}{4},$$

wonach die beiden ersten Quotienten unabhängig von n sind.

Die Gleichungen, welche durch Differentiationen von Nr. 5) bis Nr. 8) entstehen, führen zu analogen Formeln für Σr^2, Σr^3 u. s. w., doch sind die Ergebnisse nicht so einfach.

Mittelst der Substitutionen $\xi = a$, $\eta = \sqrt{a^2 - b^2}$ ergeben sich aus den Gleichungen 1) bis 4) die folgenden Productenformeln.

Für gerade n ist:

$$15)\qquad r_2 r_4 r_6 \dots r_{n-2} = \frac{2^{\frac{1}{2}n}\, b^{n-1}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n} - (a-b)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$16)\qquad r_1 r_3 r_5 \dots r_{n-1} = \frac{2^{\frac{1}{2}n}\, b^{n}}{(a+b)^{\frac{1}{2}n} + (a-b)^{\frac{1}{2}n}};$$

und für ungerade n:

$$17)\qquad r_2 r_4 r_6 \dots r_{n-1} = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)}\, b^{n-1}\,(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{(a+b)^{\frac{1}{2}n} + (a-b)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$18)\qquad r_1 r_3 r_5 \dots r_{n-2} = \frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)}\, b^{n-1}\,(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})}{(a+b)^{\frac{1}{2}n} - (a-b)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Das Product aller Strahlen ist in jedem Falle

$$19)\qquad r_0 r_1 r_2 \dots r_n = \frac{2^n\, b^{2n+1}}{(a+b)^n - (a-b)^n}.$$

Auch für die Centralvectoren der Ellipse lassen sich ähnliche Productenformeln entwickeln, wenn man von der Mittelpunktsgleichung

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \frac{2\,a^2}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos 2\theta}$$

ausgeht; so findet man z. B. sehr leicht, wenn R_k den Centralvector bezeichnet, welcher dem Polarwinkel $k\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}$ entspricht,

$$20)\qquad R_0 R_1 R_2 \dots R_n = (2\,a\,b)^n \sqrt{\left\{\frac{a\,b}{(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}}\right\}}.$$

Drittens möge der Fall betrachtet werden, wo der Centralvector ϱ eines Ellipsenpunktes durch die excentrische Anomalie des letzteren ausgedrückt ist, also

$$21)\qquad \varrho^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega = \tfrac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos^2\omega\right].$$

Bezeichnet ϱ_k den Vector, welcher zur excentrischen Anomalie $k\frac{\frac{1}{2}\pi}{n}$ gehört, so gilt die Formel

$$22)\qquad \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n = \frac{1}{2^n}\sqrt{a\,b\left[(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n}\right]}.$$

Dieses Resultat lässt sich noch anders deuten, wenn ω nicht als excentrische Anomalie, sondern als Polarwinkel für den Radius vector ϱ angesehen wird; die Gleichung 21) repräsentirt dann die Fusspunktcurve der vorigen Ellipse, und die Vectoren $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ bilden mit einander gleiche Winkel, was vorhin nicht der Fall war.

Ueberhaupt können die Gleichungen 1) bis 4) auf alle Curven angewendet werden, deren Polargleichungen unter einer der Formen

$$r^\mu = \alpha + \beta \cos\vartheta \quad \text{oder} \quad r^\mu = \alpha + \beta \cos 2\vartheta$$

enthalten sind.

O. Schlömilch.

III. Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen.

Obgleich der Satz, dass die beiden unendlichen Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots,$$
$$1\,u_1 + 2\,u_2 + 4\,u_4 + 8\,u_8 + 16\,u_{16} + \ldots$$

gleichzeitig convergiren oder divergiren, bereits in Cauchy's *Cours d'Analyse alg.* (1821) vorkommt, so ist derselbe bis jetzt doch ein Unicum geblieben; vielleicht gewährt deshalb der Nachweis einiges Interesse, dass beliebig viele solcher Sätze aus einer gemeinschaftlichen Quelle hergeleitet werden können.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine endlich bleibende eindeutige Function, welche von $x = a$ bis $x = \infty$ stetig abnimmt, ohne negativ zu werden, und ist ferner

$$J = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx, \tag{1}$$

so folgt nach einer bekannten Schlussweise (am einfachsten geometrisch durch Zerlegung der Fläche J in Streifen von der gleichen Breite 1)

$$J < \varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots < J + \varphi(a). \tag{2}$$

In das Integral 1) führe man statt x eine neue Variabele y ein mittelst irgend einer Substitution von der Form $x = f(y)$, so dass

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi[f(y)]\,f'(y)\,dy$$

wird, wobei $\varphi[f(y)]\,f'(y)$ kurz mit $\psi(y)$ bezeichnet werden möge. Wählt man $f(y)$ so, dass den Grenzen $x = a$, $x = \infty$ die Grenzen $y = b$, $y = \infty$ entsprechen und dass $\psi(y)$ von $y = b$ bis $y = \infty$ stetig abnimmt, ohne negativ zu werden, so hat man für

$$J = \int_b^\infty \psi(y)\,dy$$

die analoge Ungleichung

$$J < \psi(b) + \psi(b+1) + \psi(b+2) + \ldots < J + \psi(b). \tag{3}$$

Aus den Relationen 2) und 3), in denen zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{l} A = \varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots, \\ B = \psi(b) + \psi(b+1) + \psi(b+2) + \ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

sein möge, ergeben sich durch Elimination von J die neuen Ungleichungen

$$B - \psi(b) < A < B + \varphi(a), \quad A - \varphi(a) < B < A + \psi(b),$$

welche sofort erkennen lassen, dass A und B entweder gleichzeitig endlich oder gleichzeitig unendlich gross sind, dass also die Convergenz oder Divergenz der Reihen in Nr. 4) gleichzeitig stattfindet.

Beispielsweise sei $a=1$, $x=2^y$; dies giebt $b=0$, $\psi(y)=l2.2^y\varphi(2^y)$, und die beiden Reihen sind

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\ldots,$$
$$l2\{1\varphi(1)+2\varphi(2)+4\varphi(4)+8\varphi(8)+\ldots\};$$

nach Weglassung des einflusslosen Factors $l2$ und für $\varphi(n)=u_n$ hat man jetzt den anfangserwähnten Cauchy'schen Satz. Eine Erweiterung desselben entsteht für $a=1$, $x=k^y$, wo k eine ganze positive Zahl bedeutet; die beiden Reihen sind in diesem Falle

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\ldots,$$
$$1\varphi(1)+k\varphi(k)+k^2\varphi(k^2)+k^3\varphi(k^3)+\ldots$$

Die Substitution $a=1$, $x=y^2$ liefert $b=1$, $\psi(y)=2y\varphi(y^2)$, und nach Weglassung des Factors 2 folgt, dass die Reihen

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\ldots,$$
$$1\varphi(1)+2\varphi(4)+3\varphi(9)+4\varphi(16)+\ldots$$

simultan convergiren oder divergiren. Für $x=y^k$ entsteht auch hier ein etwas allgemeinerer Satz.

Ist man auf dem angegebenen Wege zu Theoremen dieser Art gelangt, so hat es meistens keine Schwierigkeit, elementare Beweise dafür zu finden.

O. SCHLÖMILCH.

IV. Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten.

Als doppelt-orthosymmetrisch werden bekanntlich Determinanten von folgender Gestalt bezeichnet:

$$1)\qquad C=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}.$$

Hierbei darf a_0 als von Null verschieden angesehen werden, da im andern Falle durch cyklische Vertauschung der Colonnen jederzeit ein nicht verschwindendes Element an die Spitze gebracht werden kann. Für die entwickelte Determinante C ist von Stern* und von Zehfuss** folgende Darstellung gegeben worden, worin α_k eine der n Wurzeln der Gleichung

$$2)\qquad x^n-1=0$$

ist:

$$3)\qquad C=\prod_{k=1}^{k=n}\left(\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i\,\alpha_k^i\right).$$

---

* Crelle's Journal, 73.

** Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrg. 7 S. 439.

Im Folgenden soll nun dieser Ausdruck auf eine von den früheren etwas verschiedene Art abgeleitet und nachher in eine wesentlich andere Gestalt umgeformt werden; schliesslich soll der neue Ausdruck direct aus 1) entwickelt werden.

Fürstenau* hat den Satz bewiesen, dass die Determinante

$$4)\qquad D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

ihren Werth nicht ändert, wenn jedes Element a_{ik} mit dem Factor ϱ^{k-i} behaftet wird, wo ϱ eine beliebige, von Null verschiedene Grösse ist.

Setzt man $\varrho = \alpha_k$ und beachtet, dass

$$5)\qquad \alpha_k^{-m} = \alpha_k^{n-m},$$

so geht C über in

$$6)\qquad C = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \alpha_k & \ldots & a_{n-1} \alpha_k^{n-1} \\ a_{n-1} \alpha_k^{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \alpha_k^{n-2} \\ a_{n-2} \alpha_k^{n-2} & a_{n-1} \alpha_k^{n-1} & \ldots & a_{n-3} \alpha_k^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 \alpha_k & a_2 \alpha_k^2 & \ldots & a_0 \end{vmatrix},$$

und hier erkennt man augenblicklich, durch Addition aller Colonnen zur ersten, dass C durch $\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \alpha_k^i$ theilbar sein muss, dass also, wenn λ einen constanten Factor bedeutet,

$$7)\qquad C = \lambda \prod_{k=1}^{k=n} \left(\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \alpha_k^i \right)$$

sein muss; man findet sofort

$$8)\qquad \lambda = 1.$$

Die Formel 7) ist nun zwar sehr elegant, allein zum praktischen Gebrauche fast gar nicht zu verwenden, da n Factoren von je n Theilsätzen zu multipliciren und ausserdem die α_k einzusetzen sind; man kann 7) indessen in einer Weise umgestalten, welche auf n binomische Factoren führt und ausserdem die eingeführten fremden Elemente, die α_k, beseitigt.

Es seien die $n-1$ Wurzeln der Gleichung

$$9)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i y^{n-1-i} = 0$$

durch $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ bezeichnet, so dass

$$10)\qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i y^{n-1-i} = a_0 \prod_{h=1}^{h=n-1} (y - \beta_h),$$

und durch die Substitution

* Crelle's Journal, 89.

11) $$y = \frac{1}{\alpha_k}$$

12) $$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \alpha_k^i = a_0 \prod_{h=1}^{h=n-1} (1 - \beta_h \alpha_k).$$

Ferner hat man

13) $$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{k=n} (x - \alpha_k)$$

und durch die Substitution

14) $$x = \frac{1}{\beta_h}$$

15) $$1 - \beta_h^n = \prod_{k=1}^{k=n} (1 - \beta_h \alpha_k).$$

Endlich

16) $$C = a_0^n \prod_{k=1}^{k=n} \prod_{h=1}^{h=n-1} (1 - \beta_h \alpha_k),$$

17) $$C = a_0^n \prod_{h=1}^{h=n-1} (1 - \beta_h^n).$$

Die Kenntniss der Wurzeln β_h ist nicht nöthig, da die Entwickelung des Products nur symmetrische Functionen dieser Wurzeln ergiebt, deren Berechnung aus den Coefficienten a_i leicht ist.

Man übersieht sofort, dass das Resultat 17) in folgender Weise ausgesprochen werden kann:

„Bildet man aus der Gleichung 9)

18) $$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i y^{n-1-i} = 0, \quad y = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}$$

die Gleichung der n^{ten} Wurzelpotenzen, nämlich

19) $$\sum_{i=0}^{i=n-1} b_i z^{n-1-i} = 0, \quad z = \beta_1^n, \beta_2^n, \dots \beta_{n-1}^n,$$

so ist

20) $$C = \sum_{i=0}^{i=n-1} b_i,$$

d. h. die doppelt-orthosymmetrische Determinante der a_i gleich der Summe der Coefficienten in der Gleichung der n^{ten} Wurzelpotenzen."

Umgekehrt kann nun C benutzt werden, um die Gleichung der n^{ten} Wurzelpotenzen darzustellen; der Coefficient b_i ist nichts Anderes, als das Aggregat aller Theilsätze der entwickelten Determinante C, in denen die Summe der Indices in beträgt.

Beispiel 1.

$$c = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad \beta_1 \beta_2 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$c = a_0^4 (1 - \beta_1^4)(1 - \beta_2^4) = a_0^4 (1 - (\beta_1^4 + \beta_2^4) + \beta_1^4 \beta_2^4),$$

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 = \frac{a_1^4 - a_0 a_1^2 a_2 + 2 a_0^2 a_2^2}{a_0^4},$$

$$c = a_0^4 + 4 a_0 a_1^2 a_2 - 2 a_0^2 a_2^2 - a_1^4 + a_2^4.$$

Beispiel 2.

$$c = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Man findet durch directe Ausrechnung

$$c = a_0^4 - 2 a_0^2 a_2^2 + a_2^4 - 4 a_0^2 a_1 a_3 + 4 a_0 a_1^2 a_2 + 4 a_0 a_2 a_3^2 - 4 a_1 a_2^2 a_3 - a_1^4 + 2 a_1^2 a_3^2 - a_3^4,$$

also lautet die Gleichung, deren Wurzeln die vierten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$ sind:

$$a_0^4 z^3 + (4 a_0 a_1^2 a_2 - 2 a_0^2 a_2^2 - 4 a_0 a_1 a_3 - a_1^4) z^2 + (a_2^4 + 4 a_0 a_2 a_3^2 - 4 a_1 a_2^2 a_3 + 2 a_1^2 a_3^2) z - a_3^4 = 0.$$

Direct kann die Formel 17) folgendermassen abgeleitet werden.

Es sei β eine der Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$, also

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \beta^{n-i-1} = 0. \tag{21}$$

Multiplicirt man in C die Colonne $1, 2, \ldots n$ je mit $\beta^n, \beta^{n-1}, \ldots \beta^0$ und addirt alle übrigen Colonnen zur letzten, so hat man, da die Elemente der $(k)^{\text{ten}}$ Zeile waren $(k = 0, 1, \ldots (n-1))$

$$a_{n-k}, \; a_{n-k+1}, \; \ldots \; a_{n-1}, \; a_0, \; \ldots \; a_{n-k-1},$$

jetzt für das n^{te} Element f der k^{ten} Zeile

$$f = \sum_{i=0}^{i=n-k-1} a_i \beta^{n-k-1-i} + \sum_{i=n-k}^{i=n-1} a_i \beta^{2n-k-1-i}. \tag{22}$$

Aus 21) folgt

$$\sum_{i=0}^{i=n-k-1} a_i \beta^{n-i-1} = -\sum_{i=n-k}^{i=n-1} a_i \beta^{n-i-1}, \tag{23}$$

$$\sum_{i=n-k}^{i=n-1} a_i \beta^{2n-k-1-i} = -\sum_{i=0}^{i=n-k-1} a_i \beta^{2n-k-i-1}, \tag{24}$$

25) $$f=\sum_{i=0}^{i=n-k-1} a_i\,\beta^{n-k-1-i}\,(1-\beta^n),$$

d. h. jedes Element der letzten Colonne wird durch $1-\beta^n$ theilbar, also

26) $$C=\lambda\prod_{h=1}^{h=n-1}(1-\beta_h^n).$$

Für $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0$ wird

27) $$C=a_0^n,\quad \beta_h=0,$$
$$\lambda=a_0^n,$$

also

28) $$C=a_0^n\prod_{h=1}^{h=n-1}(1-\beta_h^n),$$

wie früher.

Es soll nun der oben erwiesene Satz, dass für eine Gleichung $n-1^{\text{ten}}$ Grades die Gleichung der n^{ten} Wurzelpotenzen durch Entwickelung einer doppelt-orthosymmetrischen Determinante aus den Coefficienten direct gefunden werden kann, erweitert und gezeigt werden, wie für eine Gleichung p^{ten} Grades

29) $$\sum_{i=0}^{i=p} a_i\,x^{p-i}=0$$

die Gleichung der q^{ten} Wurzelpotenzen jederzeit durch eine doppelt-orthosymmetrische Determinante geliefert wird.

Es seien wieder $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_p$ die Wurzeln von 29), dann giebt

30) $$\varkappa=a_0^q\prod_{h=1}^{h=p}(1-\beta_p^q)$$

die Coefficienten der verlangten Gleichung der q^{ten} Wurzelpotenzen.

Man hat nun nach 15)

31) $$\varkappa=a_0^q\prod_{h=1}^{h=p}\prod_{k=1}^{k=q}(1-\beta_h\,\alpha_k),$$

wenn α_k eine der q Wurzeln der Gleichung

32) $$z^q-1=0$$

ist. Aus 12) folgt dann

33) $$a_0\prod_{h=1}^{h=p}(1-\beta_h\,\alpha_k)=\sum_{i=0}^{i=p} a_i\,\alpha_k^i,$$

34) $$\varkappa=\prod_{k=1}^{k=q}\left(\sum_{i=0}^{i=p} a_i\,\alpha_k^i\right).$$

Dies ist, wie der Vergleich mit 7) augenblicklich lehrt, wenn man noch 32) berücksichtigt, eine doppelt-orthosymmetrische Determinante q^{ten} Grades, deren Elemente sind

$$a_0 + a_q + a_{2q} + \cdots, \quad a_1 + a_{q+1} + a_{2q+1} + \cdots, \quad a_2 + a_{q+2} + a_{2q+2} + \cdots$$
u. s. f.

Für $q > p$ sind a_{p+1}, a_{p+2} etc. gleich Null zu nehmen.

Entwickelt man nun die Determinante $\varkappa$ und sammelt die Theilsätze, in denen die Summe der Indices $i.q$ ist, so bildet das Aggregat den Coefficienten von y^{p-i}, wenn ursprünglich zu setzen war

$$x = \sqrt[q]{y}.$$

Beispiel 1. Man soll für

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

die Gleichung der dritten Wurzelpotenzen bilden, also $p = 4$, $q = 3$.

Die Determinante lautet nun

$$\varkappa = \begin{vmatrix} a_0 + a_3 & a_1 + a_4 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 & a_0 + a_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \varkappa &= (a_0 + a_3)^3 + a_2^3 + (a_1 + a_4)^3 - 3 a_2 (a_1 + a_4)(a_0 + a_3) \\ &= a_0^3 + 3 a_0^2 a_3 + 3 a_0 a_3^2 + a_3^3 + a_2^3 + a_1^3 + 3 a_1^2 a_4 + 3 a_1 a_4^2 + a_4^3 \\ &\quad - 3 a_0 a_1 a_2 - 3 a_0 a_2 a_4 - 3 a_1 a_2 a_3 - 3 a_2 a_3 a_4. \end{aligned}$$

Die verlangte Gleichung lautet also

$$\begin{aligned} & a_0^2 y^4 + (a_1^3 + 3 a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2) y^3 \\ & + (a_2^3 + 3 a_0 a_3^2 + 3 a_1^2 a_4 - 3 a_0 a_2 a_4 - 3 a_1 a_2 a_3) y^2 \\ & + (a_3^3 + 3 a_1 a_4^2 - 3 a_2 a_3 a_4) y + a_4^3 = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 2. Man soll für

$$a_0 x^2 + a_1 x + a^2 = 0$$

die Gleichung der vierten Wurzelpotenzen ableiten; $p = 2$, $q = 4$,

$$\varkappa = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$\varkappa = a_0^4 - a_1^4 + a_2^4 - 2 a_0^2 a_2^2 + 4 a_0 a_1^2 a_2.$$

Die Gleichung ist

$$a_0^4 y^2 + (4 a_0 a_1^2 a_2 - a_1^4 - 2 a_0^2 a_2^2) y + a_2^4 = 0.$$

Die Gleichung der q^{ten} Wurzelpotenzen kann übrigens auch direct in Determinantenform vermittelst des gewöhnlichen Eliminationsprocesses erhalten werden. Ist

$$\sum_{i=0}^{i=p} a_i x^{p-i} = 0 \tag{35}$$

vorgelegt, so werde zunächst $x = \frac{1}{z}$ eingeführt; bildet man dann die Ausdrücke

$$36)\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_q z^q + a_{2q} z^{2q} + \ldots = a_0 + a_q y + a_{2q} y^2 + \ldots = u_0, \\ a_1 z + a_{q+1} z^{q+1} + a_{2q+1} z^{2q+1} + \ldots \\ \qquad \ldots = (a_1 + a_{q+1} y + a_{2q+1} y^2 + \ldots) z = u_1 y^{\frac{1}{q}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q-1} z^{q-1} + a_{2q-1} z^{2q-1} + a_{3q-1} z^{3q-1} + \ldots \\ \qquad \ldots = (a_{q-1} + a_{2q-1} y + a_{3q-1} y^2 + \ldots) z^{q-1} = u_{q-1} y^{\frac{b-1}{q}}, \end{array}\right.$$

wo $z = y^{\frac{1}{q}}$, so hat man das System von q Gleichungen

$$37)\left\{\begin{array}{l} u_0 + u_1 y^{\frac{1}{q}} + u_2 y^{\frac{2}{q}} + \ldots + u_{q-1} y^{\frac{q-1}{q}} = 0, \\ u_{q-1} y + u_0 y^{\frac{1}{q}} + u_2 y^{\frac{2}{q}} + \ldots + u_{q-2} y^{\frac{q-1}{q}} = 0, \\ u_{q-2} y + u_{q-1} y . y^{\frac{1}{q}} + u_0 y^{\frac{2}{q}} + \ldots + u_{q-3} y^{\frac{q-1}{q}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 y + u_2 y . y^{\frac{1}{q}} + u_3 y . y^{\frac{2}{q}} + \ldots + u_0 y^{\frac{q-1}{q}} = 0 \end{array}\right.$$

und daraus als Gleichung der q^{ten} Wurzelpotenzen sofort, in völliger Analogie mit der Ableitung von 34), wenn dann y durch $\frac{1}{w}$ ersetzt wird,

$$38)\quad \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{q-2} & u_{q-1} \\ u_{q-1} y & u_0 & u_1 & \ldots & u_{q-3} & u_{q-2} \\ u_{q-2} y & u_{q-1} y & u_0 & \ldots & u_{q-4} & u_{q-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_2 y & u_3 y & u_4 y & \ldots & u_0 & u_1 \\ u_1 y & u_2 y & u_3 y & \ldots & u_{q-1} y & u_0 \end{vmatrix} = 0.$$

So wäre für das früher behandelte Beispiel $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ die Gleichung der dritten Wurzelpotenzen direct gegeben durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_3 y & a_1 + a_4 y & a_2 \\ a_2 y & a_0 + a_3 y & a_1 + a_4 y \\ (a_1 + a_4 y) y & a_2 y & a_0 + a_3 y \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_0 w + a_3 & a_1 w + a_4 & a_2 w \\ a_2 & a_0 w + a_3 & a_1 w + a_4 \\ a_1 w + a_4 & a_2 w & a_0 w^2 + a_3 w \end{vmatrix} = 0.$$

Dorpat, September 1880. Dr. K. Weihrauch.

V. Aufgabe.

Man soll einen Punkt M so bestimmen, dass die Summe seiner Abstände von n gegebenen Punkten ein Minimum wird.

Den speciellen Fall, wo $n = 3$, findet man gelöst in Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, Bd. I, § 34 S. 159. Die Coordinaten

der gegebenen Punkte seien der Reihe nach $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_p, y_p, z_p; \ldots x_n, y_n, z_n$; die des Punktes M ξ, η, ζ, so ist seine Entfernung vom Punkte P

$$d_p = \sqrt{(\xi - x_p)^2 + (\eta - y_p)^2 + (\zeta - z_p)^2}.$$

Die Summe der Entfernungen ist

$$s = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_p + \ldots + d_n.$$

Die Variabeln ξ, η, ζ sind so zu bestimmen, dass s ein Minimum wird; sie müssen also die Gleichungen erfüllen

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{\xi - x_1}{d_1} + \frac{\xi - x_2}{d_2} + \frac{\xi - x_3}{d_3} + \ldots + \frac{\xi - x_p}{d_p} + \ldots + \frac{\xi - x_n}{d_n} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = \frac{\eta - y_1}{d_1} + \frac{\eta - y_2}{d_2} + \frac{\eta - y_3}{d_3} + \ldots + \frac{\eta - y_p}{d_p} + \ldots + \frac{\eta - y_n}{d_n} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \zeta} = \frac{\zeta - z_1}{d_1} + \frac{\zeta - z_2}{d_2} + \frac{\zeta - z_3}{d_3} + \ldots + \frac{\zeta - z_p}{d_p} + \ldots + \frac{\zeta - z_n}{d_n} = 0.$$

$\frac{\xi - x_p}{d_p}$ ist der Cosinus des Winkels, den der Strahl PM mit der X-Axe bildet. Die erste Gleichung drückt die Bedingung aus, dass die Summe der Cosinusse der Winkel, den die Strahlen AM, BM etc. mit der X-Axe bilden, gleich 0 sein soll. Tragen wir also auf den Strahlen AM, BM etc. von M aus gleiche Stücke ab, so ist die Summe der Projectionen dieser Stücke auf die Coordinatenaxen gleich 0. Denkt man sich also in der Richtung jedes Strahles die Kraft F angebracht, so werden sich diese Kräfte das Gleichgewicht halten, welche Eigenschaft des Punktes M sein ihn bestimmendes Merkmal ist.

Es fällt nun leicht, mittelst dieser Lösung specielle Beispiele herzuleiten; im Besondern ergiebt sich sogleich, dass, wenn die Zahl der Punkte gleich 3 ist, die Strahlen MA, MB, MC unter 120^0 zu einander geneigt sein müssen, dass ferner für das ebene Viereck der Schnittpunkt der Diagonalen der Punkt M ist.

Basel. G. Schaertlin, Stud. math.

VI. Ueber die Constitution der Elemente.

Dr. Ciamician in Wien gelangt durch spectralanalytische Untersuchungen und mittelst der Hypothese, dass homologe Spectra auf eine homologe Zusammensetzung deuten, zu folgenden Resultaten:

Die Spectren der Elemente Kohlenstoff, Bor und Magnesium sind einander vollständig homolog. Die drei genannten Elemente bestehen daher aus gleicher Materie, die sich in verschiedenen Condensationsstufen befindet, welche in der Verschiebung der homologen Linien Ausdruck findet. Die Atomgewichte von Bor und Kohlenstoff stehen einander nahe; Magnesium ist $24 = 2.12$.

Die Spectren von Silicium und Aluminium sind unter einander homolog, und zwar entspricht die brechbarere Seite dem Spectrum der Kohle, die minder brechbare jenem des Sauerstoffspectrums. — Silicium besteht daher aus Kohlenstoff und Sauerstoff, entsprechend dem Atomgewichte $12 + 16 = 28$. — Das Aluminium enthält den Kohlenstoff in der Form des Bors (vielleicht des Berylliums) und Sauerstoff, wie sein Atomgewicht $27 = 11 + 16$ andeutet.

Die Elemente der Gruppe der Erdalkalimetalle haben Spectra, deren brechbarer Theil dem Spectrum des Magnesiums und deren minder brechbarer Theil jenem der Spectren der Elemente der Sauerstoffreihe entspricht. Daher bestehen Calcium, Strontium und Baryum aus Kohlenstoff in der Form des Magnesiums und Sauerstoff in den Condensationsformen des Schwefels, Selens und Tellurs, entsprechend den Atomgewichten $Ca = 24 + 16$, $Sr = 24 + 4.16$, $Ba = 24 + 7.16$.

Die Elemente der Gruppe des Sauerstoffs bestehen alle aus gleicher Materie, die sich in verschiedenen Stadien der Condensation befindet, welche in der Verschiebung der homologen Liniengruppen im Spectrum Ausdruck findet. Die Atomgewichte der Elemente dieser Reihe sind $O = 16$, $S = 16 + 1.16$, $Se = 16 + 4.16$, $Te = 16 + 7.16$.

Die Halogene bestehen alle aus Fluor und aus Sauerstoff in verschiedenen Formen der Condensation, die Atomgewichte der Elemente dieser Gruppe: $Cl = 19 + 16$, $Br = 19 + 4.16$, $J = 19 + 7.16$ drücken dieselben Beziehungen aus.

Die Spectren der Elemente der Stickstoffgruppe sind im minder brechbaren Theile mit jenem des Stickstoffsspectrums, im brechbareren Antheil mit jenem der Spectren der Elemente der Sauerstoffgruppe homolog. Dem entsprechend würden die Elemente der Stickstoffgruppe aus Stickstoff und Sauerstoff in verschiedenen Condensationsstufen bestehen, was auch mit den Atomgewichten $N = 14$, $P = 14 + 16$, $As = 14 + 4.16$, $Sb = 14 + 7.16$ übereinstimmt.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.)

Zu Artikel I dieses Heftes bemerke ich, dass Gleichung 11) S. 10 statt in der dort angedeuteten, weniger einfachen und evidenten, besser in der Weise abgeleitet wird, dass man, da $d\lambda - \frac{d\alpha}{2}$ stets positiv ist, das Integral $= \int \left(d\lambda - \frac{d\alpha}{2}\right)$ mal einem Mittelwerth von V resp. auf den Bögen AD, BD und ACB setzt.

W. Veltmann.

IV.

Ueber die Variationen n^{ter} Ordnung.

Von

G. Erdmann,

Gymnasiallehrer in Insterburg.

Hierzu Taf. II Fig. 1—8.

§ 1. Voraussetzungen über die Eigenschaften des gegebenen Integrals.

Es sei das Maximum oder Minimum zu suchen von

$$V=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,y,y')\,dx,$$

wo $y'=\frac{dy}{dx}$; ich setze ferner analog meinen Abhandlungen diese Zeitschrift XXII, 5 und XXIII, 6:

$$a_{mn}=\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m\,\partial y'^n}\,\varphi(x,y,y'),\qquad a'_{mn}=\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m\,\partial y'^n}\,\varphi(x,y,y').$$

Dann muss die Differentialgleichung

$$1)\qquad a_{10}=a'_{01}$$

erfüllt werden. Die Grenzen von y seien gegeben und werden mit y_0 und y_1 bezeichnet. — Jetzt mache ich folgende Voraussetzungen, unter denen allein meine Entwickelungen Giltigkeit besitzen:

1. Die Gleichung 1) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, ihre Lösung enthält also zwei von einander unabhängige Integrationsconstanten.

Ausgeschlossen ist hiermit der Fall, in welchem die Function $\varphi(x,y,y')$ die Form $\psi_1(x,y)+y'\psi_2(x,y)$ hat, weil dann 1) keine Differentialgleichung wäre.

2. Sämmtliche Grössen a_{mn} werden, wenn ich für y den aus 1) sich ergebenden Werth einsetze, Functionen von x, die zwischen den Integrationsgrenzen endlich und stetig sind.
3. Bezeichne ich die Integrationsconstanten mit c_1 und c_2, so bleiben alle Differentialquotienten von y und y'

nach c_1 und c_2 von der Form $\frac{\partial^{m+n} y}{\partial c_1^m \partial c_2^n}$ und $\frac{\partial^{m+n} y'}{\partial c_1^m \partial c_2^n}$ endlich.

§ 2. Ableitung einer wichtigen Relation.

Bezeichne ich jetzt $\frac{\partial y}{\partial c_1}$ mit r_1 und $\frac{\partial y}{\partial c_2}$ mit r_2, setze $\alpha r_1 + \beta r_2 = u$ und $\alpha^1 r_1 + \beta^1 r_2 = u^1$, wo α, β, α^1, β^1 Constanten sind, deren Determinante nicht verschwindet, so ergiebt die Differentiation von 1) nach c_1 resp. c_2

$$2) \qquad (a_{20} - a'_{11}) r - a'_{02} r' - a_{02} r'' = 0,$$

welche Gleichung sowohl für $r = u$, als auch für $r = u^1$ giltig sein muss. Setze ich jetzt $\frac{u^1}{u} = p$ und substituire in 2) für r successive u und pu, so komme ich auf die Gleichung

$$3) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{A}{a_{02} u^2},$$

wo A eine Constante ist; und zwar muss A von 0 verschieden sein, weil sonst $\frac{dp}{dx} = 0$, also $\frac{u^1}{u}$ und folglich auch $\frac{r_2}{r_1}$ eine Constante sein müsste, was der Voraussetzung 1) widerspricht.

§ 3. Ableitung eines Ausdrucks für $\frac{\partial^n V}{\partial c^n}$.

Jetzt denke ich mir die beiden Integrationsconstanten der Differentialgleichung 1) zunächst nur der Bedingung unterworfen, dass y für den Anfangswerth $x = x_0$ den Werth y_0 annimmt. Dann lässt sich mit Hilfe dieser beiden Anfangswerthe die eine Constante durch die andere ausdrücken, und der aus 1) sich ergebende Ausdruck für y enthält nur noch eine der beiden Integrationsconstanten, die ich mit c bezeichne. Jetzt erst denke ich mir c so bestimmt, dass auch der Endwerth von y der gegebene, nämlich y_1 wird. Wenn dann c variirt, so bleibt der Anfangswerth von y ungeändert, während der Endwerth y_1 sich ändert. Es werden somit alle Differentialquotienten von y nach c für $x = x_0$ verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen kann ich offenbar

$$\frac{dy}{dc} = \alpha r_1 + \beta r_2 = u, \quad \frac{dy'}{dc} = \alpha r'_1 + \beta r'_2 = u'$$

setzen und erhalte dann

$$\frac{d\varphi(x, y, y')}{dc} = a_{10} u + a_{01} u'$$

und mit Anwendung von 1)

$$\frac{d\varphi(x, y, y')}{dc} = \frac{d}{dx}(a_{01}u).$$

Diese Gleichung $n-1$-mal nach c differentiirt, ergiebt

$$4)\qquad \frac{d^n\varphi(x, y, y')}{dc^n} = \frac{d}{dx}\,\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}(a_{01}u),$$

und integrirt

$$5)\qquad \frac{d^nV}{dc^n} = \left|\frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}(a_{01}u)\right|_0^1,$$

wo rechts in dem zwischen den Strichen stehenden Ausdruck für x der Reihe nach x_0 und x_1 einzusetzen und das Resultat der ersten Substitution von dem der zweiten abzuziehen ist. Da nun u ebenso, wie seine Differentialquotienten nach c für $x = x_0$ verschwindet, so habe ich

$$\frac{d^nV}{dc^n} = \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}}(a_{01}u),$$

wo $x = x_1$ zu setzen ist.

§ 4. Ueber den Begriff der Variation.

Bei Bildung der Variationen von V gehe ich von der Euler'schen Auffassung aus, nach welcher y als Function von x und einem Parameter α zu betrachten ist. Zwar ist, z. B. von Herrn Jellett, eine andere Theorie entwickelt worden, die auf folgender Argumentation beruht: „Man kann jeden Zuwachs, welchen y erhält, sich dargestellt denken durch $i\psi(x)$, wo $\psi(x)$ eine beliebige Function von x und i eine von x unabhängige Grösse ist, so dass für y einzusetzen ist $y + i\psi(x)$. Soll nun für eine bestimmte Function y von x das Integral V ein Minimum haben, so muss, wenn ich $y + i\psi(x)$ anstatt y einsetze, V ein Minimum in Bezug auf i für den Werth $i = 0$ haben, und wenn ein solches Minimum für jede beliebige Function $\psi(x)$ stattfindet, so hat das Integral für jede beliebige Aenderung von y ein Minimum." Indessen hat diese Schlussweise nur Giltigkeit, wo es sich um die Untersuchung der ersten Variation handelt. Bei den höheren Variationen lässt sich keineswegs jeder Zuwachs von y durch $i\psi(x)$ ausdrücken. Bei Untersuchung der ersten Variation wird nämlich nur eine einzige neue Curve betrachtet, in welche die ursprüngliche übergeht; bei Untersuchung der höheren Variationen dagegen kommen mehrere neue Curven in Betracht. Die Ordinaten der ersteren lassen sich durch $y + i\psi(x)$ ausdrücken; um aber die der folgenden Curven auszudrücken, dazu gehören ganz neue Functionen von x.

Die Jellett'sche Schlussweise hat zur Folge, dass $\delta^{\varkappa}y = 0$ gesetzt wird, sobald $\varkappa > 1$. Dass dies bei Untersuchung der vierten Variation unzulässig ist, habe ich in dieser Zeitschrift XXII, 5 an einem geometrischen Beispiel gezeigt. Wir sehen an diesem Beispiel, dass eine

Curve sich in einer Weise ändern kann, die von der obigen Methode nicht berücksichtigt wird.

Dagegen lässt sich jede denkbare Abänderung von y in der Weise herstellen, dass die Function von x einen Parameter α erhält, welcher sich ändert. Setze ich dann $\delta^\varkappa y = \frac{\partial^\varkappa y}{\partial \alpha^\varkappa} d\alpha^\varkappa$, $\delta^\varkappa y' = \frac{\partial^\varkappa y'}{\partial \alpha^\varkappa} d\alpha^\varkappa$, so habe ich

$$\delta^n V = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\, dx\, d\alpha^n$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \varphi(x, y, y')\, dx\, d\alpha^n,$$

was jedenfalls richtig sein muss, sobald nur sämmtliche Differentialquotienten von $\varphi(x, y, y')$ nach y und y' zwischen den Integrationsgrenzen endlich bleiben, was ja die zweite der Voraussetzungen des § 1 ist.

Um also $\delta^n V$ zu bilden, habe ich den n^{ten} Differentialquotienten von $\varphi(x, y, y')$ nach α zu entwickeln.

§ 5. Allgemeine Entwickelung der höheren Differentialquotienten der Functionen von Functionen.

Ich werde mich jetzt zunächst mit folgender allgemeiner Aufgabe zu beschäftigen haben: y und y' sind beliebige Functionen von α, $\psi(y, y')$ eine Function von y und y'; es sind die höheren Differentialquotienten von $\psi(y, y')$ nach α zu entwickeln.

Hierfür gilt folgendes Gesetz, wenn ich unter $\mu!$ das Product aller Zahlen von 1 bis μ, und, wenn $\mu = 0$, die Zahl 1 verstehe:

$$6) \quad \frac{d^n}{d\alpha^n} \psi(y, y') = \sum C_n \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n + q_1 + \cdots + q_n}}{\partial^{p_1 + \cdots + p_n} y\, \partial^{q_1 + \cdots + q_n} y'} \psi(y, y') \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{d^n y}{d\alpha^n}\right)^{p_n} \left(\frac{dy'}{d\alpha}\right)^{q_1} \cdots,$$

wo

$$C_n = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!\, q_1! \ldots q_n!\, (1!)^{p_1 + q_1} (2!)^{p_2 + q_2} \ldots (n!)^{p_n + q_n}}$$

ist und für die p und q alle ganzen positiven Zahlen von 0 an zu setzen sind, welche der Bedingungsgleichung genügen

$$p_1 + q_1 + 2(p_2 + q_2) + \cdots + n(p_n + q_n) = n.$$

Ich habe dieses Gesetz durch die Methode der Induction gefunden; dass es für $n = 1$ richtig ist, ist leicht zu sehen, denn für diesen Fall geht die Gleichung 6) über in

$$\frac{d}{d\alpha} \psi(y, y') = \psi'(y) \frac{dy}{d\alpha} + \psi'(y') \frac{dy'}{d\alpha}.$$

Um zu erweisen, dass das Gesetz, wenn es für den n^{ten} Differentialquotienten gilt, auch für den $n+1^{\text{ten}}$ Giltigkeit hat, differentiire ich Gleichung 6) nach α. Zunächst ist klar, dass der Ausdruck für $\frac{d^{n+1}}{d\alpha^{n+1}}\psi(y, y')$ folgende Form haben muss:

$$7)\quad \frac{d^{n+1}}{d\alpha^{n+1}}\psi(y, y') = \sum C_{n+1}\frac{\partial^{\pi_1+\pi_2+\ldots+\varkappa_1\ldots}}{\partial y^{\pi_1+\cdots}\,\partial y'^{\varkappa_1+\cdots}}\psi(y, y')\cdot\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^{\pi_1}\cdots\left(\frac{dy'}{d\alpha}\right)^{\varkappa_1}\cdots,$$

wo die Summe in Bezug auf die π und $\varkappa$ zu nehmen ist und C_{n+1} einen nur von n und den π und $\varkappa$ abhängigen Coefficienten bezeichnet. Zu bestimmen ist erstens dieser Coefficient und zweitens die zwischen den π und $\varkappa$ herrschende Bedingungsgleichung.

Die Gleichung 7) entsteht durch vollständige Differentiation von 6) nach α; ich nehme mir daher, um den Coefficienten C_{n+1} zu bestimmen, ein gewisses Glied der Summe 7) heraus, welches zunächst keinen höheren Differentialquotienten von y und y' enthalten möge, als den n^{ten}, und untersuche, aus welchen Gliedern der Formel 6) dasselbe hervorgehen kann. Zunächst kann es aus einem Gliede dieser Formel dadurch entstanden sein, dass der Factor $\frac{\partial^{p_1+\cdots q_1+\cdots}}{\partial y^{p_1+\cdots}\,\partial y'^{q_1+\cdots}}\psi(y, y')$ noch einmal nach y differentiirt und der Exponent von $\frac{dy}{d\alpha}$ um 1 vermehrt worden ist; es ist also $\pi_1 = p_1 + 1$ und $p_1 = \pi_1 - 1$ zu setzen, während die übrigen p und q den entsprechenden π und $\varkappa$ gleich sind; der von diesem Gliede herrührende Coefficient wird daher

$$8)\quad \frac{n!}{(\pi_1-1)!\,\pi_2!\ldots\pi_n!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_n!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1-1}\,(2!)^{\pi_2+\varkappa_2}\ldots(n!)^{\pi_n+\varkappa_n}}.$$

Ebenso gut erhalte ich auch ein Glied von der verlangten Form, wenn ich den Exponenten von $\frac{dy'}{d\alpha}$ um 1 vermehre, also $\varkappa_1 = q_1 + 1$ setze. Dann bekomme ich den Coefficienten

$$9)\quad \frac{n!}{\pi_1!\,\pi_2!\ldots(\varkappa_1-1)!\,\varkappa_2!\ldots(1!)^{\pi_1+\varkappa_1-1}\,(2!)^{\pi_2+\varkappa_2}\ldots}.$$

Es kann aber auch ein Glied der Summe 7) dadurch entstehen, dass in einem Gliede der Summe 6) ein beliebiger anderer Factor, etwa $\frac{d^\nu y}{d\alpha^\nu}$, differentiirt wird; dann ist der Exponent von $\frac{d^\nu y}{d\alpha^\nu}$ um 1 zu vermindern und der des folgenden Factors $\frac{d^{\nu+1}y}{d\alpha^{\nu+1}}$ um 1 zu vermehren, worauf dann das ganze Glied mit p_ν zu multipliciren ist; da ich in diesem Falle $p_\nu = \pi_\nu + 1$ und $p_{\nu+1} = \pi_{\nu+1} - 1$ zu setzen habe, während die übrigen p und q den entsprechenden π und $\varkappa$ gleich sind, so erhalte ich folgenden Coefficienten:

$$\frac{n!\,(\pi_\nu+1)}{\pi_1!\ldots(\pi_\nu+1)!\,(\pi_{\nu+1}-1)!\ldots\varkappa_1!\ldots(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(\nu!)^{\pi_\nu+\varkappa_\nu+1}\,(\nu+1)!^{\pi_{\nu+1}+\varkappa_{\nu+1}-1}\ldots}$$

$$10) \quad = \frac{n!\,\pi_{\nu+1}(\nu+1)}{\pi_1!\ldots\pi_n!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_n!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(n!)^{\pi_n+\varkappa_n}}.$$

Da ich auch die p mit den q und die π mit den $\varkappa$ zu vertauschen habe, so erhalte ich noch den Coefficienten

$$11) \quad \frac{n!\,\varkappa_{\nu+1}(\nu+1)}{\pi_1!\ldots\pi_n!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_n!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(n!)^{\pi_n+\varkappa_n}}.$$

Dann habe ich alle Entstehungsarten eines Gliedes in Betracht gezogen.

Wie man sieht, fallen auch die Ausdrücke 8) und 9) unter die Formen 10) und 11), wenn man in letzteren $\nu=0$ setzt. Ich habe also, um den Coefficienten C_{n+1} zu erhalten, die Ausdrücke 10) und 11) für alle Werthe von ν zu summiren. Es ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass $\pi_1+\varkappa_1+2(\pi_2+\varkappa_2)\ldots=n+1$ sein muss; somit erhalte ich

$$C_{n+1}=\frac{(n+1)!}{\pi_1!\ldots\pi_n!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_n!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(n!)^{\pi_n+\varkappa_n}}$$

oder

$$12) \quad C_{n+1}=\frac{(n+1)!}{\pi_1!\ldots\pi_{n+1}!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_{n+1}!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(n+1!)^{\pi_{n+1}+\varkappa_{n+1}}},$$

da, wie wir bis jetzt vorausgesetzt haben, π_{n+1} und $\varkappa_{n+1}$ gleich 0 sind.

Nur zwei Glieder enthält die Formel 7), bei welchen diese Voraussetzung nicht zutrifft, nämlich $\frac{\partial}{\partial y}\psi(y,y')\frac{d^{n+1}y}{d\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial}{\partial y'}\psi(y,y')\frac{d^{n+1}y'}{d\alpha^{n+1}}$. Beide haben den Coefficienten 1, was gleichfalls mit der Gleichung 12) übereinstimmt.

Ich erhalte folglich

$$\frac{d^{n+1}}{d\alpha^{n+1}}\psi(y,y')$$

$$=\sum C_{n+1}\frac{\partial^{\pi_1+\ldots+\pi_{n+1}+\varkappa_1+\ldots+\varkappa_{n+1}}}{\partial y^{\pi_1}\ldots\partial y'^{\varkappa_1}\ldots}\psi(y,y')\cdot\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^{\pi_1}\ldots\left(\frac{dy'}{d\alpha}\right)^{\varkappa_1}\ldots,$$

wo

$$C_{n+1}=\frac{(n+1)!}{\pi_1!\ldots\pi_{n+1}!\,\varkappa_1!\ldots\varkappa_{n+1}!\,(1!)^{\pi_1+\varkappa_1}\ldots(n+1)^{\pi_{n+1}+\varkappa_{n+1}}}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n+1}\nu\,(\pi_\nu+\varkappa_\nu)=n+1,$$

und somit ist das Gesetz von n zu $n+1$ erwiesen.

§ 6. Ueber die verschiedenen Werthe, die die Grössen $\frac{d^{\mathfrak{m}}y}{dc^{\varkappa}}$ erhalten können.

Bevor ich dies Gesetz auf die Umformung der n^{ten} Variation von V anwende, werde ich noch zeigen, dass den Differentialquotienten von y nach der Constanten eine gewisse Willkürlichkeit anhaftet, indem die-

selben verschiedene Werthe erhalten können je nach der Form, die man dem Ausdruck für y giebt. Setzt man nämlich statt c eine beliebige Function $\chi(c)$, die ich mit c' bezeichnen will, so kann man, um den n^{ten} Differentialquotienten von y nach c zu bilden, die Gleichung 6) anwenden, welche sich für diesen Fall vereinfachen lässt. Man erhält dann

$$13)\qquad \frac{d^n y}{dc^n} = \sum B\, \frac{d^{p_1+\dots+p_n} y}{dc'^{p_1+\dots+p_n}} \cdot \left(\frac{dc'}{dc}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{d^n c'}{dc^n}\right)^{p_n}$$

für $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu p_\nu = n$ und $B = \dfrac{n!}{p_1! \dots p_n!\,(1!)^{p_1} \dots (n!)^{p_n}}$.

Diese Formel giebt mir, wenn ich aus einer beliebigen Form des Ausdrucks für y die Grössen $\dfrac{dy}{dc'}, \dots \dfrac{d^n y}{dc'^n}$ abgeleitet habe, den allgemeinen Ausdruck für den n^{ten} Differentialquotienten von y nach der Constanten. Die Ausdrücke $\dfrac{dc'}{dc}, \dfrac{d^2 c'}{dc^2}, \dots$ haben dabei ganz beliebige Werthe. Denke ich mir den ersten $n-1$ dieser Grössen bestimmte Werthe gegeben, so sind damit die ersten $n-1$ Differentialquotienten von y nach der Constanten bestimmt. Der n^{te} bleibt aber noch unbestimmt, weil $\dfrac{d^n c'}{dc^n}$ noch willkürlich ist. Diese letztere Grösse kommt in 13) mit $\dfrac{dy}{dc'}$ multiplicirt vor. Es folgt hieraus, dass, wenn ich mit $u_\varkappa$ den allgemeinen Ausdruck für den $\varkappa^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von y nach der Constanten bezeichne,

$$14)\qquad u_n = \frac{du_{n-1}}{dc} + \gamma u$$

zu setzen ist, wo γ eine beliebige Constante bezeichnet.

Der erste Differentialquotient u enthält einen willkürlichen constanten Factor. — Zu erwähnen ist noch, dass in den Fällen, die wir in Betracht zu ziehen haben, u für die Grenze x_1 verschwindet, wie ich später zeigen werde. Die Grenzwerthe der Grössen $u_\varkappa$ sind also, sobald u bestimmt ist, auch vollkommen bestimmt und nicht so willkürlich, wie die Werthe an den anderen Stellen.

§ 7. Bestimmung des Falles, in welchem die höheren Variationen zu untersuchen sind.

Da nach § 4 die Variationen durch Differentiation nach einem Parameter $\varkappa$ entstehen, so kann ich Gleichung 6) auf die Bildung der n^{ten} Variation anwenden. Ich erhalte dann

$$15)\qquad \delta^n \varphi(x, y, y') = \Sigma C_n\, a_{p_1+\dots+q_1+\dots}\, \delta y^{p_1}\, \delta^2 y^{p_2} \dots \delta y'^{q_1} \dots,$$

wo $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu(p_\nu + q_\nu) = n$.

So haben wir für $n=2$

16) $\delta^2\varphi(x,y,y') = a_{20}\,\delta y^2 + 2a_{11}\,\delta y\,\delta y' + a_{02}\,\delta y'^2 + a_{10}\,\delta^2 y + a_{01}\,\delta^2 y'$.

Mit Hilfe der Differentialgleichung 1) erhalte ich für eine beliebige Variable z, wenn $z=gu$ gesetzt wird,

17) $a_{20}z^2 + 2a_{11}zz' + a_{02}z'^2 = a_{02}g'^2u^2 + \frac{d}{dx}\left[a_{11}g^2u^2 + a_{02}g^2uu'\right]$.

Diese Transformation ist giltig, so lange die Substitution $z=gu$ erlaubt ist, d. h. so lange u weder verschwindet, noch unendlich wird. Das Letztere ist schon durch die Voraussetzungen des § 1 ausgeschlossen. Ich nehme jetzt auch an, dass u zwischen den Integrationsgrenzen nicht verschwindet.*

Da das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[a_{10}\,\delta^2 y + a_{01}\,\delta^2 y'\right]dx$$

vermöge der Differentialgleichung des Problems verschwindet, so erhalte ich aus 16) und 17), wenn ich $\delta y = \varepsilon z$ setze, wo ε eine unendlich kleine Constante ist,

$$\delta^2 V = \varepsilon^2\int_{x_0}^{x_1} a_{02}\,g'^2u^2\,dx.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die zweite Variation immer positiv sein muss, wenn a_{02} stets positiv ist.** Dass sie für geeignete Werthe von δy verschwindet, ohne jedoch negativ zu werden, ist erstens dann möglich, wenn g' gleich Null, also g gleich einer von Null verschiedenen Constanten gesetzt werden kann. Dies ist aber, da gu für beide Grenzen verschwinden muss, wiederum nur dann möglich, wenn u auch für $x=x_1$ verschwindet. — Zweitens würde die zweite Variation dann verschwinden, wenn a_{02} identisch gleich Null wäre. Dass nämlich a_{02} nur für einen einzelnen Punkt verschwindet, ist unmöglich, denn aus Gleichung 3) folgt, dass dann $uu^{1'} - u^1u'$ unendlich werden müsste, welchen Fall wir ausgeschlossen haben.

Wir betrachten von den genannten beiden Fällen, in welchen die zweite Variation verschwinden, aber nicht negativ werden kann, in welchen also die höheren Variationen zu untersuchen sind, nur den ersteren, nehmen also an, dass a_{02} stets >0 und dass $\frac{dy}{dc}$ für $x=x_1$ verschwin-

---

* Wenn nämlich u zwischen den Integrationsgrenzen verschwindet, so kann die zweite Variation ihr Zeichen wechseln; die höheren Variationen können somit dann nicht in Betracht kommen, wie u. A. in meiner Abhandlung diese Zeitschrift XXIII, 6 gezeigt ist.

** Natürlich gilt das ganz Entsprechende, wenn a_{02} stets negativ ist.

det, während es zwischen den Grenzen x_0 und x_1 überall von 0 verschieden bleibt. Die Substitution $z = gu$ ist unter diesen Umständen statthaft; denn $\frac{z}{u}$ ist zwischen den Integrationsgrenzen endlich, und dass es für die Grenzen selbst auch endlich bleibt, erhellt aus folgender Betrachtung. Für die Grenzen wird $\frac{z}{u} = \frac{z'}{u'}$, als Bruch, dessen Zähler und Nenner verschwindet. Nun ergiebt sich aus Gleichung 3)

$$u u^{1\prime} - u' u^1 = \frac{A}{a_{02}}.$$

Hieraus folgt, dass u und u' nicht gleichzeitig verschwinden können, da sonst entweder $A = 0$ oder $a_{02} = \infty$, oder u^1 oder $u^{1\prime}$ unendlich werden müsste, alles Fälle, welche wir ausgeschlossen haben. Da auch z' nicht unendlich werden darf, so bleibt $\frac{z'}{u'}$, folglich auch $\frac{z}{u}$ an den Grenzen ebenfalls endlich. Hiermit dürfte der Einwand, welcher* gegen die genannte Substitution gemacht worden ist, erledigt sein.

§ 8. Die Regel für das Stattfinden eines Minimums.

$\delta^2 V$ wird nur durch die Substitution $\delta y = \varepsilon u$ zum Verschwinden gebracht, wo ε eine unendlich kleine Constante bezeichnet. Ich werde also die dritte Variation untersuchen müssen, indem ich für δy den angegebenen Werth einsetze, die höheren Variationen von y dagegen beliebig sein lasse, abgesehen von der Bedingung, dass sie für die Grenzen verschwinden müssen. Nur wenn für alle beliebigen Werthe von $\delta^2 y$ und $\delta^3 y$ die dritte Variation verschwindet, kann ein Minimum stattfinden. Dies wird, wie ich nachweisen werde, dann der Fall sein, wenn $\frac{d^2 y_1}{dc^2} = 0$. Tritt dieser Fall ein, so hängt das Stattfinden eines Minimums wiederum davon ab, dass die vierte Variation stets positiv ist, und dies wird nur dann eintreten, wenn $\frac{d^3 y_1}{dc^3}$ und $\frac{dy'_1}{dc}$ verschiedenes Zeichen haben. Verschwindet $\frac{d^3 y_1}{dc^3}$, so kann die vierte Variation nicht negativ werden, wohl aber verschwinden; und zwar tritt das Letztere nur für solche Werthe von $\delta^2 y$ ein, die sich unter die Form $\varepsilon^2 u_2$ bringen lassen, wo u_2 ebenso, wie im § 6, den allgemeinen Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten von y nach der Constanten bezeichnet. Ueberhaupt gilt folgendes Gesetz:

Wenn alle Differentialquotienten von y nach c bis zum $2m - 2^{\text{ten}}$ für die obere Grenze x_1 verschwinden, so hängt das Stattfinden eines

* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1877 S. 279.

Minimums von dem Zeichen der $2m^{\text{ten}}$ Variation ab, indem die $2m-1$ ersten Variationen von V zum Verschwinden gebracht werden können, wenn $\delta^{\varkappa} y = \varepsilon^{\varkappa} u_{\varkappa}$ gesetzt wird für jedes $\varkappa$, welches kleiner als m ist. Die $2m^{\text{te}}$ Variation von V wird für alle beliebigen Werthe der Variationen $\delta^m y$, $\delta^{m+1} y, \ldots$ nur dann > 0 sein, wenn $\frac{d^{2m-1} y}{d c^{2m-1}}$ und $\frac{dy'}{dc}$ für $x = x_1$ verschiedenes Zeichen haben. Verschwindet $\frac{d^{2m-1} y_1}{d c^{2m-1}}$, so kann auch die $2m^{\text{te}}$ Variation zum Verschwinden gebracht werden, und zwar nur durch solche Werthe von $\delta^m y$, welche sich auf die Form $\varepsilon^m \frac{d^m y}{d c^m}$ bringen lassen; für alle übrigen ist $\delta^{2m} V > 0$. —

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, werde ich zunächst die rechte Seite von 15) umformen, indem ich den Variationen von y die oben angegebenen Werthe ertheile.

§ 9. Transformation der n^{ten} Variation.

Es ist klar, dass in dem Ausdrucke 15) für $\delta^n \varphi(x, y, y')$ die Variationen $\delta^h y$ und $\delta^h y'$, wo ich $h > \frac{n}{2}$ annehme, nicht in einer höheren Potenz, als der ersten, und ebenso wenig miteinander multiplicirt vorkommen können, und dass alle Variationen von y, mit denen $\delta^h y$ oder $\delta^h y'$ multiplicirt ist, höchstens von dem Grade $n-h$ sein können.

Denke ich mir jetzt für alle Variationen $\delta^{\varkappa} y$ und $\delta^{\varkappa} y'$, bei denen $\varkappa < \frac{n}{2}$, eingesetzt $\delta^{\varkappa} y = \varepsilon^{\varkappa} u_{\varkappa}$ und $\delta^{\varkappa} y' = \varepsilon^{\varkappa} u'_{\varkappa}$, während die höheren Variationen beliebig bleiben, so wird der Factor von $\delta^h y$ folgender sein:

$$18)\quad \varepsilon^{n-h} . \sum \frac{n!}{p_1! \ldots p_{n-h}!\, q_1! \ldots q_{n-h}!\, (1!)^{p_1+q_1} \ldots (n-h)!^{p_{n-h}+q_{n-h}} . h!} \\ \times a_{p_1+\ldots+p_{n-h}+1,\, q_1+\ldots+q_{n-h}} . u^{p_1} \ldots u_{n-h}^{p_{n-h}} . u'^{q_1} \ldots u'^{q_{n-h}}_{n-h},$$

und der von $\delta^h y'$:

$$19)\quad \varepsilon^{n-h} . \sum \frac{n!}{p_1! \ldots p_{n-h}!\, q_1! \ldots q_{n-h}!\, (1!)^{p_1+q_1} \ldots (n-h)!^{p_{n-h}+q_{n-h}} . h!} \\ \times a_{p_1+\ldots+p_{n-h},\, q_1+\ldots+q_{n-h}+1} . u^{p_1} \ldots u_{n-h}^{p_{n-h}} . u'^{q_1} \ldots u'^{q_{n-h}}_{n-h},$$

wo $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-h} \varkappa (p_{\varkappa} + q_{\varkappa}) = n-h.$

Mit Benutzung von 6), wo ich c für α einzusetzen habe, gehen diese Ausdrücke über in

$$20)\quad \varepsilon^{n-h} \frac{n!}{(n-h)!\, h!} \frac{d^{n-h}}{d c^{n-h}} a_{10}$$

und

21) $$\varepsilon^{n-h} \frac{n!}{(n-h)!\,h!} \frac{d^{n-h}}{dc^{n-h}} a_{01}.$$

Diese Ausdrücke, mit $\delta^h y$, resp. $\delta^h y'$ multiplicirt, sind Glieder in der Entwickelung von $\delta^n \varphi(x, y, y')$.

Nehmen wir jetzt noch an, dass n ungerade ist, so sind diese Glieder die einzigen, in welchen sich $\delta^n \varphi(x, y, y')$ bei den genannten Werthen der $\delta^\varkappa y$ von $\varepsilon^n \frac{d^n}{dc^n} \varphi(x, y, y')$ unterscheidet; ich werde also haben, wenn ich $n = 2m-1$ setze:

$$\delta^{2m-1} \varphi(x, y, y') = \varepsilon^{2m-1} \frac{d^{2m-1}}{dc^{2m-1}} \varphi(x, y, y')$$
$$+ \sum_{h=m}^{h=2m-1} \varepsilon^{2m-h-1} \left(\delta^h y - \varepsilon^h \frac{d^h y}{dc^h}\right) . \frac{(2m-1)!}{h!\,(2m-h-1)!} \frac{d^{2m-h-1}}{dc^{2m-h-1}} a_{10}$$
$$+ \sum_{h=m}^{h=2m-1} \varepsilon^{2m-h-1} \left(\delta^h y' - \varepsilon^h \frac{d^h y'}{dc^h}\right) . \frac{(2m-1)!}{h!\,(2m-h-1)!} \frac{d^{2m-h-1}}{dc^{2m-h-1}} a_{01},$$

und mit Berücksichtigung von 1) und 4)

$$\delta^{2m-1} \varphi(x, y, y') = \varepsilon^{2m-1} \frac{d}{dx} \frac{d^{2m-2}}{dc^{2m-2}} (a_{01} u)$$
$$+ \frac{d}{dx} \sum_{h=m}^{h=2m-1} \frac{(2m-1)!}{h!\,(2m-h-1)!} . \varepsilon^{2m-h-1} \left(\delta^h y - \varepsilon^h \frac{d^h y}{dc^h}\right) . \frac{d^{2m-h-1}}{dc^{2m-h-1}} a_{01}.$$

Hieraus folgt, da $\delta^h y$ für die Grenzen verschwindet,

22) $$\delta^{2m-1} V = \varepsilon^{2m-1} \frac{d^{2m-2}}{dc^{2m-2}} (a_{01} u) - \varepsilon^{2m-1} \sum_{h=m}^{h=2m-1} \frac{(2m-1)!}{h!\,(2m-h-1)!} . u_h . \frac{d^{2m-h-1}}{dc^{2m-h-1}} a_{01}.$$

Ist n gerade und gleich $2m$, so sind noch alle diejenigen Glieder zu betrachten, in welchen $\delta^m y$, resp. $\delta^m y'$ vorkommt. Diese Variationen kommen nämlich nicht nur in der ersten Potenz, sondern auch im Quadrat und mit einander multiplicirt vor und sollen unserer Annahme gemäss sich nicht unter die Form $\varepsilon^m u_m$ bringen lassen. Aus ähnlichen Betrachtungen, wie im vorigen Falle, ergiebt sich, dass man die Factoren der ersten Potenzen $\delta^m y$ und $\delta^m y'$ erhält, wenn man in den Formeln 18) und 19) $2m$ für n und m für h einsetzt; nur muss man von den so entstehenden Ausdrücken alle diejenigen Glieder abziehen, in welchen u_m, resp. u'_m vorkommt. Es wird daher der Coefficient von $\delta^m y$ folgender sein:

$$\varepsilon^m \sum \frac{(2m)!}{p_1! \ldots p_m!\, q_1! \ldots q_m!\, (1!)^{p_1+q_1} \ldots (m!)^{p_m+q_m} . m!}$$
$$\times a_{p_1+\ldots+1,\, q_1+\ldots+q_m} . u^{p_1} \ldots u_m^{p_m} . u'^{q_1} \ldots u'^{q_m}_m - \varepsilon^m . \frac{(2m)!}{(m!)^2} [a_{20} u_m + a_{11} u'_m],$$

wo $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \varkappa(p_\varkappa + q_\varkappa) = m.$

Es wird daher mit Berücksichtigung von 6) der Factor von $\delta^m y$, wenn ich für $\delta^\varkappa y$, sobald $\varkappa < m$, einsetze $\varepsilon^\varkappa u_\varkappa$:

$$\varepsilon^m \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2}\left[\frac{d^m a_{10}}{dc^m} - a_{20} u_m - a_{11} u'_m\right],$$

und ebenso der Factor von $\delta^m y'$:

$$\varepsilon^m \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2}\left[\frac{d^m a_{01}}{dc^m} - a_{11} u_m - a_{02} u'_m\right].$$

Die Glieder mit der zweiten Potenz werden sein:

$$\frac{(2m)!}{2.(m!)^2}[a_{20}\, \delta^m y^2 + 2 a_{11}\, \delta^m y\, \delta^m y' + a_{02}\, \delta^m y'^2].$$

Da die Factoren von $\delta^h y$ und $\delta^h y'$, sobald $h > m$, durch die Formeln 20) und 21) gegeben werden, so werde ich, ähnlich wie für ein ungerades n, folgenden Ausdruck für die $2m^{\text{te}}$ Variation erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta^{2m}\varphi(x, y, y') = {} & \varepsilon^{2m}\frac{d^{2m}}{dc^{2m}}\varphi(x, y, y') \\
& + \frac{d}{dx}\sum_{h=m+1}^{h=2m}\frac{(2m)!}{h!\,(2m-h)!}\,\varepsilon^{2m-h}\frac{d^{2m-h}a_{01}}{dc^{2m-h}}(\delta^h y - \varepsilon^h u_h) \\
& + \frac{(2m)!}{(m!)^2}\varepsilon^m\frac{d^m a_{10}}{dc^m}(\delta^m y - \varepsilon^m u_m) + \frac{(2m)!}{(m!)^2}\varepsilon^m\frac{d^m a_{01}}{dc^m}(\delta^m y' - \varepsilon^m u'_m) \\
& - \frac{(2m)!}{(m!)^2}\varepsilon^m[a_{20} u_m(\delta^m y - \varepsilon^m u_m) \\
& \qquad + a_{11}(u'_m(\delta^m y - \varepsilon^m u_m) + u_m(\delta^m y' - \varepsilon^m u'_m)) \\
& \qquad + a_{02} u'_m(\delta^m y' - \varepsilon^m u'_m)] \\
& + \frac{(2m)!}{2(m!)^2}[a_{20}(\delta^m y^2 - \varepsilon^{2m} u^2_m) + 2 a_{11}(\delta^m y\, \delta^m y' - \varepsilon^{2m} u_m u'_m) \\
& \qquad + a_{02}(\delta^m y'^2 - \varepsilon^{2m} u'^2_m)],
\end{aligned}$$

woraus sich ergiebt

$$\begin{aligned}
\delta^{2m}\varphi(x, y, y') = {} & \varepsilon^{2m}\frac{d}{dx}\,\frac{d^{2m-1}}{dc^{2m-1}}(a_{01} u) \\
& + \frac{d}{dx}\sum_{h=m}^{h=2m}\frac{(2m)!\,\varepsilon^{2m-h}}{h!\,(2m-h)!}\,\frac{d^{2m-h}a_{01}}{dc^{2m-h}}\cdot(\delta^h y - \varepsilon^h u_h) \\
& + \frac{(2m)!\,e^m}{2(m!)^2}\,[a_{20}(\delta^m y - \varepsilon^m u_m)^2 + 2 a_{11}(\delta^m y - \varepsilon^m u_m)(\delta^m y' - \varepsilon^m u'_m) \\
& \qquad + a_{02}(\delta^m y' - \varepsilon^m u'_m)^2].
\end{aligned}$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn ich $\delta^m y - \varepsilon^m u_m = \varepsilon^m v_m$ setze,

$$23)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^{2m} V = {} & \varepsilon^{2m}\frac{d^{2m-1}}{dc^{2m-1}}(a_{01} u) - \sum_{h=m}^{h=2m}\frac{(2m)!\,\varepsilon^{2m}}{h!\,(2m-h)!}u_h\frac{d^{2m-h}a_{01}}{dc^{2m-h}} \\
& + \varepsilon^{2m}\frac{(2m)!}{2(m!)^2}\int_{x_0}^{x_1}[a_{20} v^2_m + 2 a_{11} v_m v'_m + a_{02} v'^2_m]\,dx,
\end{aligned}\right.$$

wo ausserhalb des Integralzeichens $x = x_1$ zu setzen ist.

§ 10. Inductionsbeweis des in § 8 dargestellten Gesetzes.

Die Formeln 22) und 23) geben uns die Transformation der $2m-1^{\text{ten}}$ und $2m^{\text{ten}}$ Variation eines Integrals, vorausgesetzt, dass alle Variationen bis zur $m-1^{\text{ten}}$ incl. gleich sind dem entsprechenden Differentialquotienten von y nach c, multiplicirt mit der betreffenden Potenz von ε. Nehmen wir an, dass $u=0$ für $x=x_1$, dass somit die zweite Variation unter der Voraussetzung $\delta y=\varepsilon u$ verschwindet, so habe ich die dritte Variation zu untersuchen, und zwar für $\delta y=\varepsilon u$, so dass die Bedingung erfüllt ist, unter welcher sich Formel 22) anwenden lässt. Dieselbe ergiebt mir, wenn ich $m=2$ setze,

$$\begin{aligned}\delta^3 V &= \varepsilon^2 \frac{d^2}{dc^2}(a_{01}u) - 3\varepsilon^3 u_2 \frac{d a_{01}}{dc} - \varepsilon^3 u_3\, a_{01} \\ &= \varepsilon^3 . \left| a_{21}u^3 + 2a_{12}u^2u' + a_{02}uu'_2 + a_{03}uu'^2 - a_{02}u'u_2 \right|_{x=x_1}.\end{aligned}$$

Da u unserer Voraussetzung zufolge für die Grenze verschwindet, so wird $\delta^3 V = -\varepsilon^3 a_{02}u'u_2$ sein.

Da, wie wir oben § 7 gesehen haben, der Fall $u'=0$ ausgeschlossen ist, so kann die dritte Variation nur dann verschwinden, wenn u_2 für die obere Grenze gleich 0 ist. In meiner oben erwähnten Abhandlung* habe ich den Fall $u'=0$ in § 10 behandelt; da jedoch, wie ich jetzt gesehen habe, dieser Fall ein unmöglicher ist, so waren die betreffenden Betrachtungen überflüssig.

Demnach ist nur in dem Falle, dass u_2 für $x=x_1$ verschwindet, die vierte Variation zu untersuchen und zu diesem Zwecke in der Formel 23) $m=2$ zu setzen. Da in dieser Formel u und u_2 für $x=x_1$ verschwinden und die Glieder mit u_4 sich wegheben, so ist $-\varepsilon^4 a_{02}u'u_3$ das einzige Glied ausserhalb des Integralzeichens, welches nicht verschwindet. Wir haben also

$$24)\qquad \delta^4 V = -\varepsilon^4 a_{02}u'u_3 + 3\varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} (a_{20}v_2^2 + 2a_{11}v_2v'_2 + a_{02}v'^2_2)\,dx,$$

wo $\varepsilon^2 v_2 = \delta^2 y - \varepsilon^2 u_2$. Da somit v_2 für die Grenzen verschwindet, so ist aus den im § 7 entwickelten Gründen die Substitution $v_2 = gu$ gestattet, und mit Hilfe von 17) erhalte ich

$$25)\qquad \delta^4 V = -\varepsilon^4 a_{02}u'u_3 + 3\varepsilon^4 \int_{x_0}^{x_1} a_{02}g'^2u^2\,dx,$$

wo $\varepsilon^2 gu = \delta^2 y - \varepsilon^2 u_2$.

Es folgt daraus, dass ein Minimum nur stattfinden kann, wenn u_3 und u' für die obere Grenze verschiedenes Zeichen haben, und dass die vierte Variation zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn u_3 ver-

* Diese Zeitschrift XXII, 5.

schwindet; nämlich dadurch wird sie zum Verschwinden gebracht, dass g gleich einer Constanten α, also $\delta^2 y = \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 \alpha u$ wird. Wenn ich nun Gleichung 14) berücksichtige, nach welcher u_2 schon eine willkürliche Constante enthält, so sehe ich, dass ich unbeschadet der Allgemeinheit behaupten kann, $\delta^2 y$ muss gleich $\varepsilon^2 u_2$ werden, wenn die vierte Variation verschwinden soll. Hiermit ist mein Lehrsatz für $m = 2$ bewiesen. —

Ich habe jetzt noch nachzuweisen, dass das Gesetz, wenn es für einen gewissen Werth von m giltig ist, auch für $m+1$ gilt.

Es mögen somit alle Differentialquotienten von y nach c bis zum $2m-1^{\text{ten}}$ für die Grenze verschwinden; und es mögen, unserem Gesetze zufolge, die $2m$ ersten Variationen von V dadurch und nur dadurch zum Verschwinden gebracht werden, dass $\delta^\varkappa y = \varepsilon^\varkappa \dfrac{d^\varkappa y}{dc^\varkappa}$ gesetzt wird für jedes $\varkappa$, welches nicht grösser als m ist, während die höheren Variationen beliebig bleiben. Dann sind die Bedingungen erfüllt, unter denen ich die Gleichungen 22) und 23) anwenden darf, wenn ich $m+1$ für m einsetze. Da unserer Annahme zufolge alle Glieder der rechten Seite in 22) verschwinden bis auf das Glied $-\varepsilon^{2m} a_{02} u' u_{2m}$, so kann $\delta^{2m+1} V$ nur verschwinden, wenn u_{2m} für die Grenze verschwindet. In diesem Falle werden in Gleichung 23), wenn ich $m+1$ für m einsetze, alle Glieder ausserhalb des Integralzeichens verschwinden oder sich wegheben, mit Ausnahme des Gliedes $-a_{02} u' u_{2m+1}$. Ich werde also haben

$$26)\quad \begin{aligned} \delta^{2m+2} V = &- \varepsilon^{2m+2} a_{02} u' u_{2m+1} + \varepsilon^{2m+2} \frac{(2m+1)!}{2[(m+1)!]^2} \\ &\times \int_{x_0}^{x_1} (a_{20} v^2_{m+1} + 2 a_{11} v_{m+1} v'_{m+1} + a_{02} v'^2_{m+1})\, dx, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon^{m+1} v_{m+1} = \delta^{m+1} y - \varepsilon^{m+1} u_{m+1}$. Da v_{m+1} für die Grenzen verschwindet, so kann ich Gleichung 26) mit Hilfe von 17) umformen in

$$27)\quad \delta^{2m+2} V = - \varepsilon^{2m+2} a_{02} u' u_{2m+1} + \varepsilon^{2m+2} \frac{(2m+1)!}{2[(m+1)!]^2} \int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2\, dx,$$

wo $\varepsilon^{m+1} g u = \delta^{m+1} y - \varepsilon^{m+1} u_{m+1}$.

Das Integral kann nur dadurch zum Verschwinden gebracht werden, dass g gleich einer Constanten β ist, dass also $\delta^{m+1} y - \varepsilon^{m+1} u_{m+1} = \varepsilon^{m+1} \beta u$; sonst ist es grösser als 0. Es müssen demnach u' und u_{2m+1} für die Grenze verschiedene Zeichen haben, wenn ein Minimum stattfinden soll. Zum Verschwinden wird die $2m+2^{\text{te}}$ Variation dann gebracht werden können, wenn u_{2m+1} für die Grenze gleich 0 ist; sie wird nämlich dann verschwinden, wenn $\delta^{m+1} y = \varepsilon_{m+1}(u_{m+1} + \beta u)$ oder, was nach 14) dasselbe ist, wenn $\delta^{m+1} y = \varepsilon^{m+1} u_{m+1}$ gesetzt wird. Hiermit ist unser Gesetz für $m+1$ bewiesen. —

Wenn somit $u_\varkappa$ der erste Differentialquotient von y nach c ist, der für $x = x_1$ nicht verschwindet, so findet ein Minimum nur dann statt, wenn $\varkappa$ ungerade ist und $u_\varkappa$ ein anderes Zeichen hat, als u'.

Wenn alle Differentialquotienten von y nach c für die obere Grenze verschwinden, so ist es klar, dass auch alle Variationen von V zum Verschwinden gebracht werden können. Dann kann die Curve, welche der Differentialgleichung des Problems genügt, so geändert werden, dass der Werth von V ungeändert bleibt; es wird somit ein eigentliches Minimum nicht stattfinden, wiewohl keine Aenderung der Curve den Werth von V vermindert.

§ 11. Geometrische Bedeutung des Gesetzes.

Die Bedingungen für das Stattfinden eines Minimums stehen in einer Beziehung zur Enveloppe der Curve. Ist nämlich

$$28) \qquad y = \psi(x, c)$$

die Gleichung der Curve, und betrachte ich c als Parameter, so erhalte ich die Gleichung der Enveloppe, indem ich mir die Gleichung

$$29) \qquad \psi'(c) = 0$$

bilde und aus 28) und 29) c eliminire. Die Gleichung 29) aber wird für denjenigen Punkt der Curve stattfinden, für welchen $u = 0$, für welchen also die zweite Variation verschwindet. Wir haben also folgendes, schon von Jacoby* gefundene Gesetz:

Denkt man sich von dem gegebenen Anfangspunkte aus eine Schaar solcher Curven gezogen, welche der Differentialgleichung des Problems genügen, so schneidet die Enveloppe dieser Curvenschaar jede Curve in dem Punkte, von welchem an ein Minimum stattzufinden aufhört.

Aus der Gleichung 29) folgt für die Coordinaten der Enveloppe

$$\frac{dx}{dc} = -\frac{\psi''(c)}{\psi''(c, x)}.$$

Da für die obere Grenze

$$\psi''(c) = \frac{d^2y}{dc^2},$$

so wird $\frac{d^2y}{dc^2}$ und somit nach unseren Lehrsätzen die dritte Variation dann verschwinden, wenn $\frac{dx}{dc}$ verschwindet. Da in diesem Falle $\psi''(c) = 0$, so werden wir haben

$$\frac{d^2x}{dc^2} = -\frac{\psi'''(c)}{\psi''(c, x)}.$$

---

* Crelle's Journ., Bd. 17.

Soll die vierte Variation positiv sein, so muss, wie gezeigt worden ist, u_3 verschiedenes Zeichen haben, wie u'; diese Bedingung kommt also darauf hinaus, dass $\frac{d^2 x}{d c^2}$ positiv ist. Verschwindet $\frac{d^2 x}{d c^2}$ und somit auch u_3, so wird auch die vierte Variation verschwinden. Ueberhaupt können wir sagen: Verschwinden die $\varkappa$ ersten Differentialquotienten von x nach c, so verschwinden auch die $\varkappa + 1$ ersten Differentialquotienten von y nach c und somit die $\varkappa + 2$ ersten Variationen von V. Ein Minimum wird nur dann stattfinden können, wenn $\varkappa$ ungerade $= 2n - 1$ ist und wenn $\frac{d^{2n} x}{d c^{2n}}$ positiv ist, weil in diesem Falle u_{2n} und u' verschiedenes Zeichen haben.

Wir sehen somit, dass ein Minimum für den Punkt, in welchem die Enveloppe die Curve schneidet, nur dann stattfinden kann, wenn die Abscisse der Enveloppe für diesen Punkt ein Minimum hat, also in den Fig. 1 und 2 dargestellten Fällen, wo A und B die gegebenen Endpunkte der gesuchten Curve und die unterbrochene Linie die Enveloppe bedeutet; dagegen nicht in den Fällen Fig. 3, 4, 5, 6.

Verschwinden alle Differentialquotienten von y nach c, so verschwinden auch alle Differentialquotienten von x nach c, und die Enveloppe wird zu einem Punkte; dann erhalte ich eine Schaar von Curven, welche ein Minimum geben (Fig. 7).

§ 12. Anwendung auf ein Problem der Mechanik.

Um ein Beispiel anzuführen, will ich das schon von Jacoby erwähnte Problem des Princips der kleinsten Wirkung für die elliptische Bewegung der Planeten betrachten.

Wir nehmen demgemäss an, dass ein beweglicher Körper von einem festen umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung angezogen wird und dass der Anfangspunkt und Endpunkt seiner Bewegung, sowie seine Anfangsgeschwindigkeit gegeben sei; ferner soll der Körper gezwungen sein, sich auf einer ebenen Curve zu bewegen. Dann soll diejenige Gestalt dieser Curve gefunden werden, für welche die Summe der lebendigen Kräfte, also das Integral $V = \int_{x_0}^{x_1} v^2\, dt$ oder $\int_{x_0}^{x_1} v\, ds$, ein Minimum wird, wobei v die Geschwindigkeit, t die Zeit und s den Bogen bezeichnet.

Bedeutet $\varkappa^2$ die Anziehungskraft, lege ich den Coordinatenanfangspunkt in den anziehenden Körper und bezeichne mit x, y die rechtwinkligen, mit r, φ die Polarcoordinaten, so erhalte ich, wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 x}{r^3} + \lambda f'(x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 y}{r^3} + \lambda f'(y),$$

und daher, wenn h eine Constante ist,

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\varkappa^2}{r} + h.$$

Setze ich $\frac{dr}{d\varphi} = r'$, so wird $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}.\,d\varphi$ und unser Integral geht in folgendes über:

$$V = \sqrt{2}.\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\frac{(\varkappa^2 + hr)(r^2 + r'^2)}{r}}.\,d\varphi,$$

wo dann φ die unabhängige, r die abhängige Variable und φ_0, φ_1 die Grenzwerthe der ersteren bezeichnen.

Dies Problem führt auf folgende Differentialgleichung:

$$\sqrt{\frac{r^3(\varkappa^2 + hr)}{r^2 + r'^2}} = C,$$

$$\varphi = \int \frac{C\,dr}{r\sqrt{hr^2 + \varkappa^2 r - C^2}} = arccos\left[\frac{2C^2 - \varkappa^2 r}{r\sqrt{4C^2h + \varkappa^4}}\right] + \alpha,$$

$$r = \frac{2C^2}{\varkappa^2 + cos(\varphi - \alpha).\sqrt{4C^2h + \varkappa^4}}.$$

Wenn ich jetzt

$$h = \mp\frac{\varkappa^2}{2a}, \quad C^2 = \frac{+\varkappa^2(a^2 - e^2)}{2a}$$

setze, wo beide Male das obere Zeichen gilt, wenn h negativ, und das untere, wenn h positiv ist, so erhalte ich

$$r = \pm\frac{a^2 - e^2}{a - e\,cos(\varphi - \alpha)},$$

die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem h negativ oder positiv ist. Da die grosse Axe a nur von den gegebenen Grössen h und $\varkappa^2$ abhängt, so sind e und α als die beiden Integrationsconstanten zu betrachten. Die kleine Axe der Curve heisse b.

Um die zweite Variation zu untersuchen, beachte ich zunächst, dass a_{02} in diesem Problem, wie überhaupt in allen Problemen des Princips der kleinsten Wirkung, stets positiv bleibt. Es sind also nur noch die Differentialquotienten der abhängigen Variablen nach den Integrationsconstanten zu untersuchen. Zu diesem Zwecke denke ich mir jetzt die Polarcoordinaten des Anfangspunktes, r_0 und φ_0, als fest, so dass dadurch ein Abhängigkeitsverhältniss zwischen e und α entsteht. Ich habe

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \pm\frac{a^2 cos(\varphi - \alpha) - 2ae + e^2 cos(\varphi - \alpha)}{[a - e\,cos(\varphi - \alpha)]^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \pm\frac{(a^2 - e^2)\,e\,sin(\varphi - \alpha)}{[a - e\,cos(\varphi - \alpha)]^2}.$$

Zunächst ist klar, dass keiner dieser Ausdrücke zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird. Wenn Herr Prof. Mayer in seiner Abhandlung: „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums"* behauptet, dass für dies Problem eine der Grössen r_1 und r_2 unendlich werde, so gilt das jedenfalls nicht dann, wenn Polarcoordinaten eingeführt werden. Alsdann zeigt das Problem durchaus normale Verhältnisse.

Es ist

$$30)\qquad \frac{\partial r}{\partial e}:\frac{\partial r}{\partial \alpha}=\frac{(a^2+e^2)\cos(\varphi-\alpha)-2ae}{(a^2-e^2)e\sin(\varphi-\alpha)},$$

und daher, vermöge der oben angegebenen Beziehung zwischen α und e,

$$31)\qquad \frac{d\alpha}{de}=-\frac{(a^2+e^2)\cos(\varphi_0-\alpha)-2ae}{(a^2-e^2)e\sin(\varphi_0-\alpha)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$32)\qquad \frac{dr}{de}=\frac{\partial r}{\partial e}+\frac{\partial r}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{de}$$
$$=\frac{-(a^2+e^2)\sin(\varphi-\varphi_0)+4ae\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi_0-2\alpha}{2}}{[a-e\cos(\varphi-\alpha)]^2\sin(\varphi_0-\alpha)}.$$

Die zweite Variation wird verschwinden, wenn $\frac{dr}{de}$ für den Endpunkt verschwindet. Offenbar wird dies der Fall sein, wenn der Ausdruck 30) für $\frac{\partial r}{\partial e}:\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ für den Endpunkt denselben Werth annimmt, wie für den Anfangspunkt. Betrachten wir zunächst den Fall der Hyperbel, wobei $a^2-e^2=-b^2$ zu setzen ist, so kann die Bewegung natürlich nur auf einem und demselben Zweige stattfinden; es sind also die Werthe, welche $\varphi-\alpha$ annehmen kann, in bestimmte Grenzen eingeschlossen. Der kleinste dieser Werthe, für welchen $r=\infty$ ist, liegt im ersten Quadranten, und es ist für denselben $\cos(\varphi-\alpha)=\frac{a}{e}$, also $\sin(\varphi-\alpha)=\frac{b}{e}$; der grösste Werth von $\varphi-\alpha$ liegt im vierten Quadranten und $\cos(\varphi-\alpha)$ hat denselben, $\sin(\varphi-\alpha)$ den entgegengesetzten Werth. Im ersten Falle erhält $\frac{\partial r}{\partial e}:\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ den Werth $\frac{a}{be}$, also einen positiven, nimmt dann bei zunehmendem φ zu, bis es für $\varphi-\alpha=\pi$ positiv unendlich wird, schlägt ins negativ Unendliche über und nimmt schliesslich zu bis zum Werthe $-\frac{a}{be}$. Hieraus ist ersichtlich, dass $\frac{\partial r}{\partial e}:\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ nie denselben Werth zweimal erhält, dass also für die Hyperbel immer ein Minimum stattfindet.

* Crelle's Journ., Bd. 69.

Für den Fall einer elliptischen Bewegung ist, wenn (Fig. 8) F den Ort des anziehenden Körpers, G den andern Brennpunkt der Ellipse, A den Anfangspunkt, B den Endpunkt, C einen beliebigen Punkt der Bewegung, ψ den Winkel CGF, ψ_0 den Winkel AGF bezeichnet,

$$cot\,\psi = \frac{-r\,cos(\varphi-\alpha)+2e}{r\,sin(\varphi-\alpha)} = \frac{-(a^2+e^2)\,cos(\varphi-\alpha)+2ae}{(a^2-e^2)\,sin(\varphi-\alpha)},$$

und daher nach 30) und 31)

$$33)\qquad \frac{\partial r}{\partial e}:\frac{\partial r}{\partial \alpha} = -\frac{cot\,\psi}{e},\quad \frac{d\alpha}{de} = \frac{cot\,\psi_0}{e}.$$

Hieraus folgt, dass die Summe der lebendigen Kräfte von dem Punkte an ein Minimum zu sein aufhört, in welchem $cot\,\psi$ denselben Werth annimmt, wie für den Anfangspunkt; d. h. wenn ich durch den Anfangspunkt und denjenigen Brennpunkt, in welchem der anziehende Körper nicht steht, eine gerade Linie ziehe, so giebt derjenige Punkt, in welchem diese Linie die Ellipse zum zweiten Mal trifft, die Grenze für das Stattfinden eines Minimums an.

Es fragt sich jetzt, ob für diesen Punkt selbst noch ein Minimum stattfindet. Zu diesem Zwecke habe ich $\frac{d^2r}{de^2}$ für den Punkt B zu bilden. Aus Gleichung 32) und 33) folgt, da $\frac{dr}{de}$ gleich 0 zu setzen ist,

$$34)\quad \left\{\begin{aligned} &[a-e\,cos(\varphi_1-\alpha)]^2\,sin(\varphi_0-\alpha)\,.\,\frac{d^2r}{de^2} \\ &= -2e\,sin(\varphi_1-\varphi_0)+4a\,sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\,cos\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2} \\ &\quad +4a\,sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\,sin\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}\,cot\,\psi_0.\end{aligned}\right.$$

Nun ergiebt sich aus 32), da $\frac{dr}{de}=0$ sein soll,

$$35)\qquad sin(\varphi_1-\varphi_0) = \frac{4ae}{a^2+e^2}\,sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\,cos\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}.$$

Hierdurch geht 34) über in

$$[a-e\,cos(\varphi_1-\alpha)]^2\,sin(\varphi_0-\alpha)\,.\,\frac{d^2r}{de^2}$$

$$=4a\,.\,\frac{a^2-e^2}{a^2+e^2}\,sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\,cos\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}+4a\,sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\,sin\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}\,cot\,\psi_0.$$

Soll nun $\frac{d^2r}{de^2}=0$ sein, so müssen wir haben

$$36)\qquad tan\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2} = -\frac{a^2-e^2}{a^2+e^2}\,tan\,\psi_0.$$

Wir haben aber andererseits

$$\frac{-(a^2+e^2)\cos(\varphi_1-\alpha)+2ae}{(a^2-e^2)\sin(\varphi_1-\alpha)}=\frac{-(a^2+e^2)\cos(\varphi_0-\alpha)+2ae}{(a^2-e^2)\sin(\varphi_0-\alpha)}=\cot\psi_0$$

und daher

$$\frac{-(a^2+e^2)\cos(\varphi_1-\alpha)+2ae}{(a^2-e^2)\sin(\varphi_1-\alpha)}+\frac{-(a^2+e^2)\cos(\varphi_0-\alpha)+2ae}{(a^2-e^2)\sin(\varphi_0-\alpha)}=2\cot\psi_0,$$

$$(a^2+e^2)\sin(\varphi_1+\varphi_0-2\alpha)-4ae\sin\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}$$
$$=(a^2-e^2)[-\cos(\varphi_1-\varphi_0)+\cos(\varphi_1+\varphi_0-2\alpha)]\cot\psi_0.$$

Nun folgt aus 35)

$$\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}=\frac{2ae}{a^2+e^2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2},$$

daher haben wir

$$\tan\frac{\varphi_1+\varphi_0-2\alpha}{2}=\frac{a^2-e^2}{a^2+e^2}\cot\psi_0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit 36), so sehen wir, dass die beiden Gleichungen unvereinbar sind; die dritte Variation verschwindet somit nie und es findet für den Grenzpunkt kein Minimum mehr statt.

§ 13. Anwendung auf ein zweites Problem.

Betrachten wir jetzt die Giltigkeit des Princips der kleinsten Wirkung für den Fall, dass der bewegliche Körper direct proportional der Entfernung angezogen wird. Wir haben dann

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\varkappa^2x+\lambda f'(x),\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\varkappa^2y+\lambda f'(y),\quad v^2=2h-\varkappa^2r^2,$$

und unser Problem kommt darauf hinaus, das Integral

$$V=\int\sqrt{(2h-\varkappa^2r^2)(r^2+r'^2)}\,d\varphi$$

zu einem Minimum zu machen.

Dies führt auf die Differentialgleichung

$$r^2\sqrt{\frac{2h-\varkappa^2r^2}{r^2+r'^2}}=C,\quad \int\frac{C\,dr}{\sqrt{-\varkappa^2r^6+2hr^4-C^2r^2}}=\varphi-\alpha,$$

$$\varphi-\alpha=\tfrac{1}{2}\arccos\frac{hr^2-C^2}{r^2\sqrt{h^2-\varkappa^2C^2}},$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{h-\sqrt{h^2-\varkappa^2C^2}}{C^2}\cos^2(\varphi-\alpha)+\frac{h+\sqrt{h^2-\varkappa^2C^2}}{C^2}\sin^2(\varphi-\alpha).$$

Ich erhalte also die Gleichung einer Ellipse, in deren Mittelpunkt der feste Körper steht, und dies ist dieselbe Curve, in welcher sich der Körper bewegt, wenn er frei ist.

Bezeichne ich die Axen der Ellipse mit a und b, so ist

$$a^2=\frac{C^2}{h-\sqrt{h^2-\varkappa^2C^2}},\quad b^2=\frac{C^2}{h+\sqrt{h^2-\varkappa^2C^2}}$$

und daher

$$a^2 + b^2 = \frac{2h}{\varkappa^2}.$$

Es ist also die Summe der Quadrate der beiden Axen nur abhängig von der Anziehungskraft und der Anfangsgeschwindigkeit. Setze ich

$$a^2 + b^2 = m^2,$$

so wird die Gleichung der Ellipse

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi - \alpha)}{m^2 - a^2},$$

und ich habe hier α und a als die Integrationsconstanten anzusehen.

Setze ich jetzt $\frac{1}{r^2} = R$ und $\frac{1}{r_0^{\,2}} = R_0$, so erhalte ich

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= -\frac{2\cos^2(\varphi - \alpha)}{a^3} + \frac{2a\sin^2(\varphi - \alpha)}{(m^2 - a^2)^2} \\ &= 2 . \frac{a^4 \sin^2(\varphi - \alpha) - (m^2 - a^2)^2 \cos^2(\varphi - \alpha)}{a^3(m^2 - a^2)^2}, \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \frac{(m^2 - 2a^2)\sin 2(\varphi - \alpha)}{a^2(m^2 - a^2)}, \end{aligned}$$

und hieraus, wenn $a^2 - b^2 = e^2$ gesetzt wird,

$$\frac{d\alpha}{da} = -\frac{a^4 \tan(\varphi_0 - \alpha) - b^4 \cot(\varphi_0 - \alpha)}{a b^2 e^2}, \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{da} &= \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{da} \\ &= \frac{2\left[a^4 \sin(\varphi_0 - \alpha)\sin(\varphi - \alpha) + b^4 \cos(\varphi_0 - \alpha)\cos(\varphi - \alpha)\right]}{a^3 b^4 \sin(\varphi_0 - \alpha)\cos(\varphi_0 - \alpha)} \sin(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Diese Formel ist nicht anwendbar, wenn $\varphi_0 - \alpha$ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, also gleich $\frac{\varkappa\pi}{2}$ ist. Für diese Fälle bilde ich $\frac{dR}{d\alpha}$, und da $\frac{da}{d\alpha} = 0$, so habe ich

$$\frac{a^2 b^2}{e^2} . \frac{dR}{d\alpha} = \sin 2(\varphi - \alpha), \quad \frac{a^2 b^2}{e^2} . \frac{d^2 R}{d\alpha^2} = 2\cos 2(\varphi - \alpha).$$

$\frac{dR}{d\alpha}$, also auch die zweite Variation verschwindet für $\varphi - \alpha = \frac{(\varkappa + 1)\pi}{2}$; es findet also ein Minimum nur dann statt, wenn der Körper keinen vollen Ellipsenquadranten beschreibt. Wird gerade ein solcher beschrieben, so verschwindet $\frac{d^2 R}{d\alpha^2}$ für den Grenzwerth nicht, also verschwindet auch die dritte Variation nicht, und es kann somit kein Minimum stattfinden, womit diese speciellen Fälle erledigt sind.

Für alle übrigen Fälle zeigt Gleichung 38), dass $\frac{dR}{da}$ nur verschwinden kann, wenn

39) $$\frac{a^4}{b^4} = -\cot(\varphi_0 - \alpha)\cot(\varphi - \alpha).$$

Für den Grenzwerth $\varphi = \varphi_1$ möge diese Gleichung stattfinden. Führe ich jetzt rechtwinklige Coordinaten ein und bezeichne ihre Grenzwerthe mit x_0, y_0, resp. x_1, y_1, und setze ferner $\frac{dy_0}{dx} = y'_0$, $\frac{dy_1}{dx} = y'_1$, so habe ich

40) $$\cot(\varphi_0 - \alpha) = \frac{x_0}{y_0}, \quad \cot(\varphi_1 - \alpha) = \frac{x_1}{y_1}.$$

Ferner ist vermöge der Gleichung der Ellipse

41) $$y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

und die Gleichungen 39), 40), 41) ergeben daher

42) $$y'_0 \cdot y'_1 = -1,$$

d. h.: die Tangenten der Ellipse am Anfangspunkt und Endpunkt müssen sich rechtwinklig schneiden. Innerhalb des zwischen zwei solchen Tangenten liegenden Bogens findet ein Minimum statt, weiterhin aber nicht mehr; ein Lehrsatz, welcher auch für den vorhin betrachteten speciellen Fall gilt.

Um die Bedingung zu untersuchen, unter welcher $\delta^3 V$ verschwindet, habe ich $\frac{d^2 R}{da^2}$ zu bilden. Aus 38) und 37) ergiebt sich, vorausgesetzt, dass $\frac{dR}{da}$ für $\varphi = \varphi_1$ verschwindet,

43) $$\left\{\begin{aligned} & a^3 b^4 \sin(\varphi_0 - \alpha)\cos(\varphi_0 - \alpha)\frac{d^2R}{da^2} : 2\sin(\varphi_1 - \varphi_0) \\ & = 4a^3 \sin(\varphi_0 - \alpha)\sin(\varphi_1 - \alpha) - 4ab^2\cos(\varphi_0 - \alpha)\cos(\varphi_1 - \alpha) \\ & \quad + (a^2 + b^2)\sin(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha) \cdot \frac{a^4 \tan(\varphi_0 - \alpha) - b^4 \cot(\varphi_0 - \alpha)}{ab^2}. \end{aligned}\right.$$

Soll die dritte Variation verschwinden, so muss $\frac{d^2R}{da^2}$ verschwinden.

Jetzt setze ich

44) $$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\varphi - \alpha) = \frac{x}{r}$$

und erhalte als Bedingung für das Verschwinden der dritten Variation

45) $$4a^3 y_0 y_1 - 4ab^2 x_0 x_1 = -(a^2 + b^2)(x_0 y_1 + x_1 y_0)\frac{a^4 y_0^2 - b^4 x_0^2}{ab^2 x_0 y_0}.$$

Vermöge der Gleichung der Ellipse habe ich

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot y'.$$

Nun ist, wenn die zweite Variation verschwindet, nach Gleichung 42)

$$y'_1 = -\frac{1}{y'_0},$$

ich werde also haben

$$\frac{x_0}{y_0} = -\frac{a^2}{b^2} y'_0, \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{a^2}{b^2 y'_0}.$$

Die Gleichung 45) giebt demnach

$$\left(y'_0 - \frac{1}{y'_0}\right)^2 = 4.$$

Diese Gleichung ergiebt die vier Werthe

$$46) \qquad y'_0 = \mp 1 \mp \sqrt{2}.$$

Nur für diese Werthe von y'_0 verschwindet also die dritte Variation, für alle übrigen kann kein Minimum mehr stattfinden. Hat y'_0 einen dieser Werthe, so ist die vierte Variation zu untersuchen. Diese wird positiv sein, wenn $\frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da}$ und $\frac{d^3 R}{da^3}$ verschiedenes Zeichen haben. Nun folgt aus 38), da $\frac{dR}{da}$ gleich 0 zu setzen ist,

$$\tfrac{1}{2} a^3 b^4 \sin(\varphi_0 - \alpha) \cos(\varphi_0 - \alpha) \frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da}$$

$$= a^4 \sin(\varphi_0 - \alpha) \sin(2\varphi_1 - \varphi_0 - \alpha) + b^4 \cos(\varphi_0 - \alpha) \cos(2\varphi_1 - \varphi_0 - \alpha),$$

und mit Benutzung von 39)

$$47) \qquad \frac{b^4}{2a} \cos(\varphi_0 - \alpha) \cos(\varphi_1 - \alpha) \frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da} = \sin(\varphi_1 - \varphi_0).$$

Es ergiebt sich somit, dass unter den gemachten Voraussetzungen das Zeichen von $\frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da}$ dasselbe, wie das von $\cos(\varphi_0 - \alpha)\cos(\varphi_1 - \alpha)$ ist.

Ferner folgt aus 43)

$$\frac{a^3 b^4 \sin(\varphi_0 - \alpha) \cos(\varphi_0 - \alpha)}{2 \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \frac{d^3 R}{da^3}$$

$$= 12 a^2 \sin(\varphi_0 - \alpha) \sin(\varphi_1 - \alpha) + (8a^2 - 4b^2) \cos(\varphi_0 - \alpha) \cos(\varphi_1 - \alpha)$$

$$- \left(\frac{m^2}{a^2 b^2} - \frac{2m^2}{b^4}\right) \sin(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha) [a^4 \tan(\varphi_0 - \alpha) - b^4 \cot(\varphi_0 - \alpha)]$$

$$+ \frac{m^2}{ab^2} \sin(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha) [4a^3 \tan(\varphi_0 - \alpha) + 4ab^2 \cot(\varphi_0 - \alpha)]$$

$$+ \frac{d\alpha}{da} \cdot \Big[-(4a^3 + 4ab^2) \sin(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha)$$

$$- \frac{m^2}{ab^2} \sin(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha) \left(\frac{a^4}{\cos^2(\varphi - \alpha)} + \frac{b^4}{\sin^2(\varphi - \alpha)}\right)$$

$$- \frac{2m^2}{ab^2} \cos(\varphi_1 + \varphi_0 - 2\alpha)(a^4 \tan(\varphi_0 - \alpha) - b^4 \cot(\varphi_0 - \alpha)) \Big]$$

oder

$$
48)\left\{\begin{aligned}
&\frac{a^3 b^4 \sin(\varphi_0-\alpha)}{2\cos(\varphi_1-\alpha)\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\cdot\frac{d^3 R}{da^3}\\
&= 12 a^2 \tan(\varphi_0-\alpha)\tan(\varphi_1-\alpha) + 8a^2 - 4b^2\\
&+\frac{m^2(2a^2-b^2)}{a^2 b^4}(\tan(\varphi_0-\alpha)+\tan(\varphi_1-\alpha))\,[a^4\tan(\varphi_0-\alpha)-b^4\cot(\varphi_0-\alpha)]\\
&+\frac{m^2}{ab^2}(\tan(\varphi_0-\alpha)+\tan(\varphi_1-\alpha))\,[4a^3\tan(\varphi_0-\alpha)+4ab^2\cot(\varphi_0-\alpha)]\\
&-\frac{d\alpha}{da}\cdot\Big[(\tan(\varphi_0-\alpha)+\tan(\varphi_1-\alpha))\Big(4a^3+4ab^2+\frac{a^3m^2}{b^2}\sec^2(\varphi_0-\alpha)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{b^2m^2}{a}\operatorname{cosec}^2(\varphi_0-\alpha)\Big)\\
&\qquad+\frac{2m^2}{ab^2}(1-\tan(\varphi_0-\alpha)\tan(\varphi_1-\alpha))\\
&\qquad\times(a^4\tan(\varphi_0-\alpha)-b^4\cot(\varphi_0-\alpha))\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Aus den Gleichungen 41), 42), 44) und 46) ergiebt sich

$$\tan(\varphi_0-\alpha)=\frac{b^2}{a^2}(\sqrt{2}\mp 1),\quad \tan(\varphi_1-\alpha)=\frac{b^2}{a^2}(-\sqrt{2}\mp 1),$$

und aus 37) folgt

$$\frac{d\alpha}{da}=\pm\frac{2a}{e^2}.$$

Daher erhalten wir aus 48)

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^3 b^4 \sin(\varphi_0-\alpha)}{2\cos(\varphi_1-\alpha)\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\cdot\frac{d^3R}{da^3}\\
&=-12\cdot\frac{b^4}{a^2}+8a^2-4b^2+\frac{4m^2(2a^2-b^2)}{a^2}\mp\frac{2m^2}{a^3}[4ab^2(\sqrt{2}\mp 1)+4a^3(\sqrt{2}\pm 1)]\\
&\quad\mp\frac{2a}{e^2}\Big[\mp\frac{2b^2}{a^2}\Big(4a^3+4ab^2+\frac{b^2m^2}{a}(4\mp 2\sqrt{2})+\frac{a^3m^2}{b^2}(4\pm 2\sqrt{2})\Big)\\
&\qquad\mp 4am^2\Big(1+\frac{b^4}{a^4}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

oder

$$49)\quad \frac{a^5 b^4 e^2 \sin(\varphi_0-\alpha)}{2\cos(\varphi_1-\alpha)\sin(\varphi_1-\varphi_0)}\cdot\frac{d^3R}{da^3}=32a^6+32a^4b^2+32a^2b^4+32b^6.$$

Aus Gleichung 49) folgt, da φ_0 und φ_1 in zwei aufeinanderfolgenden Quadranten liegen, dass $\frac{d^3R}{da^3}$ stets negativ ist. Erstreckt sich die Bahn unseres Körpers vom ersten bis zum zweiten Quadranten, so zeigt Gleichung 47), dass auch $\frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da}$ negativ ist; es kann also nach unseren Regeln kein Minimum stattfinden. Dasselbe gilt für den dritten und vierten Quadranten. Für den zweiten und dritten Quadranten dagegen,

ebenso wie für den vierten und ersten, hat $\frac{d^3R}{da^3}$ und $\frac{d}{d\varphi}\frac{dR}{da}$ verschiedenes Zeichen, und es findet daher ein Minimum statt.

Unser Resultat ist somit folgendes:

Wenn ein beweglicher Körper von einem festen direct proportional der Entfernung angezogen wird, so hat für seine elliptische Bewegung das Princip der kleinsten Wirkung so lange Giltigkeit, als sein Weg in dem zwischen zwei sich rechtwinklig schneidenden Tangenten liegenden Bogen enthalten ist. Erstreckt sich der Weg gerade über diesen ganzen Bogen, so ist das Princip der kleinsten Wirkung nur in dem Falle noch giltig, wenn Anfangspunkt und Endpunkt auf verschiedenen Seiten der grossen Axe liegen und ihre Tangenten mit der grossen Axe die Winkel $arctg(\sqrt{2} \pm 1)$, d. h. $22\frac{1}{2}^0$ und $67\frac{1}{2}^0$, bilden.

V.

Notiz zu einem Satze von Chasles.

Von
Ernst Lange,
Stud. math. in Dresden.

Es findet sich zuerst in *Aperçu historique* von Chasles, Note XXXIII (S. 443 der deutschen Uebersetzung von Sohncke) folgender Satz:

„Wenn die vier Seitenflächen eines beweglichen Tetraeders gezwungen sind, respective durch vier Gerade zu gehen, welche irgendwie im Raume liegen, und wenn drei Eckpunkte des Tetraeders auf drei anderen Geraden liegen sollen, welche auch irgendwie im Raume liegen, so wird die vierte Ecke des Tetraeders eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade durchlaufen."

Denselben Satz habe ich bis jetzt wiedergefunden in folgenden Werken: 1. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Theil, Art. 79 (II. Aufl. 1874); 2. Gretschel, Organische Geometrie, Schlussabschnitt über Raumcurven dritter Ordnung; 3. von Drach, Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte, S. 23; 4. Staudigl, Lehrbuch der neueren Geometrie, Aufl. von 1871, S. 362; 5. Baur, Die Raumcurven dritter Ordnung und Classe, im Programm des königl. Realgymnasiums zu Stuttgart vom Schuljahr 1874—1875.

Vielfach findet sich hierzu die Bemerkung, dass dieser Satz ein Analogon bilde zum Maclaurin'schen Satz über Erzeugung von Kegelschnitten. Es zeigt aber die einfachste Ueberlegung, dass der ganze Satz in der obigen Fassung nicht richtig ist, und die weite Verbreitung dieses Satzes veranlasst mich, durch diese Note auf das Versehen aufmerksam zu machen. In der That genügt das blosse Abzählen der Constanten, um zu sehen, dass ein Tetraeder, das den angegebenen Bedingungen genügt, überhaupt nicht existirt, geschweige denn beweglich ist: ein Tetraeder ist bestimmt durch zwölf Constante, jene sieben Geraden repräsentiren aber 14 Constante zur Bestimmung des Tetraeders.

Die folgende Ueberlegung hat einen doppelten Zweck:

1. soll sie zeigen, wie man auch durch blosse geometrische Anschauung zu der Einsicht kommen kann, dass bei allgemeiner Lage der sieben Geraden das Tetraeder nicht construirbar ist, und
2. soll sie zu solchen besonderen Lagen der sieben Geraden führen, bei welchen Beweglichkeit des Tetraeders eintritt. Wir werden sehen, dass die letzte Tetraederecke dann in der That eine Raumcurve dritter Ordnung beschreibt, die aber nicht immer eine wirkliche ist, sondern in einzelnen Beispielen zerfällt.

Es seien G_1, G_2, G_3, G_4 die vier Geraden, um welche sich die vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 des Tetraeders drehen, und L_{123}, L_{124}, L_{134} die drei weiteren Geraden, auf denen sich die Schnittpunkte der durch die Indices angezeigten Tetraederebenen fortbewegen sollen. Wir wählen einen beliebigen Punkt P_{123} auf L_{123} und legen durch ihn und durch die Geraden G_1, G_2, G_3 die Ebenen E_1, E_2, E_3 des Tetraeders. Die durch P_{123} verlaufende Schnittgerade K_{12} von E_1 und E_2 muss ein Ort für die zweite Ecke P_{124} des Tetraeders sein; es soll aber auch P_{124} auf L_{124} liegen und es müssen sich also K_{12} und L_{124} schneiden. Das wird bei allgemeiner Lage der Geraden G_1, G_2, L_{123}, L_{124} gegen einander und bei allgemeiner Lage des Punktes P_{123} auf L_{123} nicht der Fall sein. Ebenso müsste die Schnittgerade K_{13} der Ebenen E_1 und E_3 die Gerade L_{134} schneiden, da beides Orte für die dritte Ecke P_{134} des Tetraeders sind. Auch das wird bei allgemeiner Lage der Gebilde nicht der Fall sein, und aus beiden Verneinungen folgt der Schluss: das Tetraeder ist nicht construirbar.

Wenn P_{123} auf L_{123} fortrückt, beschreibt K_{12}, da es beständig an den drei Geraden G_1, G_2, L_{123} hingleitet, ein einschaliges Hyperboloid. Damit nun K_{12} beständig L_{124} treffe, muss die letztere Gerade eine Erzeugende dieses Hyperboloids sein, und zwar von der Schaar, zu welcher G_1, G_2 und L_{123} gehören. Ebenso muss, damit K_{13} beständig L_{134} treffe, diese letztere Gerade eine Erzeugende des Hyperboloids sein, welches dadurch entsteht, dass bei der Bewegung des Punktes P_{123} auf L_{123} die Gerade K_{13} beständig an den drei Geraden G_1, G_3, L_{123} hingleitet. Damit sind die Bedingungen aber noch nicht erschöpft, welchen die sieben Geraden genügen müssen, damit das Tetraeder beweglich sei. Die letzte Ebene des Tetraeders soll immer durch G_4 gehen; sie muss aber auch immer durch die Punkte P_{124} und P_{134} gehen, also muss die Verbindungslinie dieser beiden Punkte beständig G_4 schneiden. Die Gerade $P_{124}P_{134}$ liegt immer in E_1, sie schneidet also beständig G_1, L_{124}, L_{134} und bildet also bei ihrer Bewegung auch ein einschaliges Hyperboloid. Diesem muss G_4 als geradlinige Erzeugende angehören. Wir erhalten also, damit das Tetraeder beweglich sei, die Bedingung, dass gewisse Quadrupel aus den sieben Geraden

drei Hyperboloiden als Erzeugende derselben Schaar angehören, und zwar so, wie es das folgende Schema angiebt:

I. Hyperboloid: G_1 G_2 . . L_{123} L_{124} .
II. " G_1 . G_3 . L_{123} . L_{134}
III. " G_1 . . G_4 . L_{124} L_{134}.

Von sieben so gelegenen Geraden behaupten wir, dass sie sämmtlich zwei feste Gerade im Raume treffen. Das erste Hyperboloid wird von L_{134} in zwei Punkten durchstochen. Durch sie ziehen wir die beiden Erzeugenden Z_1 und Z_2 des ersten Hyperboloids, welche nicht zur Schaar G_1, G_2, L_{123}, L_{124} gehören. Diese beiden Geraden Z_1 und Z_2 schneiden dann: 1. G_1, L_{123}, L_{134} und gehören also dem zweiten Hyperboloid als Erzeugende an; 2. G_1, L_{124}, L_{134} und gehören also auch dem dritten Hyperboloid an, sie schneiden also überhaupt alle sieben Geraden. (Diese beiden Directricen Z_1 und Z_2 können getrennt sein, zusammenfallen oder imaginär sein; dem entspricht, dass jene Hyperboloide sich je in vier Geraden schneiden, in zwei Geraden schneiden und längs einer berühren, oder nur in zwei reellen Geraden schneiden.)

Unsere nächste Behauptung ist die, dass bei dieser Lage der sieben Geraden gegen einander die letzte Ecke des Tetraeders in der That eine Raumcurve dritter Ordnung durchläuft, welche Curve aber zerfällt in drei Gerade. Wir brauchen zum Beweise nur den bekannten Satz, dass je zwei von drei projectivischen Ebenenbüscheln durch die Schnittgeraden entsprechender Ebenen ein einschaliges Hyperboloid erzeugen und dass die so gebildeten drei Hyperboloide alle durch dieselbe Raumcurve dritter Ordnung gehen, die der Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechender Ebenen der Büschel ist. — Die letzte Tetraederecke ist der Schnitt von E_2, E_3, E_4. Es dreht sich E_2 um G_2 und geht beständig durch entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen L_{123} und L_{124}; ebenso dreht sich E_3 um G_3 und geht durch entsprechende Punkte von L_{123} und L_{134}, endlich dreht sich E_4 um G_4 und geht durch entsprechende Punkte von L_{124} und L_{134}. Die drei Büschel bilden sicher durch die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine Raumcurve dritter Ordnung. Die beiden Büschel E_2 und E_3 schneiden sich in einer Geraden, die beständig G_2, G_3 und L_{123} trifft, also ein Hyperboloid bildet, welches durch diese drei Geraden bestimmt ist. Entsprechendes gilt für die anderen Büschelpaare und wir haben also drei neue Hyperboloide:

IV. Hyperboloid: G_2 G_3 . L_{123} . .
V. " G_2 . G_4 . L_{124} .
VI. " . G_3 G_4 . . L_{134}.

Ihr Schnitt ist die fragliche Raumcurve dritter Ordnung. Die eben genannten beiden Geraden Z_1 und Z_2 gehören, da sie alle sieben Gerade treffen, auch diesen drei Hyperboloiden an. Die Raumcurve dritter Ordnung

besteht also aus Z_1, Z_2, und natürlich noch aus einer dritten Geraden L_{234}. Dass L_{234} die beiden anderen Geraden Z_1 und Z_2 schneiden muss, sehen wir unmittelbar ein, denn gehörten Z_1, Z_2 und L_{234} in den letzten drei Hyperboloiden zu derselben Schaar von Erzeugenden, so müssten sie identisch sein. Das bewegliche Tetraeder besteht also in zwei Fällen aus vier Ebenen, die sich in einer Geraden $[Z_1, Z_2]$ treffen; in allen übrigen Fällen liegt die letzte Ecke des Tetraeders auf einer bestimmten Geraden $[L_{234}]$. Schreiben wir in dem Schema für die letzten drei Hyperboloide diese letzte Gerade L_{234} überall noch hinzu, so erhalten wir ein Schema, welches dem ersten vollständig analog gebildet ist. Die acht Geraden bilden zwei Gruppen von je vieren, welche letzteren unter sich völlig gleichwerthig sind. Nach dem Schema für die ersten drei Hyperboloide scheint zwar G_1 unter den acht Geraden eine hervorragende Rolle einzunehmen, aber das ist nicht der Fall. Würde man das I., IV. und V. Hyperboloid zu einer Gruppe nehmen:

I.	G_2	G_1	.	.	L_{123}	L_{124}	.
IV.	G_2	.	G_3	.	L_{123}	.	L_{234},
V.	G_2	.	.	G_4	.	L_{124}	L_{234},

so würde dasselbe für G_2 zu gelten scheinen.

Diese eine Lage der sieben Geraden, welche Beweglichkeit des Tetraeders zulässt, ist darum wohl die interessanteste, weil dabei keine von den sieben Geraden eine andere schneidet. Sobald wir das gegenseitige Schneiden der Geraden zulassen, erhalten wir noch andere Fälle, in welchen das Tetraeder beweglich ist. Bei allen diesen Fällen ist der Gang der Ueberlegung genau derselbe, wie oben. Wir müssen immer darauf achten, dass die Schnittgerade von E_1 und E_2, wenn G_1, G_2 und L_{123} schon fest angenommen sind, immer L_{124} trifft, dass ebenso die Schnittgerade von E_1 und E_3 immer L_{134} trifft und dass endlich die Verbindungslinie entsprechender Punkte von L_{124} und L_{134} immer G_4 trifft. So wollen wir als Beispiel noch kurz den Fall ins Auge fassen, in welchem sich G_1 und G_2 in einem Punkte P schneiden. Wir wählen L_{123} beliebig; bei der Wanderung des Punktes P_{123} auf L_{123} erhalten wir als veränderliche Schnittgerade von E_1 und E_2 den Strahlbüschel, welcher den Schnittpunkt P von G_1 und G_2 als Centrum hat und in der Ebene liegt, die durch diesen Punkt und L_{123} bestimmt ist. Soll nun L_{124} beständig diese Schnittgerade treffen, so muss es auch in dieser Ebene liegen, muss also auch L_{123} schneiden. Wir sehen, wie das Schneiden zweier Geraden G sofort ein Schneiden zweier Geraden L nach sich zieht. Statt des ersten Hyperboloids im vorigen Falle erhalten wir jetzt ein Ebenenpaar. Das Schema wird in diesem Falle:

I. Ebenenpaar:	1. $\widehat{G_1 G_2}$	.	.	2.	$\widehat{L_{123} L_{124}}$	.	.
II. Hyperboloid:	G_1	G_3	.		L_{123}	.	L_{134},
III. „	G_1	.	G_4,		.	L_{124}	L_{134}.

Es liegen also in der ersten Ebene die Durchstichspunkte der Geraden G_3, L_{123}, L_{134} einerseits und diejenigen der Geraden G_4, L_{124}, L_{134} andererseits auf gerader Linie; ebenso liegen in der zweiten Ebene $(L_{123} L_{124})$ die Durchstichspunkte von G_1, G_3, G_4, L_{134} auf gerader Linie. Die drei Ebenen E_2, E_3, E_4 beschreiben wieder drei projectivische Büschel, deren Schnittpunkt, die letzte Tetraederecke, eine räumliche C_3 durchläuft, welcher unter anderen der Durchstichspunkt von L_{134} durch die Ebene $(G_1 G_2)$ und der Schnittpunkt von L_{123} und L_{124} angehören.

In dieser Weise erhalten wir dadurch, dass wir immer neue und immer mehr von den sieben Geraden sich schneiden lassen, neue Fälle, doch sollen sie hier nicht alle behandelt werden, weil doch der Gang der Ueberlegung immer derselbe bleibt. Es soll im Folgenden nur noch kurz das Resultat der Ableitung für einen der speciellsten Fälle angegeben werden, weil wir durch ihn schliesslich zu Tetraederumformungen geführt werden, die uns wohlbekannt sind.

Die Gerade G_1 wird von den drei Geraden G_2, G_3, G_4 in den Punkten X, Y, Z geschnitten, ohne dass von den letzteren Geraden zwei in einer und derselben Ebene liegen. Die drei Geraden L_{123}, L_{124}, L_{134} gehen alle durch einen und denselben Punkt A, und zwar geht die Ebene $(L_{123} L_{124})$ ausserdem durch X, die Ebene $(L_{124} L_{134})$ durch Y und endlich $(L_{124} L_{134})$ durch Z. Wählen wir jetzt auf L_{123} eine erste Ecke P_{123} und legen E_1 und E_2, so schneiden sie sich in der Geraden $P_{123} X$; da diese Gerade in der Ebene $(L_{123} L_{124})$ liegt, so wird sie natürlich immer, wie es sein muss, L_{124} in einem Punkte P_{124} treffen. E_1 und E_3 schneiden sich in der Geraden $P_{123} Y$, welche L_{134} im Punkte P_{134} trifft. Die Verbindungslinie $P_{124} P_{134}$ muss durch den Durchstosspunkt der Geraden G_1 durch die Ebene $(L_{124} L_{134})$ gehen und muss also hier G_4 treffen. Wir sehen, dass die Bedingungen für die Beweglichkeit erfüllt sind. Jetzt legen wir endlich noch die Ebenen E_2, E_3, E_4 durch die betreffenden Geraden G und durch die gehörigen Verbindungslinien je zweier Punkte P. Der Schnittpunkt dieser drei Ebenen beschreibt dann bei der Wanderung von P_{123} auf L_{123} eine wirkliche Raumcurve dritter Ordnung, die durch den Punkt A geht und jede Gerade L noch in einem weiteren Punkte trifft; diese Curve hat auch G_2, G_3 und G_4 zu Sehnen, was hier Alles aber nicht bewiesen werden soll.

Von diesem Falle gehen wir mit Leichtigkeit zu einem noch specielleren über. Es soll G_1 wieder von G_2, G_3 und G_4 geschnitten werden, aber alle diese Geraden sollen in einer einzigen Ebene E liegen. Die Geraden L schneiden sich wieder in einem Punkte A; die Ebene $(L_{123} L_{124})$ geht wieder durch den Schnittpunkt X von G_1 und G_2, so dass die Verbindungslinie der Durchstichspunkte von L_{123} und L_{124} durch die Ebene E durch X geht; ebenso liegt der Schnittpunkt Y von G_1 und G_3 in der Ebene $(L_{123} L_{134})$ und der Schnittpunkt von G_1 und G_4 in $(L_{124} L_{134})$.

Wählen wir irgend eine erste Tetraederebene E_1 durch G_1, so erhalten wir auf den drei Geraden L drei Tetraederecken P_{123}, P_{124}, P_{134}; die Gerade $P_{123}P_{124}$ geht durch X und entsprechend die übrigen. Die drei Ebenenbüschel G_2, G_3, G_4 haben in E eine Ebene entsprechend gemein. Es schneiden sich zwei dieser Büschel, z. B. G_2 und G_3 in den Strahlen desjenigen Büschels, welches den Schnittpunkt von G_2 und G_3 als Centrum hat und in der durch diesen Punkt und L_{123} bestimmten Ebene liegt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Büschelpaare. Die Schnittpunkte je dreier entsprechender Ebenen der drei Büschel füllen jetzt nicht mehr eine Raumcurve dritter Ordnung aus, sondern die Gerade AB, wo B der gemeinsame Schnittpunkt von folgenden drei Verbindungslinien ist: 1. Verbindungslinie des Schnittpunktes von G_2 und G_3 mit dem Durchstosspunkte von L_{123} durch E; 2. Verbindungslinie des Schnittpunktes von G_2 und G_4 mit dem Durchstosspunkte von L_{124} durch E; 3. Verbindungslinie des Schnittpunktes von G_3 und G_4 mit dem Durchstosspunkte von L_{134} durch E. Die vier Tetraederebenen drehen sich also um vier in einer Ebene liegende Gerade und die vier Tetraederecken rücken auf vier durch einen Punkt laufenden Geraden fort. Jetzt lassen wir E zur unendlich fernen Ebene werden; die einzelnen Tetraederebenen bleiben sich also parallel, während die Ecken auf vier durch einen Punkt A laufenden Strahlen fortrücken. Wir haben dann nichts Anderes vor uns, als die wohlbekannte ähnliche Vergrösserung eines Tetraeders, bei welcher A den Aehnlichkeitspunkt bildet.

Endlich wollen wir uns noch denken, dass A selbst in E zu liegen kommt. Dann werden alle Geraden L parallel und unser bewegliches Tetraeder bleibt sich congruent; es verschiebt sich parallel mit sich so, dass die vier Ecken auf den vier Geraden L fortrücken und die vier Seitenflächen sich um unendlich ferne Gerade drehen.

Schlussbemerkung. In den meisten zu Anfang genannten Werken ist neben den genannten Satz die folgende dualistische Umkehrung desselben gestellt: Bewegen sich die vier Tetraederecken auf vier beliebigen festen Geraden und drehen sich drei Tetraederebenen um drei weitere beliebige Gerade, so osculirt die letzte Ebene eine Raumcurve dritter Ordnung. Von diesem Satze gilt natürlich dasselbe, wie vom ersten. Es ist unmittelbar klar, dass wir zu allen Ueberlegungen dieser Notiz die dualistischen Uebertragungen mit Leichtigkeit ergänzen können, wodurch der eben genannte Satz genau so behandelt wird, wie der erste.

VI.

Neue Lösung eines Rotationsproblems.

Von

C. Frenzel,

Gymnasiallehrer in Lauenburg i. Pommern

Hierzu Taf. II Fig. 9—11c.

Die Aufgabe, deren Lösung den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet, ist folgende:

Es soll die Bewegung eines Rotationskörpers um einen als fest angenommenen Punkt seiner Axe unter dem Einflusse der Schwerkraft bestimmt werden.

Bevor wir uns zur Charakteristik der verschiedenen Methoden wenden, die bisher zur Lösung dieses Problems angewandt worden sind, mögen die üblichen Bezeichnungen kurz recapitulirt und die Differentialgleichungen des Problems aufgestellt werden.

Es werde zunächst ein beliebig gestalteter Körper vorausgesetzt, der sich um einen beliebig angenommenen festen Punkt unter dem Einflusse der Schwerkraft bewegt. Dieser feste Punkt O sei der Anfangspunkt zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme: das eine System, das der x, y, z, sei im Raume fest; das andere hingegen, das der ξ, η, ζ, sei im Raume beweglich und mit dem Körper fest verbunden. Die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Körpers sind demnach Functionen der Zeit t, während die Coordinaten ξ, η, ζ desselben Punktes von t unabhängig sind. Zwischen diesen beiderlei Coordinaten bestehen folgende Relationen:

1) $x=\alpha\xi+\alpha'\eta+\alpha''\zeta,\quad y=\beta\xi+\beta'\eta+\beta''\zeta,\quad z=\gamma\xi+\gamma'\eta+\gamma''\zeta,$

wo $\alpha=cos(x,\xi)$, $\alpha'=cos(x,\eta)$, ... etc. ist.

Der Orthogonalität beider Coordinatensysteme zufolge ist

2) $$x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach ξ, η, ζ, so erhalten wir mit Rücksicht auf 1)

3) $\xi=\alpha x+\beta y+\gamma z,\quad \eta=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z,\quad \zeta=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z;$

es sind dies die Auflösungen der Gleichungen 1) nach ξ, η, ζ.

Zwischen den neun Richtungscosinus α, α', ... bestehen sechs voneinander unabhängige Relationen, die entweder in der Form

$$4)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\quad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,$$

$$5)\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\quad \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

oder in der Form

$$6)\quad \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\quad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1,\quad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$$

$$7)\quad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,\quad \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0,\quad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0$$

geschrieben werden können. Endlich sei noch vorausgesetzt, dass die Determinante $\Sigma\pm\alpha\beta'\gamma''$ des Systems 1) den Werth $+1$ besitzt, dass also die beiden Coordinatensysteme congruent sind; dann ist

$$8)\quad \begin{cases} \alpha=\beta'\gamma''-\gamma'\beta'', & \alpha'=\beta''\gamma-\gamma''\beta, \quad \alpha''=\beta\gamma'-\gamma\beta', \\ \beta=\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'', & \beta'=\gamma''\alpha-\alpha''\gamma, \quad \beta''=\gamma\alpha'-\alpha\gamma', \\ \gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha'', & \gamma'=\alpha''\beta-\beta''\alpha, \quad \gamma''=\alpha\beta'-\beta\alpha'. \end{cases}$$

Betrachten wir nunmehr die Bewegung des Körpers. Bekanntlich giebt es in jedem Zeitmoment t eine durch den Coordinatenanfangspunkt O gehende Gerade, die sogenannte instantane Drehungsaxe, um welche der Körper in dem betreffenden Augenblick rotirt und welche von Augenblick zu Augenblick ihre Richtung ändert. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit um diese instantane Axe zur Zeit t mit Ω, ferner die Componenten von Ω in Bezug auf die beweglichen Axen mit p, q, r, so ist

$$9)\quad \begin{cases} p\,dt=\alpha''d\alpha'+\beta''d\beta'+\gamma''d\gamma'=-(\alpha'd\alpha''+\beta'd\beta''+\gamma'd\gamma''), \\ q\,dt=\alpha\,d\alpha''+\beta\,d\beta''+\gamma\,d\gamma''=-(\alpha''d\alpha+\beta''d\beta+\gamma''d\gamma), \\ r\,dt=\alpha'd\alpha+\beta'd\beta+\gamma'd\gamma=-(\alpha\,d\alpha'+\beta\,d\beta'+\gamma\,d\gamma'), \end{cases}$$

$$10)\quad \Omega^2=p^2+q^2+r^2.$$

Was die Lage der beiden Coordinatensysteme anbelangt, so wollen wir festsetzen, dass die positive z-Axe vertical nach oben gerichtet sei; ferner mögen die Axen der ξ, η, ζ mit den Richtungen der Hauptträgheitsaxen des Körpers zusammenfallen, und zwar gehöre zur Richtung der ξ-Axe das Trägheitsmoment A, zur Richtung der η-Axe das Trägheitsmoment B und zur Richtung der ζ-Axe das Trägheitsmoment C. Bezeichnen wir noch mit Ξ, H, Z die Componenten der auf den Punkt m wirkenden beschleunigenden Kraft bezüglich der beweglichen Coordinatenaxen, so besitzen die Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung die folgende Form:

$$11)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}=(B-C)qr+\Sigma m(\eta Z-\zeta H), \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt}=(C-A)\,rp+\Sigma m\,(\zeta\Xi-\xi Z), \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt}=(A-B)pq+\Sigma m(\xi H-\eta\Xi), \end{cases}$$

wo sich die Summation über sämmtliche Massenelemente m des Körpers erstreckt.

Nehmen wir nun an, dass auf den Körper allein die Schwerkraft mit der Intensität g in der Richtung der negativen z-Axe wirke, so wird

$$\Xi = -g\gamma, \quad H = -g\gamma', \quad Z = -g\gamma''. \tag{12}$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichungen 11) und berücksichtigen dabei, dass

$$\Sigma m\xi = \xi_0 \Sigma m, \quad \Sigma m\eta = \eta_0 \Sigma m, \quad \Sigma m\zeta = \zeta_0 \Sigma m$$

ist, wo ξ_0, η_0, ζ_0 die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers bedeuten, so gehen jene Differentialgleichungen über in

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr - G(\eta_0\gamma'' - \zeta_0\gamma'),\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp - G(\zeta_0\gamma - \xi_0\gamma''),\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq - G(\xi_0\gamma' - \eta_0\gamma), \end{aligned} \right.$$

wo $G = g\Sigma m$ das Gewicht des Körpers bezeichnet.

In diesen Differentialgleichungen kommen ausser den unbekannten Functionen p, q, r noch die drei Cosinus γ, γ', γ'' vor, welche ebenfalls unbekannte Functionen von t sind; wir müssen also den Differentialgleichungen 13) noch drei andere hinzufügen. Nun ergiebt sich aus den Gleichungen 4) und 9)

$$\begin{aligned} \alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma &= 0,\\ \alpha'\, d\alpha + \beta'\, d\beta + \gamma'\, d\gamma &= r\,dt,\\ \alpha''\, d\alpha + \beta''\, d\beta + \gamma''\, d\gamma &= -q\,dt, \end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösung nach $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\alpha' - q\alpha'', \quad \frac{d\beta}{dt} = r\beta' - q\beta'', \quad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma''.$$

Bilden wir durch cyklische Vertauschung der Buchstaben die analogen Gleichungen für die übrigen Differentialquotienten, so gelangen wir zu folgendem Formelsystem:

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= r\alpha' - q\alpha'', & \frac{d\alpha'}{dt} &= p\alpha'' - r\alpha, & \frac{d\alpha''}{dt} &= q\alpha - p\alpha',\\ \frac{d\beta}{dt} &= r\beta' - q\beta'', & \frac{d\beta'}{dt} &= p\beta'' - r\beta, & \frac{d\beta''}{dt} &= q\beta - p\beta', \end{aligned} \right.$$

$$\tag{15} \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.$$

Von diesen neun Formeln brauchen wir vorläufig nur die drei letzten unter 15), welche mit 13) zusammen ein vollständiges System simultaner Differentialgleichungen zur Bestimmung der sechs unbekannten Functionen p, q, r, γ, γ', γ'' bilden.

In unserem Problem, wo der Körper ein Rotationskörper ist, dessen Schwerpunkt in der geometrischen Axe des Körpers liegt, treten noch einige Specialisirungen ein. Es wird nämlich, wenn wir die ζ-Axe mit der geometrischen Axe des Körpers zusammenfallen lassen,

$$A = B, \quad \xi_0 = 0 \text{ und } \eta_0 = 0,$$

und mithin nehmen in unserem Problem die Differentialgleichungen 13) folgende endgiltige Form an:

$$16) \quad A\frac{dp}{dt} = (A-C)\,qr + G\zeta_0\gamma', \quad A\frac{dq}{dt} = (C-A)\,pr - G\zeta_0\gamma, \quad \frac{dr}{dt} = 0. \text{ —}$$

Die Aufgabe, aus dem System vonz wölf Differentialgleichungen 14), 15), 16) die neun Richtungscosinus, sowie die Grössen p, q, r als Functionen von t zu bestimmen, ist schon von verschiedenen Mathematikern in Angriff genommen worden. Abgesehen von den älteren Lösungen von

Lagrange, *Mécanique analytique*, *t. II*, und

Poisson, *Traité de Mécanique*, *t. II*,

welche das Problem nur auf Quadraturen zurückführen, und ausser den elementar gehaltenen Analysen des Problems von

Résal, *Traité de cinématique pure* (vergl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte) und

Jullien, *Problèmes de Mécanique rationelle*, *t. II*

kommen hier insbesondere zwei Kategorien von Lösungen in Betracht. Zu der einen gehören die Bearbeitungen von

Lottner, Reduction der Bewegung eines schweren um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, in Crelle's Journal Bd. 50, und

Franke, Ueber die Bewegung rotirender Kreisel, in den Programmen des Gymnasiums zu Seehausen vom Jahre 1873 und 1874;

in die andere Kategorie diejenige Lösung, welche Herr Professor

Weierstrass in seinen „Vorlesungen über die Anwendung der elliptischen Functionen" während des Sommersemesters 1879 gegeben hat.

Den Lösungen von Lottner und Franke fehlt die Symmetrie; in ihnen treten immer noch die alten Euler'schen Winkel ϑ, φ, ψ auf, die zwar eine einfache geometrische Bedeutung haben, deren Einführung jedoch die schöne Symmetrie unseres Systems von Differentialgleichungen vollkommen vernichtet. Wenn auch schliesslich Lottner die neun Richtungscosinus selbst als Functionen von t darstellt, so sind doch diese Darstellungen einerseits zu complicirt, andererseits haben sie für uns bei Weitem nicht dasjenige Interesse, welches diesen neun Cosinus bei dem verwandten Problem der Rotation eines beliebig gestalteten Körpers mit

drei von einander verschiedenen Hauptträgheitsaxen um seinen Schwerpunkt zukommt. Was endlich die Lösung des Herrn Prof. Weierstrass anbetrifft, so ist sie zwar, wie sich von selbst versteht, äusserst elegant, aber die von Herrn Weierstrass an Stelle der neun Cosinus eingeführten Variablen λ, μ, ν, ϱ haben keine einfache mechanische Bedeutung; denn was kümmert uns im vorliegenden Problem die Richtung derjenigen durch den Coordinatenursprung gehenden Geraden für den Zeitmoment t, um welche das Coordinatensystem der x, y, z gedreht werden muss, damit es in die Lage des Systems der ξ, η, ζ komme, und die Grösse dieser Drehung? Daher kommt es auch, dass die Bestimmung der bei dieser Lösung auftretenden Integrationsconstanten durch die gegebenen Anfangsbedingungen grosse Schwierigkeiten bereitet, Schwierigkeiten, welche zu heben selbst Herrn Prof. Weierstrass noch nicht gelungen ist.

Welches sind nun aber die geeignetsten, naturgemässen Variablen im vorliegenden Problem?

Offenbar ist zunächst die Richtung der geometrischen Axe des Körpers, d. h. der ζ-Axe in Bezug auf das feste Coordinatensystem der x, y, z zu bestimmen. Dazu ist die Angabe der Werthe von γ'' und $\alpha''+i\beta''$ erforderlich und hinreichend. Die Grösse γ'' giebt die Neigung der ζ-Axe gegen die vertikale z-Axe an; die Grösse $\alpha''+i\beta''$ bestimmt diejenige durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Vertikalebene, in welcher zur Zeit t die ζ-Axe liegt. Die Bestimmung anderer Lagenbeziehungen ist nicht erforderlich, da bei einem Rotationskörper in der Aequatorialebene keine ausgezeichnete Richtung vorhanden ist. Was ferner den Bewegungszustand des Körpers betrifft, so geht aus der Gleichung 16c) zunächst hervor, dass r während der ganzen Bewegung constant, also

$$r = r_0 \tag{17}$$

ist, wo r_0 den Anfangswerth von r zur Zeit $t = t_0$ bezeichnet. Es werden also nur noch die infolge der Schwerkraft auftretenden Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die ξ- und η-Axen, d. h. die Grössen p und q zu bestimmen sein, und ferner die Richtung ihrer in der $\xi\eta$-Ebene liegenden Resultante $v = \sqrt{p^2+q^2}$ (vergl. Fig. 9). Die Grössen p und q sind durch Angabe des Werthes von $p+qi$ gegeben, die Richtung von v hingegen ist, wie sich weiter unten zeigen wird, durch die bereits eingeführten Variablen α'', β'' und γ'' mit bestimmt. Somit sind

$$\gamma'', \quad \alpha''+i\beta'' \quad \text{und} \quad p+qi$$

die einzigen zur Bestimmung der Bewegung nothwendigen und hinreichenden Grössen, und diese wollen wir direct als Functionen von t darstellen.

Im Uebrigen werde ich mich bei der Lösung dieser Aufgabe der Weierstrass'schen Methoden und Bezeichnungen bedienen; diejenigen

Leser, welchen die Jacobi'schen Bezeichnungen geläufiger sind, finden die hier befolgte Integrationsmethode auseinandergesetzt in dem höchst inhaltsreichen Aufsatze von Herrn

Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques: Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 1877^{II} und 1878^{I}.

Wir wenden uns jetzt zur Lösung unserer Differentialgleichungen und bestimmen zunächst die Grösse γ''. Multipliciren wir die beiden ersten Gleichungen 16) mit p und q und addiren, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} A \frac{d}{dt}(p^2+q^2) = - G\zeta_0(q\gamma - p\gamma')$$

oder, da nach 15)

$$q\gamma - p\gamma' = \frac{d\gamma''}{dt}$$

ist,

$$A\frac{d}{dt}(p^2+q^2) = -2G\zeta_0\frac{d\gamma''}{dt}. \tag{18}$$

Multipliciren wir ferner die Gleichungen 16) der Reihe nach mit γ, γ', $A\gamma''$ und addiren, so ergiebt sich

$$A\left(\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt} + \gamma''\frac{dr}{dt}\right) = r(A-C)(q\gamma - p\gamma')$$

oder, da nach 15)

$$p\frac{d\gamma}{dt} + q\frac{d\gamma'}{dt} + r\frac{d\gamma''}{dt} = 0,$$

mithin

$$\gamma\frac{dp}{dt} + \gamma'\frac{dq}{dt} + \gamma''\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'')$$

ist,

$$A\frac{d}{dt}(p\gamma + q\gamma' + r\gamma'') = r(A-C)\frac{d\gamma''}{dt}$$

oder endlich

$$A\frac{d}{dt}(p\gamma + q\gamma') = -Cr_0\frac{d\gamma''}{dt}. \tag{19}$$

Durch Integration erhält man aus 18) und 19)

$$A(p^2+q^2) = 2G\zeta_0.(Const. - \gamma''), \quad A(p\gamma + q\gamma') = Cr_0.(Const. - \gamma'').$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationsconstanten nehmen wir an, dass dem Körper zu Anfang seiner Bewegung nur eine einfache Rotation um die ζ-Axe (nicht eine Rotation um eine beliebig gerichtete Axe) mitgetheilt sei; dann ist

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0, \tag{20}$$

und es erhält demnach jede der beiden Integrationsconstanten den Werth γ''_0, so dass definitiv

$$A\,(p^2+q^2) = 2G\zeta_0(\gamma''_0 - \gamma''), \tag{21}$$

$$A(p\gamma + q\gamma') = Cr_0(\gamma''_0 - \gamma'') \tag{22}$$

wird. Diese beiden Gleichungen verbinden wir mit der Gleichung

15c) $$q\gamma - p\gamma' = \frac{d\gamma''}{dt}$$

und eliminiren aus ihnen die Grössen p und q. Aus 22) und 15c) ergiebt sich durch Quadriren

$$\begin{cases} A^2(p^2\gamma^2 + q^2\gamma'^2 + 2pq\gamma\gamma') = C^2 r_0^2(\gamma''_0 - \gamma'')^2, \\ A^2(q^2\gamma^2 + p^2\gamma'^2 - 2pq\gamma\gamma') = A^2\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2, \end{cases}$$

also

$$A^2(p^2+q^2)(\gamma^2+\gamma'^2) = C^2 r^2_0(\gamma''_0 - \gamma'')^2 + A^2\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2$$

oder, da nach 21) und 6)

$$A(p^2+q^2) = 2G\zeta_0(\gamma''_0 - \gamma'') \text{ und } \gamma^2 + \gamma'^2 = 1 - \gamma''^2$$

ist,

$$2AG\zeta_0(\gamma''_0 - \gamma'')(1-\gamma''^2) = C^2 r_0^2(\gamma''_0 - \gamma'')^2 + A^2\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2$$

oder endlich

23) $$\begin{aligned}\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2 &= (\gamma''_0 - \gamma'')\left\{\frac{2G\zeta_0}{A}(1-\gamma''^2) - \frac{C^2 r_0^2}{A^2}(\gamma''_0 - \gamma'')\right\} \\ &= \frac{2G\zeta_0}{A}(\gamma'' - \gamma''_0)(\gamma'' - \gamma''_1)(\gamma'' - \gamma''_2) = R(\gamma''),\end{aligned}$$

wo $R(\gamma'')$ das Polynom dritten Grades auf der rechten Seite dieser Gleichung und γ''_0, γ''_1, γ''_2 die Wurzeln desselben bedeuten.

Von der ersten Wurzel γ''_0 wissen wir, dass sie reell ist; wir wollen sie auch, um die Vorstellung zu fixiren, stets als positiv voraussetzen, d. h. annehmen, dass zu Anfang der Bewegung die positive ζ-Axe mit der positiven z-Axe einen spitzen Winkel bilde. Bei dieser Annahme und bei der ferneren Voraussetzung, dass auch ζ_0 positiv sei, muss während der ganzen Bewegung

24) $$\gamma'' \leqq \gamma''_0$$

sein, weil sonst $\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2$ einen negativen Werth erhalten würde, was für reelle t unmöglich ist. Wenn demnach angenommen wird, dass zu Anfang der Bewegung der Schwerpunkt des Körpers oberhalb der durch den Coordinatenursprung gehenden Horizontalebene liegt, und wenn man ferner der positiven ζ-Axe die Richtung vom Coordinatenursprung nach dem Schwerpunkte hin (und nicht die entgegengesetzte Richtung) giebt, so ist während der ganzen Bewegung die Neigung der ζ-Axe, d. h. der geometrischen Axe des Körpers, gegen die nach oben gerichtete Verticale grösser, als zu Anfang der Bewegung; nach Ablauf gewisser regelmässig wiederkehrender Zeitperioden wird die ursprüngliche Neigung wieder erreicht werden.

Um ferner die Lage der beiden anderen Wurzeln γ''_1 und γ''_2 zu ermitteln, zu deren numerischer Bestimmung nur die Auflösung einer

quadratischen Gleichung erforderlich ist, bilden wir den Differentialquotienten

$$R'(\gamma'') = -\frac{2G\zeta_0}{A}(1-\gamma''^2) - \frac{4G\zeta_0}{A}\gamma''(\gamma''_0-\gamma'') + \frac{2C^2r_0^2}{A^2}(\gamma''_0-\gamma'');$$

für $\gamma''=\gamma''_0$ erhält derselbe den negativen Werth

$$R'(\gamma''_0) = -\frac{2G\zeta_0}{A}(1-\gamma''^2_0),$$

daher geht bei wachsendem γ'' die den Verlauf der Function $R(\gamma'')$ darstellende Curve an der Stelle $\gamma''=\gamma''_0$ vom Positiven ins Negative über. Ferner erhält für $\gamma''=\pm 1$ die Function $R(\gamma'')$ negative Werthe, und endlich ist

$$\text{für } \gamma''=+\infty \quad R(\gamma'')=+\infty$$
$$\text{und ,, } \gamma''=-\infty \quad R(\gamma'')=-\infty.$$

Mithin besitzt jene Curve die in Fig. 10 angegebene Gestalt: die eine Wurzel γ''_0 liegt zwischen 0 und $+1$, eine andere, die wir mit γ''_1 bezeichnen, zwischen -1 und γ''_0, und zwar wird dieselbe positiv oder negativ sein, je nachdem

$$2AG\zeta_0 - C^2r_0^2\gamma''_0 \lesseqgtr 0 \tag{25}$$

ist; die dritte Wurzel γ''_2 endlich liegt zwischen $+1$ und $+\infty$.

Da für reelle Werthe von t $R(\gamma'')$ positiv und γ'' selbst dem absoluten Betrage nach < 1 sein muss, so liegt das Intervall, innerhalb dessen sich die Variable γ'' bewegt, innerhalb der Grenzen γ''_1 und γ''_0.

Wir wenden uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung 23) und machen zu dem Zwecke die aus den Vorlesungen des Herrn Prof. Weierstrass bekannte und bei jedem mechanischen Problem wiederkehrende Substitution

$$s = \frac{\frac{1}{4}R'(\bar{\gamma}'')}{\gamma''-\bar{\gamma}''} + \frac{1}{24}R''(\bar{\gamma}''),$$

wo s die neue Variable und $\bar{\gamma}''$ irgend eine der drei Wurzeln des Polynoms $R(\gamma'')$ bedeutet. Wir wählen für $\bar{\gamma}''$ die Wurzel γ''_0 (nämlich eine der beiden Grenzen für γ''), setzen also

$$s = \frac{\frac{1}{4}R'(\gamma''_0)}{\gamma''-\gamma''_0} + \frac{1}{24}R''(\gamma''_0); \tag{26}$$

dann geht die Differentialgleichung $\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2 = R(\gamma'')$ über in die kanonische Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = S, \tag{27}$$

wo g_2 und g_3 die beiden Invarianten des Polynoms $R(\gamma'')$ sind und aus den Coefficienten desselben leicht berechnet werden können. Statt dessen wollen wir zunächst die Wurzeln e_1, e_2, e_3 des Polynoms

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$$

berechnen, aus denen dann leicht die Werthe von g_2 und g_3 mit Hilfe der Relationen

$$g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$$

gefunden werden können.

Nun ist nach 26)

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{(\gamma'' - \gamma''_0)^2} \cdot \frac{d\gamma''}{dt},$$

also, da $\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2 = R(\gamma'')$ ist,

$$S = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{[\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)]^2}{(\gamma'' - \gamma''_0)^4} \cdot R(\gamma'') = \frac{2 G \zeta_0}{A} [\tfrac{1}{4} R'(\gamma''_0)]^2 \cdot \frac{(\gamma'' - \gamma''_1)(\gamma'' - \gamma''_2)}{(\gamma'' - \gamma''_0)^3}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet dann und nur dann, wenn γ'' einen der Werthe

$$\gamma''_1, \quad \gamma''_2, \quad \infty,$$

also s einen der Werthe

$$\frac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_1 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \quad \frac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_2 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \quad \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0)$$

annimmt. Bezeichnen wir demnach die Wurzeln e_1, e_2, e_3 in irgendwelcher Grössenfolge mit e', e'', e''', so können wir setzen

$$e' = \frac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_1 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \quad e'' = \frac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_2 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \quad e''' = \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0).$$

Nun ist

$$\begin{cases} R'(\gamma'') = -\dfrac{2 G \zeta_0}{A}(1 - \gamma''^2) - \dfrac{4 G \zeta_0}{A} \gamma''(\gamma''_0 - \gamma'') + \dfrac{2 C^2 r_0^2}{A^2}(\gamma''_0 - \gamma''), \\ R''(\gamma'') = \quad \dfrac{12 G \zeta_0}{A} \gamma'' - \dfrac{4 G \zeta_0}{A} \gamma''_0 - \dfrac{2 C^2 r_0^2}{A^2}, \end{cases}$$

also

$$28) \quad \begin{cases} R'(\gamma''_0) = -\dfrac{2 G \zeta_0}{A}(1 - \gamma''^2_0) = \dfrac{2 G \zeta_0}{A}(\gamma''_0 - \gamma''_1)(\gamma''_0 - \gamma''_2), \\ R''(\gamma''_0) = \quad \dfrac{8 G \zeta_0}{A} \gamma''_0 - \dfrac{2 C^2 r_0^2}{A^2}; \end{cases}$$

substituiren wir diese Ausdrücke in obige Werthe von e', e'', e''', so sehen wir, dass die letzteren sämmtlich reell werden. Ordnen wir sie also, wie dies in der Theorie der elliptischen Functionen üblich ist, nach der Grössenfolge

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

so wird

$$29) \quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_1 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0) = \dfrac{G \zeta_0}{2 A}(\gamma''_2 - \gamma''_0) + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \\ e_2 = \qquad\qquad \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0), \\ e_3 = \dfrac{\frac{1}{4} R'(\gamma''_0)}{\gamma''_2 - \gamma''_0} + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0) = \dfrac{G \zeta_0}{2 A}(\gamma''_1 - \gamma''_0) + \tfrac{1}{24} R''(\gamma''_0) \end{cases}$$

und

$$30)\quad \begin{cases} e_2 - e_3 = \frac{G\zeta_0}{2A}(\gamma''_0 - \gamma''_1), \\ e_1 - e_3 = \frac{G\zeta_0}{2A}(\gamma''_2 - \gamma''_1), \\ e_1 - e_2 = \frac{G\zeta_0}{2A}(\gamma''_2 - \gamma''_0). \end{cases}$$

Hiermit sind die Constanten in der transformirten Differentialgleichung 27) vollkommen bestimmt; das Integral derselben lautet:

$$s = \wp(t - t'),$$

wo t' eine willkürliche Integrationsconstante bedeutet. Die Perioden 2ω und $2\omega'$ der Function $\wp$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$31)\quad \wp(\omega) = e_1, \quad \wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp(\omega') = e_3$$

und können, da sämmtliche e reell sind, stets so gewählt werden, dass

ω und $\frac{\omega'}{i}$ positive reelle Grössen

sind. Substituiren wir obigen Werth von s in 26), so erhalten wir mit Benutzung der Gleichungen 28) und 29) die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 23) in folgender Form:

$$\wp(t - t') = e_2 - \frac{G\zeta_0}{2A} \cdot \frac{1 - \gamma''^2_0}{\gamma''_0 - \gamma''}.$$

Für $t = t_0$ wird der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung unendlich gross, also ist die Integrationsconstante t', abgesehen von willkürlichen ganzzahligen Vielfachen der Perioden 2ω und $2\omega'$, gleich t_0 und es wird somit definitiv, wenn wir noch zur Abkürzung

$$32)\quad t - t_0 = u$$

setzen,

$$33)\quad \wp(u) = e_2 - \frac{G\zeta_0}{2A} \cdot \frac{1 - \gamma''^2_0}{\gamma'' - \gamma''_0}$$

oder aufgelöst

$$34)\quad \gamma'' = \gamma''_0 - \frac{G\zeta_0}{2A} \cdot \frac{1 - \gamma''^2_0}{\wp(u) - e_2}.$$

Dieser Ausdruck kann auf eine noch einfachere Form gebracht werden. Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der elliptischen Functionen ist

$$\wp(u) - e_2 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(u + \omega_2) - e_2},$$

wo $\omega_2 = \omega + \omega'$ ist; folglich nach 30) und 28)

$$\wp(u) - e_2 = \frac{G^2\zeta_0^2}{4A^2} \cdot \frac{(\gamma''_0 - \gamma''_2)(\gamma''_0 - \gamma''_1)}{\wp(u + \omega_2) - e_2} = -\frac{G^2\zeta_0^2}{4A^2} \cdot \frac{1 - \gamma''^2_0}{\wp(u + \omega_2) - e_2}.$$

Substituiren wir dies in 34), so ergiebt sich

$$35)\quad \gamma'' = \gamma''_0 + \frac{2A}{G\zeta_0}\{\wp(u + \omega_2) - e_2\}.$$

Damit ist der Werth von γ'' vollkommen bestimmt und wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Grösse $\alpha''+i\beta''$.

Wir bilden zu dem Zwecke den logarithmischen Differentialquotienten

$$\frac{d}{du} lg(\alpha''+i\beta'') = \frac{d}{dt} lg(\alpha''+i\beta'')$$

$$= \frac{\frac{d\alpha''}{dt}+i\frac{d\beta''}{dt}}{\alpha''+i\beta''} = \frac{\alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt}}{\alpha''^2+\beta''^2} + i.\frac{\alpha''\frac{d\beta''}{dt}-\beta''\frac{d\alpha''}{dt}}{\alpha''^2+\beta''^2}.$$

Nun ist aber

$$\alpha''^2+\beta''^2 = 1-\gamma''^2,$$

also

$$\alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt} = -\gamma''\frac{d\gamma''}{dt} = -\gamma''\frac{d\gamma''}{du},$$

und ferner nach 14), 8) und 22)

$$\alpha''\frac{d\beta''}{dt}-\beta''\frac{d\alpha''}{dt} = \alpha''(q\beta-p\beta')-\beta''(q\alpha-p\alpha') = p(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')+q(\alpha''\beta-\beta''\alpha)$$

$$= p\gamma+q\gamma' = \frac{Cr_0}{A}(\gamma''_0-\gamma''),$$

mithin

$$36)\qquad \frac{d}{du} lg(\alpha''+i\beta'') = \frac{-\gamma''\frac{d\gamma''}{du}+\frac{Cr_0 i}{A}(\gamma''_0-\gamma'')}{1-\gamma''_2} = \varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ diejenige Function bezeichnen soll, die wir durch Substitution von 34) oder 35) in die rechte Seite der Gleichung 36) erhalten. Da diese Function rational aus γ'' und $\frac{d\gamma''}{du}$ zusammengesetzt ist, und da ferner γ'' eine doppeltperiodische Function von u ist, so ist auch $\varphi(u)$ eine doppeltperiodische Function von u.

Es handelt sich nun darum, den Differentialausdruck $\varphi(u).du$ zu integriren. Die Methode, die am einfachsten zu diesem Ziele und zu der einfachsten Form des Resultats führt, hat Herr Prof. Weierstrass in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen und deren Anwendungen auseinandergesetzt; doch findet sich dieselbe ihrem Wesen nach bereits in einem der ersten Aufsätze von Herrn Hermite in Crelle's Journal vor und ist ausführlicher dargelegt in der Hermite'schen „Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen" (deutsch herausgegeben von Natani, S. 109). Anwendungen dieser Methode giebt Herr Hermite in dem oben citirten Aufsatze „*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*" und in der Abhandlung „*Sur l'équation de Lamé*" *(Annali di Mathematica, Ser. II t. IX).* Der wesentliche Vorzug dieser Methode vor der älteren besteht darin, dass sie die so unerquickliche Rechnung mit elliptischen Integralen dritter Gattung vermeidet; sie zerlegt die zu integrirende Function in ihre integrirbaren Elemente („*éléments simples*" nach der Hermite'schen Bezeichnung), ähnlich wie man bei der Integration

rationaler Functionen diese in unmittelbar integrirbare Partialbrüche zerlegt. Sie macht überhaupt alle jene Methoden überflüssig, welche „zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form" dienen, und die Untersuchung der verschiedenen Fälle, die bei dieser Reduction zu unterscheiden sind, insbesondere also auch die Eintheilung der elliptischen Integrale dritter Gattung in solche mit circulärem und solche mit logarithmischem Parameter.

Es genügt für das vorliegende Problem, den einfachsten Fall dieser Hermite-Weierstrass'schen Methode zu betrachten. Es sei $\varphi(u)$ eine doppeltperiodische Function n^{ter} Ordnung mit lauter einfachen Unendlichkeitspunkten; irgend ein vollständiges System incongruenter Unendlichkeitspunkte sei bezeichnet mit

$$a_1, \; a_2, \; \dots \; a_n,$$

dann besitzt die Entwickelung der Function $\varphi(u)$ in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes a_λ $(\lambda = 1, 2, \dots n)$ die Form

$$\varphi(u) = c_\lambda (u - a_\lambda)^{-1} + \mathfrak{P}(u - a_\lambda),$$

wo unter dem Symbol $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, also eine Reihe von der Form

$$\mathfrak{P}(x) = a + bx + cx^2 + \dots$$

zu verstehen ist. Den Coefficienten der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz in der Entwickelung von $\varphi(u)$, auf den es hier allein ankommt, nennt man nach Cauchy das Residuum der Function $\varphi(u)$ im Punkte a_λ. Die Summe dieser Residuen hat nach einem bekannten Cauchy'schen Satze den Werth

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} c_\lambda = 0.$$

Hat man nun die Entwickelungen der Function $\varphi(u)$ in der Umgebung sämmtlicher Unendlichkeitspunkte hergestellt, hat man also sämmtliche Residuen $c_1, c_2, \dots c_n$ gefunden, so lässt sich die Function $\varphi(u)$ in folgender, unmittelbar integrirbaren Form darstellen:

$$\varphi(u) = c_0 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} c_\lambda \frac{\sigma'(u - a_\lambda)}{\sigma(u - a_\lambda)},$$

wo c_0 eine gewisse Constante und σ die bekannte Weierstrass'sche Function bezeichnet, welche auch durch die Jacobi'sche Function H oder Θ ersetzt werden kann.

Um diese Methode auf die Integration unserer Differentialgleichung 36) anzuwenden, haben wir zunächst die Unendlichkeitspunkte der Function

$$\varphi(u) = \frac{-\gamma'' \dfrac{d\gamma''}{du} + \dfrac{Cr_0 i}{A}(\gamma''_0 - \gamma'')}{1 - \gamma''^2}$$

zu ermitteln und alsdann die Entwickelungen der Function $\varphi(u)$ in der Umgebung dieser Unendlichkeitspunkte herzustellen. Diese Function

kann aber nur für diejenigen Werthe von u unendlich gross werden, für welche γ'' einen der Werthe

$$+1, \quad -1, \quad \infty$$

erhält. Untersuchen wir zunächst diejenigen Stellen, an welchen $\gamma''=\pm 1$ ist.

Nach Gleichung 35) ist

$$\gamma''=\gamma''_0+\frac{2A}{G\zeta_0}\{\wp(u+\omega_2)-e_2\},$$

also

$$\frac{d\gamma''}{du}=\frac{2A}{G\zeta_0}\cdot\wp'(u+\omega_2)=\sqrt{R(\gamma'')},$$

wo

$$R(\gamma'')=\frac{2G\zeta_0}{A}(\gamma''_0-\gamma'')(1-\gamma''^2)-\frac{C^2r_0^{\,2}}{A^2}(\gamma''_0-\gamma'')^2$$

ist. Für $\gamma''=+1$ wird demnach $\frac{d\gamma''}{du}=\pm\frac{Cr_0i}{A}(1-\gamma''_0)$ und für $\gamma''=-1$ $\frac{d\gamma''}{du}=\pm\frac{Cr_0i}{A}(1+\gamma''_0)$.

Da nun, wie aus der Form der Function $\varphi(u)$ hervorgeht, $\varphi(u)$ nur dann unendlich gross wird, wenn gleichzeitig

$$\gamma''=+1 \text{ und } \frac{d\gamma''}{du}=\frac{Cr_0i}{A}(1-\gamma''_0)$$

oder

$$\gamma''=-1 \text{ und } \frac{d\gamma''}{du}=\frac{Cr_0i}{A}(1+\gamma''_0)$$

ist, hingegen endlich bleibt für die anderen Vorzeichen von $\frac{d\gamma''}{du}$, so entspricht

dem Werthe $\gamma''=+1$ nur ein einziger Unendlichkeitspunkt u_1
und „ „ $\gamma''=-1$ „ „ „ „ u_2,

und zwar bestimmen sich diese Werthe u_1 und u_2 aus den Gleichungen

$$37)\quad \wp(u_1+\omega_2)=e_2+\frac{G\zeta_0}{2A}(1-\gamma''_0),\quad \wp'(u_1+\omega_2)=\frac{G\zeta_0}{2A^2}\cdot Cr_0i(1-\gamma''_0)$$

und

$$38)\quad \wp(u_2+\omega_2)=e_2-\frac{G\zeta_0}{2A}(1+\gamma''_0),\quad \wp'(u_2+\omega_2)=\frac{G\zeta_0}{2A^2}\cdot Cr_0i(1+\gamma''_0);$$

auch kann man sich zur Bestimmung von u_1 und u_2 der Gleichungen bedienen

$$39)\quad \wp(u_1)=e_2-\frac{G\zeta_0}{2A}(1+\gamma''_0),\quad \wp(u_2)=e_2+\frac{G\zeta_0}{2A}(1-\gamma''_0),$$

die aus Gleichung 34) hervorgehen und von denen weiter unten ebenfalls Gebrauch gemacht werden wird.

Zu den Entwickelungen der Function $\varphi(u)$ in der Umgebung dieser beiden Unendlichkeitspunkte u_1 und u_2 gelangen wir mit Hilfe des Taylor'schen Satzes. Nach diesem ist in der Umgebung des Punktes $u=u_1$

$$\gamma'' = 1 + (u - u_1) \cdot \left[\frac{d\gamma''}{du}\right]_1 + \tfrac{1}{2}(u-u_1)^2 \cdot \left[\frac{d^2\gamma''}{du^2}\right]_1 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{Cr_0 i}{A}(1-\gamma''_0)(u-u_1) + (u-u_1)^2 \cdot \mathfrak{P}(u-u_1),$$
$$\frac{d\gamma''}{du} = \qquad \frac{Cr_0 i}{A}(1-\gamma''_0) + (u-u_1) \cdot \mathfrak{P}(u-u_1);$$

hieraus folgt

$$\varphi(u) = \frac{-\frac{2\,Cr_0 i}{A}(1-\gamma''_0) + (u-u_1)\,\mathfrak{P}(u-u_1)}{-\frac{2\,Cr_0 i}{A}(1-\gamma''_0)(u-u_1) + (u-u_1)^2\,\mathfrak{P}(u-u_1)}$$
$$= (u-u_1)^{-1} + \mathfrak{P}(u-u_1).$$

Ebenso ergeben sich in der Umgebung des Punktes u_2 die folgenden Entwickelungen:

$$\gamma'' = -1 + \frac{Cr_0 i}{A}(1+\gamma''_0)(u-u_2) + (u-u_2)^2\,\mathfrak{P}(u-u_2),$$
$$\frac{d\gamma''}{du} = \qquad \frac{Cr_0 i}{A}(1+\gamma''_0) + (u-u_2)\,\mathfrak{P}(u-u_2),$$

also

$$\varphi(u) = \frac{\frac{2\,Cr_0 i}{A}(1+\gamma''_0) + (u-u_2)\,\mathfrak{P}(u-u_2)}{\frac{2\,Cr_0 i}{A}(1+\gamma''_0)(u-u_2) + (u-u_2)^2\,\mathfrak{P}(u-u_2)}$$
$$= (u-u_2)^{-1} + \mathfrak{P}(u-u_2).$$

Endlich ist noch die Beschaffenheit der Function $\varphi(u)$ für einen unendlich grossen Werth von γ'' zu untersuchen. Nach 34) wird aber γ'' unendlich gross, wenn

$$\wp(u) = e_2, \quad \text{d. h.} \quad u = \omega_2$$

ist. Entwickeln wir γ'' in der Umgebung dieses Punktes, so erhalten wir nach 35)

$$\gamma'' = \frac{2A}{G\zeta_0}(u-\omega_2)^{-2} + \mathfrak{P}(u-\omega_2), \qquad \frac{d\gamma''}{du} = -\frac{4A}{G\zeta_0}(u-\omega_2)^{-3} + \mathfrak{P}(u-\omega_2),$$

mithin

$$\varphi(u) = \frac{\frac{8A^2}{G^2\zeta_0^2}(u-\omega_2)^{-5} + (u-\omega_2)^{-3}\,\mathfrak{P}(u-\omega_2)}{-\frac{4A^2}{G^2\zeta_0^2}(u-\omega_2)^{-4} + (u-\omega_2)^{-2}\,\mathfrak{P}(u-\omega_2)}$$
$$= -2(u-\omega_2)^{-1} + (u-\omega_2) \cdot \mathfrak{P}(u-\omega_2),$$

wo noch besonders hervorzuheben ist, dass in dieser Entwickelung kein constantes Glied vorkommt.

Zufolge dieser Entwickelungen sind die Punkte

$$u_1, \quad u_2, \quad \omega_2$$

sämmtlich Unendlichkeitspunkte erster Ordnung, und die Residuen von $\varphi(u)$ in diesen Punkten besitzen resp. die Werthe

$$+1, \quad +1, \quad -2;$$

demgemäss lässt sich die Function $\varphi(u)$ in folgender Form darstellen:

$$40) \qquad \varphi(u) = c_0 + \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - 2\frac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)},$$

wo c_0 eine gewisse Constante bedeutet.

Zur Bestimmung derselben entwickeln wir beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $u-\omega_2$ und vergleichen die beiderseitigen constanten Glieder. Die Entwickelung der linken Seite enthält, wie wir soeben gesehen haben, kein constantes Glied, desgleichen die Entwickelung von $\dfrac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)}$, welche lautet:

$$\frac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)} = (u-\omega_2)^{-1} + (u-\omega_2)^3 . \mathfrak{P}(u-\omega_2),$$

folglich ergiebt sich zur Bestimmung von c_0 die Gleichung

$$0 = c_0 - \frac{\sigma'(u_1-\omega_2)}{\sigma(u_1-\omega_2)} - \frac{\sigma'(u_2-\omega_2)}{\sigma(u_2-\omega_2)}.$$

Nun ist aber

$$\sigma(u-\omega_2) = -\sigma(\omega_2)e^{-\eta_2 u}\sigma_2(u),$$

also

$$\frac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)} = -\eta_2 + \frac{\sigma'_2(u)}{\sigma_2(u)};$$

mithin wird

$$c_0 = -2\eta_2 + \frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} + \frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)}$$

und somit

$$\varphi(u) = \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - 2\frac{\sigma'_2(u)}{\sigma_2(u)} + \frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} + \frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)}.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit du und integriren, so ergiebt sich

$$41) \qquad \alpha'' + i\beta'' = C_0 . \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2^2(u)} . e^{u\left\{\frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} + \frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)}\right\}},$$

wo C_0 eine Integrationsconstante bedeutet.

Bei der weiteren Umformung dieses Ausdrucks ist zunächst die Bemerkung wesentlich, dass sich die beiden Constanten u_1 und u_2 auf eine einzige Constante reduciren lassen. In der That zeigt der unmittelbare Anblick der Formeln 37a) und 39b), dass

$$u_1 + \omega_2 \equiv \pm u_2$$

ist, d. h. $u_1 + \omega_2 = \pm u_2 + 2n\omega + 2n'\omega'$, wo n und n' beliebige ganze Zahlen bedeuten. Nehmen wir zunächst an, es sei

$$u_1 + \omega_2 \equiv + u_2,$$

so folgt aus 37b)

$$\wp'(u_2) = \frac{G\zeta_0}{2A^2} \cdot Cr_0 i (1 - \gamma''_0),$$

mithin, da

$$\wp(u + \omega_2) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp(u) - e_2},$$

also

$$\wp'(u + \omega_2) = -\frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\{\wp(u) - e_2\}^2} \cdot \wp'(u)$$

ist,

$$\wp'(u + \omega_2) = \frac{\left(\frac{G\zeta_0}{2A}\right)^2 \cdot (1 - \gamma''^2_0)}{\left(\frac{G\zeta_0}{2A}\right)^2 \cdot (1 - \gamma''_0)^2} \cdot \frac{G\zeta_0}{2A^2} Cr_0 i (1 - \gamma''_0) = \frac{G\zeta_0}{2A^2} Cr_0 i (1 + \gamma''_0),$$

in Uebereinstimmung mit 38b). Wäre hingegen

$$u_1 + \omega_2 \equiv -u_2,$$

so würden wir durch eine ähnliche Rechnung für $\wp'(u_2 + \omega_2)$ den entgegengesetzt gleichen Werth erhalten, was mit Gleichung 38b) in Widerspruch stände. Demnach kann in unserer Congruenz nur das obere Vorzeichen gelten, so dass

$$u_1 + \omega_2 \equiv u_2 \tag{42}$$

ist.

Um ferner die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen diese beiden Constanten u_1 und u_2 liegen, leiten wir mit Hilfe der Gleichungen 30) aus den Formeln 37) und 38) die folgenden beiden Formelsysteme her:

$$43)\left\{\begin{aligned} \wp(u_1 + \omega_2) - e_1 &= \frac{G\zeta_0}{2A}(1 - \gamma''_2) \\ \wp(u_1 + \omega_2) - e_2 &= \frac{G\zeta_0}{2A}(1 - \gamma''_0) \\ \wp(u_1 + \omega_2) - e_3 &= \frac{G\zeta_0}{2A}(1 - \gamma''_1) \end{aligned}\right| \quad \wp'(u_1 + \omega_2) = \frac{G\zeta_0}{2A^2} \cdot Cr_0 i (1 - \gamma''_0)$$

und

$$44)\left\{\begin{aligned} \wp(u_2 + \omega_2) - e_1 &= -\frac{G\zeta_0}{2A}(1 + \gamma''_2) \\ \wp(u_2 + \omega_2) - e_2 &= -\frac{G\zeta_0}{2A}(1 + \gamma''_0) \\ \wp(u_2 + \omega_2) - e_3 &= -\frac{G\zeta_0}{2A}(1 + \gamma''_1) \end{aligned}\right| \quad \wp'(u_2 + \omega_2) = \frac{G\zeta_0}{2A^2} \cdot Cr_0 i (1 + \gamma''_0).$$

Aus 43) folgt, dass

$$e_2 < \wp(u_1 + \omega_2) < e_1$$

und dass, wenn wir r_0 als positiv annehmen, $\wp'(u_1 + \omega_2)$ positiv imaginär ist (d. h. gleich i, multiplicirt mit einer reellen positiven Grösse); mithin liegt $u_1 + \omega_2$ zwischen den Grenzen ω und $\omega + \omega'$, d. h. u_1 zwischen $-\omega'$ und 0, oder, wenn wir hierfür den congruenten Werth im ersten Periodenparallelogramm wählen, zwischen den Grenzen ω' und $2\omega'$. Ebenso ergiebt sich aus 44), dass

$$-\infty < \wp(u_2 + \omega_2) < e_3$$

und dass $\wp'(u_2 + \omega_2)$ positiv imaginär ist; folglich liegt $u_2 + \omega_2$ zwischen den Grenzen ω' und $2\omega'$, also u_2 zwischen den Grenzen $-\omega$ und $-\omega + \omega'$, wofür wir wieder das congruente Intervall ω bis $\omega + \omega'$ im ersten Periodenparallelogramm setzen können.* Hieraus folgt, dass die Grössen u_1 und u_2 von der Form sind:

45) $$u_1 = \omega' + wi, \quad u_2 = \omega + wi,$$

wo w eine positive reelle Grösse ist, die innerhalb des Intervalls

46) $$0 < w < \frac{\omega'}{i}$$

liegt. Durch diese Gleichungen 45) wird auch in der That der Congruenz 42) Genüge geleistet.

Die Grösse w, auf welche wir hiermit die beiden Constanten u_1 und u_2 reducirt haben, lässt sich durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Zu dem Zwecke führen wir die Substitution 45) in einer der Gleichungen 43) oder 44) aus. Am geeignetsten dazu ist die Gleichung 44a); setzen wir in dieser $u_2 = wi + \omega$, so erhalten wir, da

$$\wp(wi + \omega') - e_1 = \frac{\sigma_1^2(wi + \omega')}{\sigma^2(wi + \omega')} = -(e_1 - e_3)\frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_3^2(wi)}$$

ist,

$$(e_1 - e_3) \cdot \frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_3^2(wi)} = \frac{G\zeta_0}{2A}(1 + \gamma''_2)$$

oder mit Hilfe von 30b)

$$\frac{\sigma_3^2(wi)}{\sigma_2^2(wi)} = \frac{\gamma''_2 - \gamma''_1}{1 + \gamma''_2} = \varepsilon^2,$$

wo

---

* Bei der obigen Intervallbestimmung, die in ähnlicher Weise auch bei sämmtlichen, auf elliptische Functionen führenden Problemen vorkommt, bedient man sich zweckmässig einer schematischen Darstellung der Functionswerthe von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ im ersten Periodenparallelogramm, wie sie in den Figuren 11a, 11b und 11c gegeben ist; dieselbe gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Grössen e_1, e_2, e_3 sämmtlich reell sind, was im vorliegenden Problem der Fall ist. Fig. 11a stellt die Ebene des Arguments u dar, Fig. 11b die correspondirenden Werthe der Function $\wp(u)$ und Fig. 11c diejenigen der Function $\wp'(u)$. Unter ε und $\sim$ sind positive reelle Grössen zu verstehen, die sich den Grenzen 0 und ∞ nähern, wenn sich die Stelle, an welcher der betreffende Functionswerth steht, nach dem benachbarten kritischen Punkte hin bewegt. Die Art der Verwendung dieses Schemas ist aus der Einrichtung desselben unmittelbar ersichtlich. Um z. B. in unserem Problem u_1 zu bestimmen, berücksichtigen wir zunächst, dass $\wp(u_1 + \omega_2)$ zwischen den Grenzen e_1 und e_2 liegt; nach Fig. 11b ist dies aber nur für solche Argumente $u_1 + \omega_2$ der Fall, die entweder in dem Intervalle $0 \ldots \omega + \omega'$ oder in dem Intervalle $\omega + \omega' \ldots \omega + 2\omega'$ liegen. Zu dem ersten dieser beiden Intervalle gehören nach Fig. 11c positiv imaginäre Werthe, zu dem zweiten negativ imaginäre Werthe von $\wp'(u_1 + \omega_2)$; da nun $\wp'(u_1 + \omega_2)$ positiv imaginär sein soll, so gilt für das Argument $u_1 + \omega_2$ nur das erste Intervall.

47) $$\varepsilon = \sqrt{\frac{\gamma''_2 - \gamma''_1}{1 + \gamma''_2}}$$

ein positiver echter Bruch ist. Hieraus ergiebt sich, da für solche Werthe von w, die innerhalb des Intervalls 46) liegen, $\sigma(wi)$ positiv imaginär, hingegen $\sigma_1(wi)$, $\sigma_2(wi)$ und $\sigma_3(wi)$ positiv reell sind, dass $\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)}$ positiv reell, also

48) $$\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = \varepsilon$$

ist. Bezeichnen wir die Function $\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)}$ für variable Werthe des Arguments w mit x, so genügt diese Function der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 = (e_1 - e_3)(1 - x^2)(1 - \varkappa'^2 x^2),$$

wo nach der in der Theorie der elliptischen Functionen üblichen Bezeichnung unter $\varkappa'^2$ der positive echte Bruch

49) $$\varkappa'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{\gamma''_2 - \gamma''_0}{\gamma''_2 - \gamma''_1}$$

zu verstehen ist. Berücksichtigen wir nun, dass der Differentialquotient

$$\frac{dx}{dw} = \frac{d}{dw}\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = i(e_2 - e_3) \cdot \frac{\sigma(wi)\,\sigma_1(wi)}{\sigma_2{}^2(wi)}$$

zufolge der obigen Bemerkung einen negativen reellen Werth besitzt, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dw} = -\sqrt{e_1 - e_3} \cdot \sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa'^2 x^2)},$$

mithin

50) $$w = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa'^2 x^2)}},$$

wo den Quadratwurzeln ihr positiver Werth beizulegen ist.

Nachdem somit w in einer zur Berechnung sehr einfachen Form dargestellt ist, wollen wir in dem obigen Ausdrucke für $\alpha'' + i\beta''$ die Constanten u_1 und u_2 durch w ersetzen. Es ergiebt sich alsdann, da

$$\sigma(u - u_1) = \sigma(u - wi - \omega') = -\sigma(\omega')\, e^{-\eta'(u - wi)} \cdot \sigma_3(u - wi),$$
$$\sigma(u - u_2) = \sigma(u - wi - \omega) = -\sigma(\omega)\, e^{-\eta(u - wi)} \cdot \sigma_1(u - wi),$$

ferner

$$\sigma_2(u_1) = \sigma_2(wi + \omega') = e^{\eta' wi + \eta_2 \omega'} \cdot \frac{\sigma(\omega)}{\sigma(\omega_2)}\, \sigma_1(wi),$$

$$\sigma_2(u_2) = \sigma_2(wi + \omega) = e^{\eta wi + \eta_2 \omega} \cdot \frac{\sigma(\omega')}{\sigma(\omega_2)}\, \sigma_3(wi),$$

also

$$\frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} = \eta' + \frac{\sigma'_1(wi)}{\sigma_1(wi)} \quad \text{und} \quad \frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)} = \eta + \frac{\sigma'_3(wi)}{\sigma_3(wi)}$$

ist, für $\alpha'' + i\beta''$ nach einer leichten Reduction der folgende Werth:

$$\alpha'' + i\beta'' = \overline{C}_0 \cdot \frac{\sigma_1(u - wi)\,\sigma_3(u - wi)}{\sigma_2^{\,2}(u)} \cdot e^{u\left\{\frac{\sigma'_1(wi)}{\sigma_1(wi)} + \frac{\sigma'_3(wi)}{\sigma_3(wi)}\right\}},$$

wo eine neue Constante $\overline{C_0}$ an Stelle der früheren Constanten C_0 getreten ist. Der Werth dieser Constanten bestimmt sich leicht aus den Anfangsbedingungen. Da nämlich für $t = t_0$ $u = 0$ ist, so wird

$$\alpha''_0 + i\beta''_0 = \overline{C}_0 \cdot \sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)$$

und somit

$$\frac{\alpha'' + i\beta''}{\alpha''_0 + i\beta''_0} = \frac{\sigma_1(u - wi)\,\sigma_3(u - wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)\,\sigma_2^{\,2}(u)} \cdot e^{u\left\{\frac{\sigma'_1(wi)}{\sigma_1(wi)} + \frac{\sigma'_3(wi)}{\sigma_3(wi)}\right\}}. \tag{51}$$

Statt der σ-Functionen können wir schliesslich noch die zur numerischen Berechnung geeigneteren Jacobi'schen ϑ-Functionen einführen; dieselben seien definirt durch folgende Reihenentwickelungen:

$$52)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega} \pm \ldots, \\ \vartheta_1(x) = \quad 2q^{1/4}\sin\frac{\pi x}{2\omega} - 2q^{9/4}\sin\frac{3\pi x}{2\omega} + 2q^{25/4}\sin\frac{5\pi x}{2\omega} \mp \ldots, \\ \vartheta_2(x) = \quad 2q^{1/4}\cos\frac{\pi x}{2\omega} + 2q^{9/4}\cos\frac{3\pi x}{2\omega} + 2q^{25/4}\cos\frac{5\pi x}{2\omega} + \ldots, \\ \vartheta_3(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{\omega} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega} + 2q^{9/4}\cos\frac{3\pi x}{\omega} + \ldots, \end{cases}$$

wo $q = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ ist. Dann besteht zwischen den σ- und ϑ-Functionen folgender Zusammenhang:

$$53)\quad \begin{cases} \sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1(0)}, & \sigma_1(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_2(0)}, \\ \sigma_2(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3(0)}, & \sigma_3(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}; \end{cases}$$

ferner ist

$$54)\quad \begin{cases} \vartheta'_1(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{(e_2 - e_3)(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}, \\ \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{e_2 - e_3}, \\ \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_3}, \\ \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{e_1 - e_2}, \end{cases}$$

also

$$\vartheta'_1(0) = \frac{\pi}{2\omega} \cdot \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0). \tag{55}$$

Durch Ausführung dieser Substitution erhält der Ausdruck 51) folgende definitive Form:

$$56)\quad \frac{\alpha''+i\beta''}{\alpha''_0+i\beta''_0}=\frac{\vartheta_3^2(0)}{\vartheta(wi)\,\vartheta_2(wi)}\cdot\frac{\vartheta(u-wi)\,\vartheta_2(u-wi)}{\vartheta_3^2(u)}\cdot e^{u\left\{\frac{\vartheta'(wi)}{\vartheta(wi)}+\frac{\vartheta'_2(wi)}{\vartheta_2(wi)}\right\}}.$$

Um ferner in derselben Weise auch den Werth von γ'' durch ϑ-Functionen darzustellen, berücksichtigen wir, dass

$$p(u)-e_2=\frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma_2(u)}$$

ist; mithin ergiebt sich aus Gleichung 34) unmittelbar

$$57)\qquad \gamma''=\gamma''_0-\frac{G\zeta_0}{2A}(1-\gamma''^2_0)\cdot\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)}$$

oder mit Hilfe von 53) und 54)

$$58)\qquad \gamma''=\gamma''_0-\sqrt{1-\gamma''^2_0}\cdot\frac{\vartheta_1^2(u)}{\vartheta_3^2(u)}.$$

Aus dieser letzten Formel ergiebt sich, da

$$\vartheta_1(u+2\omega)=-\vartheta_1(u)\ \text{ und }\ \vartheta_3(u+2\omega)=\vartheta_3(u)$$

ist, dass γ'' die reelle Periode 2ω in Bezug auf u oder t besitzt, dass also in irgend einem Zeitmoment die Neigung der ζ-Axe gegen die Vertikale ebenso gross ist, wie vor oder nach Ablauf von je 2ω Zeiteinheiten. Da ferner für reelle Werthe von u die Function $\vartheta_1(u)$ nur dann verschwindet, wenn u die Form $u=2n\omega$ besitzt, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ergiebt sich, dass für $u=2\omega$, $u=4\omega$, $u=6\omega$ etc. (d. h. für $t=t_0+2\omega$, $t=t_0+4\omega$ etc.) der Werth von γ gleich dem Anfangswerth γ''_0 ist, welche Eigenschaft auch aus der Periodicität von γ'' hervorgeht. Da endlich nach bekannten Formeln

$$\vartheta_1(u+\omega)=\vartheta_2(u)\ \text{ und }\ \vartheta_3(u+\omega)=\vartheta(u),$$

ferner

$$\varkappa=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}\ \text{ und }\ \varkappa'=\sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}=\frac{\vartheta^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}$$

ist, so wird für $u=\omega$, also auch für $u=3\omega$, $u=5\omega$ etc.

$$\gamma''=\gamma''_0-\frac{\varkappa}{\varkappa'}\cdot\sqrt{1-\gamma''^2_0}=\gamma''_0-\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_2}}\cdot\sqrt{1-\gamma''^2_0}$$

$$=\gamma''_0-\sqrt{\frac{\gamma''_0-\gamma''_1}{\gamma''_2-\gamma''_0}}\cdot\sqrt{1-\gamma''^2_0}$$

$$=\gamma''_0-\sqrt{\frac{\gamma''_0-\gamma''_1}{\gamma''_2-\gamma''_0}}\cdot\sqrt{(\gamma''_0-\gamma''_1)(\gamma''_2-\gamma''_0)}=\gamma''_0-(\gamma''_0-\gamma''_1),$$

d. h.

$$\gamma''=\gamma''_1;$$

mithin erreicht γ'' für $t=t_0+\omega$, $t=t_0+3\omega$ etc. seinen kleinsten Werth γ''_1, also die Neigung der ζ-Axe gegen die Vertikale ihren grössten Werth.

Um in derselben Weise das Periodicitätsverhältniss der Grösse $\alpha'' + i\beta''$ zu untersuchen, empfiehlt es sich, auf Formel 41) zurückzugehen. Denken wir uns den Schwerpunkt des Körpers auf die horizontale xy-Ebene projicirt und bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten der Projection mit x, y, die Polarcoordinaten hingegen mit ϱ, φ (vergl. Fig. 9), so ist

$$\alpha'' = \frac{x}{\zeta_0}, \quad \beta'' = \frac{y}{\zeta_0},$$

$$\alpha'' + i\beta'' = \frac{x + iy}{\zeta_0} = \frac{\varrho}{\zeta_0} e^{i\varphi}.$$

Demgemäss erhält die Formel 41) folgende Gestalt:

$$59) \qquad \frac{\varrho}{\zeta_0} e^{i\varphi} = C_0 . \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2{}^2(u)} e^{\lambda u},$$

wo für den Augenblick λ zur Abkürzung gesetzt ist für den Ausdruck

$$60) \qquad \lambda = \frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} + \frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)}.$$

Ersetzen wir nun in 59) u durch $u + 2n\omega$, so bleibt auf der linken Seite infolge der Periodicität von γ'' der Werth von ϱ unverändert; hingegen wird φ einen andern Werth erhalten, den wir mit φ_n bezeichnen wollen. Bei der Transformation der rechten Seite berücksichtigen wir, dass

$$\sigma(u+2n\omega) = e^{\frac{\eta(u+2n\omega)^2}{2\omega}} . \frac{\vartheta_1(u+2n\omega)}{\vartheta'_1(0)}$$

$$= e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} + 2n\eta u + 2n^2\eta\omega} . (-1)^n \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta'_1(0)} = (-1)^n e^{2n\eta u + 2n^2\eta\omega} . \sigma(u),$$

$$\sigma_2(u+2n\omega) = e^{\frac{\eta(u+2n\omega)^2}{2\omega}} . \frac{\vartheta_3(u+2n\omega)}{\vartheta_3(0)}$$

$$= e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} + 2n\eta u + 2n^2\eta\omega} . \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3(0)} = e^{2n\eta u + 2n^2\eta\omega} . \sigma_2(u)$$

ist; mithin wird

$$\frac{\varrho}{\zeta_0} e^{i\varphi_n} = C_0 . e^{-2n\eta(u_1+u_2)} . \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2{}^2(u)} e^{\lambda(u+2n}$$

$$= \frac{\varrho}{\zeta_0} e^{i\varphi + 2n\lambda\omega - 2n\eta(u_1+u_2)},$$

also

$$\varphi_n = \varphi + n\bar{\varphi},$$

wo

$$61) \qquad \bar{\varphi} = \frac{1}{i}\{2\lambda\omega - 2\eta(u_1+u_2)\}$$

ist. Hieraus ersehen wir, dass im Verlauf von 2ω Zeiteinheiten der Winkel φ immer um die constante Grösse $\bar{\varphi}$ zunimmt. Da nun

$$u_1 = wi + \omega' \text{ und } u_2 = wi + \omega,$$

also

$$\frac{\sigma'_2(u_1)}{\sigma_2(u_1)} = \frac{\eta u_1}{\omega} + \frac{\vartheta'_3(u_1)}{\vartheta_3(u_1)} = \frac{\eta wi}{\omega} + \eta' + \frac{\vartheta'_2(wi)}{\vartheta_2(wi)},$$

$$\frac{\sigma'_2(u_2)}{\sigma_2(u_2)} = \frac{\eta u_2}{\omega} + \frac{\vartheta'_3(u_2)}{\vartheta_3(u_2)} = \frac{\eta wi}{\omega} + \eta + \frac{\vartheta'(wi)}{\vartheta(wi)}$$

ist, so wird

$$\lambda = \frac{2\eta wi}{\omega} + \eta_2 + \frac{\vartheta'(wi)}{\vartheta(wi)} + \frac{\vartheta'_2(wi)}{\vartheta_2(wi)},$$

mithin

$$\text{62)} \qquad \bar{\varphi} = \frac{2\omega}{i}\left\{\frac{\vartheta'(wi)}{\vartheta(wi)} + \frac{\vartheta'_2(wi)}{\vartheta_2(wi)}\right\} - \pi. —$$

Nachdem somit die Grössen α'', β'', γ'' als Functionen von t bestimmt sind, haben wir zur vollständigen Lösung unseres Problems noch die Componenten p und q der Rotationsgeschwindigkeit, sowie die Richtung ihrer in der $\xi\eta$-Ebene liegenden Resultante $v = \sqrt{p^2 + q^2}$ zu ermitteln. Aus den beiden ersten Gleichungen 16)

$$A\frac{dp}{du} = (A - C)\,q r_0 + G\zeta_0\gamma', \quad A\frac{dq}{du} = (C - A)\,p r_0 - G\zeta_0\gamma$$

ergiebt sich

$$A\frac{d}{du}(p + qi) = -(A - C)(p + qi)\,r_0 i - G\zeta_0 i(\gamma + \gamma' i),$$

also

$$A\frac{d}{du}\,lg(p + qi) = -(A - C)\,r_0 i - G\zeta_0 i.\frac{\gamma + \gamma' i}{p + qi}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\gamma + \gamma' i}{p + qi} = \frac{(\gamma + \gamma' i)(p - qi)}{p^2 + q^2} = \frac{(p\gamma + q\gamma') + i(p\gamma' - q\gamma)}{p^2 + q^2} = \frac{\frac{Cr_0}{A}(\gamma''_0 - \gamma'') - i\frac{d\gamma''}{du}}{\frac{2G\zeta_0}{A}(\gamma''_0 - \gamma'')},$$

mithin wird

$$\text{63)} \qquad \frac{d}{du}\,lg(p + qi) = \left(\frac{C}{2A} - 1\right)r_0 i - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\gamma''}{du}}{\gamma''_0 - \gamma''} = \psi(u),$$

wo $\psi(u)$ wieder eine doppeltperiodische Function von u bedeutet. Um dieselbe in ihre einfachen Elemente zu zerlegen, könnten wir ebenso, wie früher bei der Function $\varphi(u)$ verfahren. Einfacher ist es jedoch hier, den oben gefundenen Werth von γ'' in die Function $\psi(u)$ einzusetzen. Da nämlich $\psi(u)$ auf die Form gebracht werden kann

$$\psi(u) = \left(\frac{C}{2A} - 1\right)r_0 i + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\,lg(\gamma''_0 - \gamma''),$$

und da nach 57)

$$\gamma''_0 - \gamma'' = \frac{G\zeta_0}{2A}(1 - \gamma''^2_0)\cdot\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_2^2(u)}$$

ist, so ergiebt sich durch Substitution dieses Werthes

$$\frac{d}{du}\,lg(p + qi) = \left(\frac{C}{2A} - 1\right)r_0 i + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\sigma'_2(u)}{\sigma_2(u)}.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit du und integriren, so erhalten wir

$$64)\qquad p+qi = C_1 \cdot \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)}\, e^{u\left(\frac{C}{2A}-1\right) r_0 i},$$

wo C_1 eine Integrationsconstante bezeichnet, welche zufolge der Gleichung 21)

$$p^2+q^2 = \frac{2G\zeta_0}{A}(\gamma''_0-\gamma'') = \frac{G^2\zeta_0^2}{A^2}(1-\gamma''^2_0)\cdot\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_2^2(u)}$$

den Werth besitzt

$$65)\qquad C_1 = \frac{G\zeta_0}{A}.\sqrt{1-\gamma''^2_0}. -$$

Um endlich noch die Richtung der Resultante $v=\sqrt{p^2+q^2}$ gegen die Axen der x, y, z zu bestimmen, bilden wir die Richtungscosinus

$$66)\quad \begin{cases} \cos(v,x) = \cos(v,\xi)\cos(x,\xi)+\cos(v,\eta)\cos(x,\eta)+\cos(v,\zeta)\cos(x,\zeta) \\ \qquad = \dfrac{p\alpha+q\alpha'}{v}, \\ \cos(v,y) = \cos(v,\xi)\cos(y,\xi)+\cos(v,\eta)\cos(y,\eta)+\cos(v,\zeta)\cos(y,\zeta) \\ \qquad = \dfrac{p\beta+q\beta'}{v}, \\ \cos(v,z) = \cos(v,\xi)\cos(z,\xi)+\cos(v,\eta)\cos(z,\eta)+\cos(v,\zeta)\cos(z,\zeta) \\ \qquad = \dfrac{p\gamma+q\gamma'}{v} = \dfrac{Cr_0}{Av}(\gamma''_0-\gamma''). \end{cases}$$

Nun folgt aber aus Gleichung 16), dass

$$A\left(\alpha\frac{dp}{dt}+\alpha'\frac{dq}{dt}+\alpha''\frac{dr}{dt}\right) = r_0(A-C)(q\alpha-p\alpha')+G\zeta_0(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)$$

oder

$$A\frac{d}{dt}(p\alpha+q\alpha'+r\alpha'') = r_0(A-C)\frac{d\alpha''}{dt}-G\zeta_0\beta''$$

oder endlich

$$67)\quad \begin{cases} A\dfrac{d}{dt}(p\alpha+q\alpha') = -Cr_0\dfrac{d\alpha''}{dt}-G\zeta_0\beta'' \text{ und ebenso} \\ A\dfrac{d}{dt}(p\beta+q\beta') = -Cr_0\dfrac{d\beta''}{dt}+G\zeta_0\alpha'' \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt

$$68)\quad A\frac{d}{dt}\{(p\alpha+q\alpha')+i(p\beta+q\beta')\} = -Cr_0\frac{d}{dt}(\alpha''+i\beta'')+G\zeta_0 i(\alpha''+i\beta'').$$

Da nun $\alpha''+i\beta''$ eine bekannte Function von t ist, so ist die Integration dieser Differentialgleichung leicht ausführbar und ergiebt die den gesuchten Richtungscosinus $\cos(v,x)$ und $\cos(v,y)$ proportionalen Grössen $p\alpha+q\alpha'$ und $p\beta+q\beta'$ ebenfalls als Functionen von t. Hiermit aber ist die obige Behauptung, dass die Richtung von v durch Angabe der Werthe von α'', β'', γ'' mit bestimmt ist, bewiesen, und folglich das gestellte Problem als gelöst zu betrachten.

Kleinere Mittheilungen.

VIII. Eine Polynomentwickelung.

Es soll $(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})^n$ entwickelt werden, wenn m und n ganze positive Zahlen sind. Wird

$$1)\qquad \left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

gesetzt, so muss eine independente Darstellung für a_k gesucht werden.

1. Man hat

$$\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

und mit Hilfe des binomischen Satzes

$$2)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n)_k x^{mk} &= \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k . \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k x^k \\ &= \sum_{h=0}^{h=nm} x^h \sum_{k=0}^{k=h} (-1)^{h-k} (n)_{h-k} . a_k , \end{aligned}$$

wenn unter $(n)_k$, wie gewöhnlich, der Ausdruck $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$ verstanden wird. Ist nun

$$h = mp+q, \quad q \begin{cases} \geqq 0, \\ < m, \end{cases}$$

so folgt aus 2) sofort das System

$$3)\qquad \sum_{k=0}^{k=h} (-1)^k a_k (n)_{h-k} = \begin{cases} 0 \text{ falls } q>0, \\ (-1)^{p+h}(n)_p \text{ falls } q=0, \end{cases}$$

$$h = 0, 1, 2, \ldots mn,$$

wo die a_k zu bestimmen sind. Theilen wir hier in Classen von je m Gleichungen ab und untersuchen wir die einzelnen Classen.

Erste Classe: $p=0$, $h=0, 1, 2, \ldots (m-1)$;

$$4)\qquad \begin{cases} a_0 & = 1, \\ a_0(n)_1 - a_1 & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_0(n)_k - a_1(n)_{k-1} + \ldots + (-1)^k a_k & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_0(n)_{m-1} - a_1(n)_{m-2} + \ldots + (-1)^k a_k (n)_{m-k-1} + \ldots + (-1)^{m-1} a_{m-1} & = 0. \end{cases}$$

Man findet daraus successive

$$a_0 = 1 = (n-1)_0,\quad a_1 = (n)_1,\quad a_2 = (n+1)_2,\quad a_3 = (n+2)_3.$$

Um zu beweisen, dass für die erste Classe allgemein

$$5)\qquad a_k = (n+k-1)_k$$

ist, werde angenommen, diese Identität gelte für die Indices 0, 1, 2, ... $(k-1)$; dann ist a_k zu bestimmen aus der Gleichung

$$6)\qquad \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} + (-1)^k a_k = 0.$$

Man findet nun leicht

$$(n)_k - (n)_1 (n)_{k-1} = -(n+1)_k (k-1)_1,$$
$$(n)_k - (n)_1 (n)_{k-1} + (n+1)_2 (n)_{k-2} = (n+2)_k (k-1)_2,$$

was auf die Vermuthung führt, es sei allgemein

$$7)\qquad \sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i (n+i-1)_i = (-1)^r (n+r)_k (k-1)_r.$$

Setzt man die Richtigkeit dieses Ausdrucks für die Indices 0, 1, 2, .. r voraus, so hat man

$$\sum_{i=0}^{i=r+1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} = (-1)^r (n+r)_k (k-1)_r + (-1)^{r+1} (n+r)_{r+1} (n)_{k-r-1}$$
$$= (-1)^r \frac{(n+r)(n+r-1)\dots(n+r-k+2)}{(k-r-1)!} \left[\frac{(n+r-k+1)(k-1)_r}{k(k-1)\dots(k-r)} - \frac{n}{(r+1)!}\right].$$

Der Inhalt der grossen Klammer kann geschrieben werden

$$\frac{(n+r-k+1)(k-1)(k-2)\dots(k-r)}{k(k-1)\dots(k-r).r!} - \frac{n}{(r+1)!} = \frac{1}{r!}\left(\frac{n+r-k+1}{k} - \frac{n}{r+1}\right)$$
$$= -\frac{(n+r+1)(k-r-1)}{k.(r+1)!}.$$

Fügt man hier im Zähler und Nenner die Factoren $(k-1)(k-2)\dots(k-r)$ bei, so entsteht endlich

$$\sum_{i=0}^{i=r+1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} = (-1)^{r+1} (n+r+1)_k (k-1)_{r+1},$$

d. h. das, was aus 7) wird, wenn man r durch $r+1$ ersetzt. Die Gleichung 7) gilt demnach allgemein, und man hat dann in 6)

$$8)\qquad (-1)^{k-1}(n+k-1)_k (k-1)_{k-1} + (-1)^k a_k = 0,\quad a_k = (n+k-1)_k$$

allgemein giltig für $k = 0, 1, 2, \dots (m-1)$.

Zweite Classe: $p=1$, $h = m, m+1, \dots 2m-1$;

$$9)\quad \begin{cases} a_0 (n)_m - a_1 (n)_{m-1} + \dots + (-1)^m a_m = (-1)^{m-1} (n)_1, \\ a_0 (n)_{m+1} - a_1 (n)_m + \dots + (-1)^{m+1} a_{m+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 (n)_{m+k} - a_1 (n)_{m+k-1} + \dots + (-1)^{m+k} a_{m+k} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 (n)_{2m-1} - a_1 (n)_{2m-2} + \dots + (-1)^{2m-1} a_{2m-1} = 0. \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass, wenn f einen noch zu bestimmenden Factor bedeutet, in Analogie mit 8) die Relation gelten muss

$$a_{m+k} = (n+m+k-1)_{m+k} + (n)_1 . f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots (m-1).$$

Durch directe Ausrechnung mit Hilfe der bei der ersten Classe angestellten Betrachtungen findet man

$$\begin{aligned} a_m &= (n+m-1)_m - (n)_1 (n-1)_0, \\ a_{m+1} &= (n+m)_{m+1} - (n)_1 (n)_1, \\ a_{m+2} &= (n+m+1)_{m+2} - (n)_1 (n+1)_2 \end{aligned}$$

und schliesst daraus, dass allgemein

$$\text{10)} \qquad a_{m+k} = (n+m+k-1)_{m+k} - (n)_1 (n+k-1)_k$$

zu erwarten ist. Gilt diese Relation für $k = 0, 1, 2, \ldots (k-1)$, so hat man zur Bestimmung von a_{m+k} die Gleichung

$$\begin{aligned} a_0 (n)_{m+k} - a_1 (n)_{m+k-1} + \cdot \cdot + (-1)^{m-1} a_{m-1} (n)_{k+1} \\ + (-1)^m a_m (n)_k + (-1)^{m+1} a_{m+1} (n)_{k-1} + \ldots + (-1)^{m+k-1} a_{m+k-1} (n)_1 \\ + (-1)^{m+k} a_{m+k} = 0. \end{aligned}$$

Hierin liefern die ersten Bestandtheile aller a_h von $h = 0$ bis $h = m+k-1$, wie in der ersten Classe, den Werth $(-1)^{m+k-1} (n+m+k-1)_{m+k}$.

Die zweiten Bestandtheile der a_h von $h = m$ bis $h = m+k-1$ liefern gemäss 10)

$$\begin{aligned} - (n)_1 [(-1)^m (n)_k + (-1)^{m+1} (n)_1 (n)_{k-1} + (-1)^{m+2} (n+1)_2 (n)_{k-2} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{m+k-1} (n+k-2)_{k-1} (n)_1] \end{aligned}$$

oder

$$- (-1)^m (n)_1 \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i},$$

d. h. nach 7) den Werth

$$- (-1)^{m+k-1} (n)_1 (n+k-1)_k (k-1)_{k-1},$$

so dass endlich entsteht

$$\text{11)} \qquad a_{m+k} = (n+m+k-1)_{m+k} - (n)_1 (n+k-1)_k .$$

Die Gleichung 10) gilt also allgemein für $k = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$.

Dritte Classe: $p = 2, \quad h = 2m, 2m+1, \ldots 3m-1.$

Die erste Gleichung der dritten Classe lautet

$$a_0 (n)_{2m} - a_1 (n)_{2m-1} + \ldots + a_{2m} = (n)_2 .$$

Man findet durch die nämliche Untersuchung, wie in der zweiten Classe, sehr leicht

$$\text{12)} \quad a_{2m+k} = (n+2m+k-1)_{2m+k} - (n)_1 (n+m+k-1)_{m+k} + (n)_2 (n+k-1)_k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots (m-1) \text{ u. s. f.}$$

Die bisherigen Resultate lassen sich in etwas veränderter Gestalt folgendermassen schreiben:

Erste Classe: $k = q \begin{smallmatrix} \geqq 0, \\ < m, \end{smallmatrix}$

$a_q = (n-1+q)_{n-1}$.

Zweite Classe: $k = m + q$,

$a_{m+q} = (n-1+m+q)_{n-1} - (n)_1 (n-1+q)_{n-1}$.

Dritte Classe: $k = 2m + q$,

$a_{2m+q} = (n-1+2m+q)_{n-1} - (n)_1 (n-1+m+q)_{n-1} + (n)_2 (n-1+q)_{n-1}$.

Allgemein hat man also

$$13)\qquad a_{pm+q} = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i (n)_i (n-1+pm+q-mi)_{n-1}$$

oder kürzer

$$14)\qquad a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

Die Summation bricht von selbst ab, da $(n)_k = 0$ für $n < k$.

Es mag noch bemerkt werden, dass jedenfalls immer

$$15)\qquad a_k = a_{n(m-1)-k}$$

sein muss, da das zu potenzirende Polynom reciprok ist.

Schliesslich hat man

$$16)\qquad \left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} x^k \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

2. Ein anderer, vom vorhergehenden wesentlich verschiedener Weg zur Lösung der Aufgabe ist folgender.

Aus 1) ergiebt sich, dass a_k nichts Anderes ist, als die Angabe, wie oft die Summe k aus je n Elementen, welche der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots (m-1)$ zu entnehmen sind, variationsmässig mit Wiederholungen gebildet werden kann; oder auch:

Es ist a_k die Lösungszahl für die unbestimmte Gleichung

$$17)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} y_i = k$$

mit den Bedingungen $y_i \begin{smallmatrix} \geqq 0, \\ < m. \end{smallmatrix}$

Bei den unbestimmten Gleichungen wird der Werth Null für die Unbekannten in der Regel ausgeschlossen; wir setzen deshalb

$$y_i = z_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

und haben uns dann mit der Gleichung

$$18)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} z_i = n + k$$

und den Bedingungen

$$z_i \begin{smallmatrix} \geqq 1, \\ < m+1 \end{smallmatrix}$$

zu beschäftigen. Bezeichnet man die Anzahl sämmtlicher Lösungen für

$$\sum_{i=1}^{i=n} z_i = u$$

durch $f_n(u)$, so hat man für

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= u \qquad f_2(u) = u-1\,, \\ z_1 + z_2 + z_3 &= u \qquad f_3(u) = (u-1)_2\,, \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= u \qquad f_4(u) = (u-1)_3 \end{aligned}$$

u. s. f.,

d. h. für

$$19)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} z_i = u \qquad f_n(u) = (u-1)_{n-1}.$$

Es sei nun die Anzahl der Lösungen, in denen p bestimmte z aus der Reihe $z_1, z_2, \ldots z_n$ den Werth m übersteigen, gleich ψ_p, dann ist $\psi_0 = a_k$ und

$$20)\qquad f_n(u) = (u-1)_{n-1} = \psi_0 + (n)_1 \psi_1 + (n)_2 \psi_2 + (n)_3 \psi_3 + \cdots$$

Wird nun etwa $z_n = m + \xi_n$ gesetzt, so entsteht die Gleichung

$$21)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} z_i + \xi_n = u - m,$$

deren Lösungszahl $(u-m-1)_{n-1}$ sich zusammensetzt aus $\psi_1, \psi_2, \ldots$ derart, dass

$$(u-m-1)_{n-1} = \psi_1 + (n-1)_1 \psi_2 + (n-1)_2 \psi_3 + \cdots,$$

da es sich jetzt nur noch um $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ handelt. Es ist klar, wie man hier weitergehen kann; man kommt dadurch auf das System

$$22)\quad \left\{ \begin{aligned} (u-1)_{n-1} &= \psi_0 + (n_1)\psi_1 + (n_2)\psi_2 + (n)_3 \psi_3 + \cdots, \\ (u-m-1)_{n-1} &= \psi_1 + (n-1)_1 \psi_2 + (n-1)_2 \psi_3 + \cdots, \\ (u-2m-1)_{n-1} &= \psi_2 + (n-2)_1 \psi_3 + \cdots \end{aligned} \right.$$

u. s. f.

Es werde hier die i^{te} Gleichung mit $(-1)^{i-1}(n)_{i-1}$ multiplicirt und Alles addirt; bemerkt man, dass

$$\sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i (n-i)_{h-i} (n)_i = \frac{n!}{h!\,(n-h)!} \sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i \frac{h!}{i!\,(h-i)!}$$

$$= (n)_h \sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i (h)_i = 0,$$

mit alleiniger Ausnahme des Falles $h = 0$, so resultirt, wenn nun für u der Werth $n+k$ eingeführt wird,

$$23)\qquad \psi_0 = a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n+k-1-mi)_{n-1},$$

genau wie früher.

3. Die Aufgabe findet in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Verwendung.

Es seien n Würfel vorhanden; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit w, mit diesen n Würfeln k Augen zu werfen?

Entwickelt man

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n=\sum_{h=0}^{h=5n} b_h x^{n+h},$$

so hat man als Zahl q der günstigen Fälle den Coefficienten von x^k, d. h.

$$q=b_{k-n}.$$

Man hat nun

$$\left(\sum_{h=0}^{h=5} x^h\right)^n=\sum_{h=0}^{h=5n} b_h x^h=\sum_{h=0}^{h=5n} a_h x^h,$$

also

$$q=a_{k-n}, \quad m=6,$$

$$24)\qquad q=\sum_{i=0}(-1)^i (n)_i (k-1-6i)_{n-1},$$

oder auch nach der Bemerkung in 15)

$$a_{k-n}=a_{nm-k},$$

$$25)\qquad q=\sum_{i=0}(-1)^i (n)_i (7n-k-1-6i)_{n-1}$$

und dann

$$26)\qquad w=\frac{q}{6^n}.$$

Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln 19 Augen zu werfen?

$$n=4, \quad k=19,$$

$$q=\sum_{i=0}(-1)^i (4)_i (18-6i)_3=(18)_3-4.(12)_3+6(6)_3=56$$

oder

$$q=\sum_{i=0}(-1)^i (4)_i (8-6i)_3 \;=(8)_3=56,$$

$$w=\tfrac{56}{1296}.$$

In der That hat man die Combinationen 1666, 2566, 3466, 3556, 4456 und 4555, welche permutirt $4+12+12+12+12+4=56$ Variationen liefern.

Dorpat, 1. November 1880. K. WEIHRAUCH.

IX. Werth einiger doppelt-orthosymmetrischer Determinanten.

Ist

$$C=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix},$$

so hat man für $a_k=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$C = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2} (n+1)(n+2)}{3 \cdot 2^{n+1}} \left((n+3)^n - (n+1)^n\right),$$

für $a_k = (k+1)^2$

$$C = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2} (n+1)(2n+1)}{12} \left((n+2)^n - n^n\right),$$

für $a_k = \cos(k a)$

$$C = \left(2 \sin \frac{n a}{2}\right)^{n-2} \left(\sin^n \left(\frac{n a}{2}\right) - \sin^n \left(\frac{n-2}{2} a\right)\right),$$

für $a_k = \sin(k a)$

$$C = (-1)^n \left(2 \sin \frac{n a}{2}\right)^{n-2} \left(\cos^n \left(\frac{n a}{2}\right) - \cos^n \left(\frac{n-2}{2} a\right)\right).$$

Man beweist diese Formeln, indem man in

$$C = \prod_{k=1}^{k=n} \left(\sum_{h=0}^{h=n-1} a_h \alpha_k^h \right),$$

wo α_k eine n^{te} Wurzel der Einheit ist, die Summationen ausführt.

Dorpat, 1. November 1880. K. WEIHRAUCH.

X. Ein Satz vom ebenen Viereck.

(Hierzu Taf. II Fig. 12.)

Sei $\angle adc = \alpha$, $\angle abc = \beta$ (Fig. 12).

Macht man $\angle bce = \angle adb$, $\angle cbe = \angle abd$, so ist

$$\triangle abd \sim \triangle ebc,$$

also

$$ad.bc = bd.ce, \quad ab:be = bd:bc,$$

$$\triangle abe \sim \triangle dbc,$$

$$ab.cd = bd.ae,$$

$$\angle aec = \begin{cases} \alpha + \beta, \\ 2\pi - (\alpha + \beta), \end{cases}$$

$$ae^2 + ce^2 - 2ae.ce.\cos(aec) = ac^2,$$

$$(ab.cd)^2 + (ad.bc)^2 - 2ab.bc.cd.da.\cos(\alpha + \beta) = (ac.bd)^2$$

eine Relation zwischen den vier Seiten, beiden Diagonalen und der Summe zweier Gegenwinkel eines Vierecks.

1. Es sei $\alpha + \beta = \pi$, dann entsteht

$$ab.cd + bc.ad = ac.bd,$$

der Satz des Ptolemaeus.

2. Es sei $\alpha + \beta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ so entsteht

$$(ab.cd)^2 + (bc.ad)^2 = (ac.bd)^2.$$

Betragen also in einem ebenen Viereck zwei Gegenwinkel zusammen einen oder drei Rechte, so ist die Summe der Quadrate der Producte je zweier Gegenseiten gleich dem Quadrat des Products der Diagonalen.

Dieser specielle Satz lässt sich auch folgendermassen beweisen.

Es seien in einer Ebene zwei Dreiecke gegeben, deren Ecken a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3, deren Inhalte d und δ sein mögen; heissen die Radien der ihnen umschriebenen Kreise r und ϱ; ist der Winkel, unter dem sich beide Kreise schneiden, gleich φ, und bezeichnet man die Strecke $a_i b_k$ durch s_{ik}, so existirt nach Siebeck (Crelle's Journal 62, S. 153) die Relation

$$r\varrho\, d\delta \cos\varphi = -\tfrac{1}{32}\begin{vmatrix} s^2_{11} & s^2_{12} & s^2_{13} \\ s^2_{21} & s^2_{22} & s^2_{23} \\ s^2_{31} & s^2_{32} & s^2_{33} \end{vmatrix}.$$

Es falle nun a_2 mit b_2, a_3 mit b_3 zusammen, also $s_{22} = s_{33} = 0$, dann sind $s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{13}$ die vier auf einander folgenden Seiten m, n, p, q, s_{11} und $s_{23} = s_{32}$ die Diagonalen s, t eines Vierecks V. Falls nun die Kreise um die beiden Dreiecke, in welche V etwa durch s_{23} getheilt wird, sich rechtwinklig schneiden, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, was, wie man sich leicht überzeugt, darauf hinausläuft, dass dann die Summe zweier Gegenwinkel in V gleich einem oder drei rechten ist, so hat man zufolge obiger Relation

$$0 = \begin{vmatrix} s^2 & m^2 & q^2 \\ n^2 & o & t^2 \\ p^2 & t^2 & o \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad m^2p^2 + n^2q^2 = s^2t^2.$$

Dorpat, 1. November 1880. K. Weihrauch.

XI. Das Reciprocitätsgesetz.

Im Jahre 1877 theilte mir Herr A. Voigt eine Abkürzung des dritten Gauss'schen Reciprocitätsbeweises mit und sprach die Absicht aus, dieselbe der Oeffentlichkeit zu übergeben. Da derselbe aber, der damals in Stuttgart als Versicherungsbeamter thätig war, bald darauf starb, so ist die Veröffentlichung wohl unterblieben, wenigstens ist mir Nichts davon bekannt geworden, weshalb ich seine Methode hier mittheilen will.

Es seien p und q zwei ungerade Primzahlen, und es sei μ die Anzahl der Reste der Zahlen $q, 2q, 3q, \ldots \frac{1}{2}(p-1)q$ in Bezug auf p, welche grösser als $\frac{1}{2}p$ sind, oder (wenn man die kleinsten positiven und negativen Reste betrachtet) welche negativ sind. Ebenso sei ν die Anzahl der kleinsten Reste der Zahlen $p, 2p, \ldots \frac{1}{2}(q-1)p$ in Bezug auf q, welche grösser als $\frac{1}{2}q$ sind. So ist nach Gauss

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu+\nu}.$$

Soll der Rest von kq nach p negativ sein, so ist

$$(k-\tfrac{1}{2})p < hq < kp,$$

und umgekehrt gehören zu solchen ganzen Zahlen h, welche dieser Bedingung genügen, negative Reste. Da h nicht grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sein darf, so kann k nicht grösser als $\frac{1}{2}(q-1)$ werden. Die Anzahl der Zahlen h, welche bei gegebenem k die Ungleichung befriedigen, ist $\left[\frac{kp}{q}\right]-\left[\frac{(k-\frac{1}{2})p}{q}\right]$ und mithin ist

$$\mu=\left[\frac{p}{q}\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]-\left[\frac{\frac{3}{2}p}{q}\right]+\dots$$

$$\dots+\left[\frac{\frac{1}{2}(q-1)}{q}\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}(q-2)p}{q}\right]=\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{sp}{q}\right]-\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right],$$

$$\mu\equiv\sum_s\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]\quad(modulo\,2).$$

Ist nun der Rest von sp nach q kleiner als $\frac{1}{2}q$, so ist

$$\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}\right]-\left[\frac{sp}{q}\right]=\frac{p-1}{2}.$$

Ist der Rest grösser als $\frac{1}{2}q$, was ν-mal eintritt, so ist

$$\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}\right]-\left[\frac{sp}{q}\right]-1=\frac{p-1}{2}-1.$$

Daraus folgt

$$\mu\equiv\sum\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}-\nu,\quad \mu+\nu\equiv\frac{q-1}{2}\,\frac{p-1}{2},$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}},$$

w. z. b. w.

J. Thomae.

XII. Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln.

(Hierzu Taf. II Fig. 13 u. 14.)

In einer aus den Halbaxen $CA=a$ und $CB=b$ construirten Ellipse (Fig. 13) sei P der Punkt, welcher zu der beliebig gewählten excentrischen Anomalie $ACM=\omega$ gehört, mithin $x=a\cos\omega$, $y=b\sin\omega$; in einer zweiten, aus gleichgerichteten, sonst aber willkürlichen Axen CA_1 und CB_1 construirten Ellipse bedeute P_1 den zu derselben Anomalie gehörenden Punkt; die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P und P_1 ist dann immer normal zu einer dritten Ellipse $A_2P_2B_2$ und schneidet letztere in einem Punkte P_2, welcher zu derselben Anomalie gehört.

Die dritte Ellipse wird auf folgende Weise construirt. Aus den Seiten CA und CB bilde man das Rechteck $ACBD$, ebenso aus CA_1 und CB_1 das Rechteck $A_1CB_1D_1$ und ziehe DD_1; ferner lege man durch C eine Gerade, welche mit CA denselben Winkel einschliesst, wie DD_1 mit

$D_1 A_1$; diese Gerade schneidet $D D_1$ in einem Punkte D_2, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen zwei Hauptscheitel der Ellipse $A_2 P_2 B_2$ sind.

Erwähnung verdienen noch die Grenzfälle, in denen CA_2 und CB_2 entweder verschwinden oder unendlich gross werden. Der erste Fall tritt ein für $a_1 : a = b_1 : b$, also bei ähnlichen Ellipsen; die Gerade PP_1 geht dann immer durch den Coordinatenanfang. Der zweite Fall tritt ein für $a_1 - a = b_1 - b$, und zwar wird hier $CA_2 = \infty$, $CB_2 = \infty$, jedoch so, dass $CA_2 - CB_2$ den endlichen Werth $\frac{1}{2}(a-b)$ erhält; bezeichnen U und V die Punkte, in denen PP_1 die Axen schneidet, so ist dann UV constant $= a - b$.

Die angegebenen Sätze gelten mit geringen Modificationen für die Hyperbel, wenn letztere durch die Gleichungen $x = a \sec \omega$, $y = b \tan \omega$ ausgedrückt und ω die excentrische Anomalie genannt wird. Auch hier ist PP_1 normal zu einer dritten Hyperbel $A_2 P_2$ (Fig. 14) und schneidet letztere in einem, gleichfalls der excentrischen Anomalie ω entsprechenden Punkte P_2.*

Für die Construction der Halbaxen CA_2 und CB_2 bleibt die Bemerkung ungestört, dass D_2 in die Gerade DD_1 fällt, nur ist der Winkel $ACD_2 = \angle DD_1 A_1$ auf die entgegengesetzte Seite zu legen, d. h. D_2 ist der Fusspunkt der Senkrechten von C auf DD_1, mithin CD_2 eine Asymptote der dritten Hyperbel.

Für den Fall, dass $a_1 : a = b_1 : b$ ist, verschwinden CA_2 und CB_2; die Gerade PP_2 geht dann immer durch C. Ist $a_1 - a = b_1 - b$, so wird $CA_2 = CB_2$.

Schlömilch.

XIII. Das gleichseitige Hyperboloid.

Herr A. Voigt hat im 86. Bande des Crelle'schen Journals ein Hyperboloid zum Gegenstande seiner Studien gemacht, welches durch drei gegen einander senkrechte windschiefe Gerade definirt ist. Er nennt dasselbe ein gleichseitiges und entwickelt auf synthetischem Wege eine Reihe Eigenschaften, welche manches Interessante bieten. Da seine Methode eine besondere Kraft der räumlichen Anschauung erfordert, so denke ich, wird es Manchem genehm sein, die interessanten Ergebnisse der betreffenden Arbeit, auf einem zweckmässigen Wege analytisch vermittelt, zu erhalten; ich erlaube mir deshalb, die wesentlichsten Eigenschaften des gleichseitigen Hyperboloids hier in Kürze abzuleiten und zum Schluss auf eine Verallgemeinerung hinzuweisen, welche die Besonderheit dieser Fläche in ihrer Beziehung zu einer Eigenthümlichkeit zweier allgemeinen Flächen zweiten Grades hervortreten lässt.

---

* Um die Figur nicht zu überladen, sind ω und die Constructionen von x und y weggelassen worden.

Sind im Raume drei normal gegen einander gerichtete windschiefe Gerade G_1, G_2, G_3 gegeben, so werden die drei Geraden G', G'', G''', welche durch die kürzesten Abstände zwischen jenen bestimmt sind, gleichfalls in dem Hyperboloid enthalten sein, das durch G_1, G_2, G_3 definirt ist. Von diesen sechs Geraden bestimmen je zwei sich schneidende eine Berührungsebene des Hyperboloids und die sechs durch sie bedingten Berührungsebenen begrenzen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches man als dem Hyperboloid umgeschrieben bezeichnen darf. Man beziehe nunmehr das Hyperboloid auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Parallelepipedons gelegen ist und dessen Axenrichtungen den Kanten desselben parallel laufen. Die Länge der Kanten in der x-, y-, z-Richtung mögen durch 2α, 2β, 2γ gemessen sein.

Da je zwei Gegenebenen Berührungsebenen des Hyperboloids sind, so muss, da ihr Durchschnitt im Unendlichen liegt, die Gerade, welche ihre Berührungspunkte verbindet, ein Durchmesser des Hyperboloids sein, denn sie ist die jenem Durchschnitt polarisch zugeordnete Gerade. Es muss deshalb der Mittelpunkt des Parallelepipedons mit dem Mittelpunkte des Hyperboloids zusammenfallen, und die Gleichung desselben kann die Glieder nicht enthalten, welche linear in x, y, z sind. Denkt man die Gleichung nach Potenzen von z geordnet, so folgt, da sie für $x=\alpha$, $y=\beta$ und jedes z erfüllt werden muss, dass das Glied mit z^2 für das Axensystem verschwindet. Dasselbe gilt für die Glieder, welche x^2 und y^2 enthalten. Die Gleichung des Hyperboloids hat also die Form

$$Axy + Byz + Czx + D = 0.$$

Diese Gleichung muss für $x=\alpha$, $y=\beta$ und jedes z erfüllt werden, was die Bedingung liefert

$$1) \qquad A\alpha\beta + D = 0.$$

Sie muss ferner befriedigt werden für $y=-\beta$, $z=\gamma$ und jedes x, was zur Folge hat

$$2) \qquad -B\beta\gamma + D = 0.$$

Drittens endlich muss ihr Genüge geschehen durch $x=\alpha$, $z=\gamma$ und jedes y, und dies erfordert

$$3) \qquad C\alpha\gamma + D = 0.$$

Substituirt man aus diesen drei Gleichungen die Werthe für A, B, C in obige Gleichungsform, so hebt sich D heraus und die Gleichung des Hyperboloids nimmt die Gestalt an

$$xy\gamma - yz\alpha + zx\beta - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Stellt man sich die Frage, ob diese Gleichung durch eine orthogonale Substitution für x, y, z in eine Gleichung von derselben Form transformirbar ist, so entwickelt man folgende Bedingungen. Sei die orthogonale Substitution ausgedrückt durch

$$x = \xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu, \quad y = \xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu', \quad z = \xi\lambda'' + \eta\mu'' + \zeta\nu'',$$

so müssen aus der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu)\,(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')\,\gamma\\ -(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')\,(\xi\lambda''+\eta\mu''+\zeta\nu'')\,\alpha\\ +(\xi\lambda''+\eta\mu''+\zeta\nu'')(\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu)\,\beta\end{array}\right\}-\alpha\beta\gamma=0$$

die Coefficienten von ξ^2, η^2, ζ^2 verschwinden. Dies erfordert

$$\text{I)}\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda\lambda'\gamma-\lambda'\lambda''\alpha+\lambda''\lambda\beta=0,\\ \mu\mu'\gamma-\mu'\mu''\alpha+\mu''\mu\beta=0,\\ \nu\nu'\gamma-\nu'\nu''\alpha+\nu''\nu\beta=0.\end{array}\right.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen giebt eine Identität, sie setzen deshalb nur zwei Bedingungen fest zwischen den neuen Substitutionscoefficienten. Da diese ausserdem noch durch die bekannten sechs Gleichungen, welche die Orthogonalität ausdrücken, verknüpft sind, so bleibt noch eine Variabilität in den Substitutionscoefficienten, d. h. durch unendlich viele orthogonale Substitutionen ist obige Gleichung des Hyperboloids in eine Gleichung derselben Form transformirbar. Ersetzt man in dem Gleichungssystem I) die λ, λ', λ'' durch $\frac{x}{\varrho}$, $\frac{y}{\varrho}$, $\frac{z}{\varrho}$, wo ϱ irgend einen beliebigen Vector auf der ξ-Axe anzeigt, so giebt die erste Bedingungsgleichung

$$xy\gamma-yz\alpha+zx\beta=0,$$

und diese drückt aus, dass die ξ-Axe in dem Asymptotenkegel des Hyperboloids enthalten ist. Dasselbe gilt für die η- und ζ-Axe.

Zu jeder Kegelkante ξ giebt es immer ein reelles Paar Kanten η, ζ. Man erkennt dies leicht durch folgende Betrachtung. Schneidet man den Asymptotenkegel, welcher auch die x-, y-, z-Axe enthält, durch eine Ebene in einer Ellipse, so liegen die Durchschnittspunkte x', y', z' der Axen in dieser Ellipse. Dreht man das System um die x-Axe, so durchlaufen die Punkte y', z' eine elliptische Involution. Setzt man daher die Drehung fort, bis die ξ-Axe in eine jener Coordinatenebenen fällt, so müssen die Punkte η', ζ', in welchen die η-, ζ-Axe die Schnittebene treffen, in einer Geraden liegen, welche die Ellipse reell schneidet. Es müssen also auch die η- und ζ-Axe reell in dem Asymptotenkegel enthalten sein. Es lässt sich daher das Ergebniss der Analyse so zusammenfassen:

Lässt sich einem Hyperboloid ein rechtwinkliges Parallelepipedon so umschreiben, dass seine Seitenflächen dasselbe berühren, so giebt es eine unendliche Anzahl solcher rechtwinkliger Parallelepipeda, welche in demselben Sinne dem Hyperboloid umgeschrieben sind.

Die interessanten Relationen zwischen dieser Schaar rechtwinkliger Parallelepipeda, welche Herr A. Voigt aufgestellt hat, gewinnt man schnell durch folgenden Gedankengang. Wird die Form $U=xy\gamma-yz\alpha+zx\beta-\alpha\beta\gamma$ durch eine orthogonale Substitution in $U'=\xi\eta\gamma'-\eta\zeta\alpha'$

$+ \zeta\xi\beta' - \alpha'\beta'\gamma'$ transformirt, so geht gleichzeitig ein Ausdruck von der Form $S = x^2 + y^2 + z^2$ in $S' = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ über; es wird sich also $U + \varkappa S$ in $U' + \varkappa S'$ umbilden. Wird für $\varkappa$ ein solcher Werth gewählt, dass $U + \varkappa S = 0$ sich in einen Kegel auflöst, so löst sich für denselben Werth auch $U' + \varkappa S' = 0$ in einen solchen auf. Es muss demnach die Discriminante beider Formen dieselben Werthe für $\varkappa$ ergeben oder beide Discriminanten müssen identisch gleich sein. Da nun

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \varkappa \frac{\partial S}{\partial x} = \quad y\gamma + z\beta + 2\varkappa x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \varkappa \frac{\partial S}{\partial y} = \quad x\gamma - z\alpha + 2\varkappa y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \varkappa \frac{\partial S}{\partial z} = -y\alpha + x\beta + 2\varkappa z,$$

so ist die Discriminante

$$\begin{vmatrix} 2\varkappa & \gamma & \beta \\ \gamma & 2\varkappa & -\alpha \\ \beta & -\alpha & 2\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

oder nach Auflösung der Determinante und Reduction

$$4\varkappa^3 - \varkappa(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Da diese Gleichung dieselben Wurzeln hat, als

$$4\varkappa^3 - \varkappa(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) - \alpha'\beta'\gamma' = 0,$$

so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \quad \alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'.$$

Die Interpretation dieser Gleichungen zeigt:

„Die Ecken der rechtwinkligen Parallelepipeda, welche sich einem gleichseitigen Hyperboloid umschreiben lassen, liegen auf einer mit ihm concentrischen Kugel und haben unter einander gleiches Volumen.“

Um die Beziehung zwischen den Halbaxen eines gleichseitigen Hyperboloids zu gewinnen, welche die besondere Natur desselben ausprägt, gehe man zurück auf die obige orthogonale Substitution und verlange, dass die Gleichung in ξ, η, ζ dies Hyperboloid auf die Axen bezogen darstelle. Es sind dieser Forderung gemäss ausser der Constanten nur die Glieder ξ^2, η^2, ζ^2 in der Gleichung enthalten, und die Coefficienten derselben stellen die Werthe $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$ dar, wenn a, b, c die Halbaxen bedeuten. Es ist demnach

$$\frac{\lambda\lambda'\gamma - \lambda'\lambda''\alpha + \lambda''\lambda\beta}{\alpha\beta\gamma} = \quad \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{\mu\mu'\gamma - \mu'\mu''\alpha + \mu''\mu\beta}{\alpha\beta\gamma} = \quad \frac{1}{b^2},$$

$$\frac{\nu\nu'\gamma - \nu'\nu''\alpha + \nu''\nu\beta}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{c^2}.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergiebt

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Um die Axen in ihrem Zusammenhange mit α, β, γ und dem Radius der Kugel r, auf der die Ecken der rechtwinkligen Parallelepipeda gelegen sind, darzustellen, transformire man die Form $U=xy\gamma-yz\alpha+zx\beta-\alpha\beta\gamma$ durch eine orthogonale Substitution in die Form $V'=\xi^2P+\eta^2Q+\zeta^2R-\alpha\beta\gamma$, und bestimme P, Q, R durch eine der obigen entsprechende Methode. Wenn S und S' die obige Bedeutung haben, so muss sich $U+\varkappa S$ in $V'+\varkappa S'$ umbilden und es müssen die Discriminanten beider Formen dieselben Wurzeln $\varkappa$ ergeben. Die Discriminante der ersten Form ist oben gebildet. Die Discriminante der zweiten Form ist die Eliminationsresultante aus

$$\frac{\partial V'}{\partial \xi}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial \xi}=2P\xi+2\varkappa\xi=0,$$

$$\frac{\partial V'}{\partial \eta}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial \eta}=2Q\eta+2\varkappa\eta=0,$$

$$\frac{\partial V'}{\partial \zeta}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial \zeta}=2R\zeta+2\varkappa\zeta=0,$$

also die cubische Gleichung $(P+\varkappa)(Q+\varkappa)(R+\varkappa)=0$ oder

$$\varkappa^3+\varkappa^2(P+Q+R)+\varkappa(PQ+QR+RP)+PQR=0.$$

Da diese Gleichung dieselben Wurzeln liefern muss, als die Gleichung

$$4\varkappa^3-\varkappa(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\beta\gamma=0,$$

so folgt

$$P+Q+R=0,\quad 4(PQ+QR+RP)=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\quad 4PQR=-\alpha\beta\gamma.$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{P}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{Q}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{b^2}$, $\frac{R}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c^2}$ ist, so ist

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0,\quad \frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2c^2}-\frac{1}{c^2a^2}=-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4\alpha\beta\gamma},\quad \frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

oder in anderer Form

$$a^2+b^2-c^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=r^2,\quad abc=2\alpha\beta\gamma,\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Herr Voigt bemerkt, dass jedes Hyperboloid, welches durch die Höhen eines Tetraeders bestimmt ist, ein Hyperboloid obiger Art ist. In der That, projicirt man die drei Höhen des Tetraeders $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ senkrecht auf die Grundfläche abc, so sind die Projectionen Höhen im Grunddreieck und treffen sich im Höhenschnitt. Die Normale in diesem schneidet jene drei Höhen und die vierte $d\delta$ im Unendlichen, trifft also alle vier Höhen des Tetraeders. Dasselbe gilt von den Normalen in den Höhenschnitten der übrigen Seitendreiecke. Diese liegen also mit den Höhen in einem Hyperboloid, und zwar schneidet dieses jede Seitenfläche in ihren Ecken und ihrem Höhenschnitt. Der Durchschnitt ist

demnach eine gleichseitige Hyperbel.* Schneidet man das Hyperboloid durch eine Ebene, welche die Höhe $d\delta$ enthält und parallel einer Asymptote der gleichseitigen Hyperbel läuft, die in der Grundfläche abc auftritt, so muss diese das Hyperboloid in einer zweiten Geraden G_1 schneiden, welche jener Asymptote parallel läuft, also senkrecht die betrachtete Höhe, die nunmehr mit G' bezeichnet werden mag, durchschneidet. Hätte man die andere Asymptote berücksichtigt, so wäre man auf eine Gerade G_2 geführt worden, welche die Höhe G' gleichfalls senkrecht durchsetzt. Eine Ebene, welche G_1 enthält und parallel G_2 läuft, schneidet das Hyperboloid in einer Geraden G'', welche G_2 parallel läuft, also senkrecht gegen G' gerichtet ist, und eine Ebene, die G_2 in sich schliesst und parallel G_1 ist, schneidet das Hyperboloid in einer Geraden G''', die parallel G_1 liegt, also gegen G' senkrechte Richtung hat. Es sind also die drei Geraden G', G'', G''' derselben Schaar angehörig und normal gegen einander gestellt; es muss demnach das betreffende Hyperboloid gleichseitig sein.

---

* Dass alle Hyperbeln, welche durch die Eckpunkte eines Dreiecks und durch den Höhenschnitt desselben gehen, gleichseitige Hyperbeln sind, dafür habe ich einst bei Steiner in einer Vorlesung einen recht eleganten Beweis gehört. Da ich vermuthe, dass derselbe weiteren Kreisen kaum bekannt geworden sein wird, so erlaube ich mir, ihn hier kurz zu skizziren. Zwei Büschel a und b können durch jede Gerade in der Ebene projectivisch auf einander bezogen werden. Durch Drehung derselben erwächst aus jeder Geraden ein Kegelschnitt durch a und b. Das Mass der Drehung kann durch einen beliebigen Punkt γ bestimmt werden, indem man festsetzt, dass die Strahlen $a\gamma$ und $b\gamma$ in die gemeinsame Gerade ab nach der Drehung fallen. Der Spiegelpunkt von γ gegen die Gerade ab, der Punkt c, sowie die Punkte a und b werden demnach Punkte jedes Kegelschnitts werden, der aus irgend einer Geraden der Ebene hervorgeht. Der Kreis durch $a\gamma b$ zeigt bei der Drehung eine bemerkenswerthe Singularität; es entweichen nämlich alle Punkte x auf dem Bogen $\widehat{ab}$, auf dem γ nicht liegt, bei der Drehung in das Unendliche. Denn das Viereck $xa\gamma b$ bleibt bei der Drehung stets ein Kreisviereck, da sich in ihm die Winkel bei a und b nicht ändern; es muss also, da der Winkel $\gamma = \pi$ wird, der Winkel $x = 0$ werden. Ebenso leicht überzeugt man sich, dass der Mittelpunkt des Drehkreises in einen Punkt d übergeht, der zu a, b, c so gelegen ist, dass jeder der Höhenschnitt ist von dem Dreieck, was durch die drei anderen gebildet wird. Jede Gerade, welche den Drehkreis in den Punkten y und z schneidet, entfaltet sich nach der Drehung zu einer Hyperbel, jede Gerade, welche ihn berührt, zu einer Parabel, und jede Gerade, welche ihn nicht schneidet, zu einer Ellipse. Der Winkel yaz misst den Asymptotenwinkel der Hyperbel. Soll derselbe ein rechter sein, so muss die Gerade, aus der die Hyperbel entspringt, durch den Mittelpunkt des Drehkreises gehen, und jede Gerade, welche durch ihn hindurchgeht, entwickelt sich zu einer gleichseitigen Hyperbel. Also sind alle Hyperbeln, welche durch solche vier Punkte gehen, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei anderen bestimmten Dreiecks ist, gleichseitige Hyperbeln. Auch erkennt man aus diesem Gedankengange leicht, dass, wenn drei Punkte a, b, c auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, der Höhenschnitt des von ihnen gebildeten Dreiecks gleichfalls in der gleichseitigen Hyperbel enthalten ist.

Ebenso würde man, wie es Herr Voigt gethan, leicht entwickeln, dass vier Erzeugende einer Schaar eines gleichseitigen Hyperboloids stets als Höhen eines Tetraeders aufgefasst werden können.

Um diejenige allgemeine Eigenschaft von Flächen zweiten Grades zu kennzeichnen, die jene besondere des gleichseitigen Hyperboloids in ihrem Keime enthält, verwende ich eine Methode, die sich häufig mit Erfolg bei derartigen Generalisationen verwenden lässt.

Denkt man den Raum durch Gerade parallel der z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems durchsetzt, so markirt jedes räumliche Gebilde auf diesen Geraden gewisse Punkte. Hält man jeden derselben in der Vorstellung auf seiner Geraden fest, verschiebt aber das ganze System, ohne den Parallelismus zu ändern, so dass das ganze Coordinatensystem in ein gewöhnliches schiefwinkliges $x'y'z'$ übergeht, so transformirt sich das räumliche Gebilde. Bei dieser Transformation würde der Würfel ($x=1$, $y=1$, $z=1$) in ein Rhomboeder ($x'=1$, $y'=1$, $z'=1$) übergehen, und umgekehrt könnte dieses die Transformation kennzeichnen. Das transformirte Gebilde steht mit jenem in der Verwandtschaft der Affinität; es ändern sich nicht die Strecken, welche parallel den Axen laufen; es bewahren parallele Gerade im Raume ihren Parallelismus, die Proportionalität auf parallelen Geraden erhält sich und gleiche Volumina gehen in gleiche Volumina über. Demgemäss verwandelt sich eine Kugel in ein Ellipsoid, je drei senkrecht auf einander stehende Durchmesser der Kugel gehen in ein Tripel von conjugirten Durchmessern des Ellipsoids über und ein gleichseitiges Hyperboloid bildet sich in ein beliebiges Hyperboloid um. Rückwärts lässt sich jedes Hyperboloid durch geeignete Verschiebung in ein gleichseitiges verwandeln; denn legt man parallel drei beliebigen Erzeugenden einer Schaar die Axen x', y', z', so lassen sich diese in drei senkrecht gegen einander gerichtete x, y, z zurückverschieben, und das transformirte Hyperboloid muss gleichseitig werden.

Sind G_1, G_2, G_3 drei beliebige Erzeugende einer Schaar des Hyperboloids, so muss jede Ebene, welche eine von diesen enthält und parallel einer zweiten läuft, das Hyperboloid in einer Geraden schneiden, welche zwei durchschneidet und der dritten parallel läuft. Dadurch entstehen drei neue Gerade der zweiten Schaar G', G'', G''', welche mit jenen ein Parallelepipedon bestimmen. Dieses ist dem Hyperboloid in dem Sinne umgeschrieben, dass jede Seitenfläche Tangentialebene an ihm ist. Legt man durch die Ecken dieses Parallelepipedons irgend eines der möglichen Ellipsoide, so sind für dieses die Richtungen der Kanten drei conjugirte Richtungen. Führt man dieses durch Verschiebung in eine Kugel über, so stellen sich die drei conjugirten Richtungen normal zu einander und das Hyperboloid bildet sich in ein gleichseitiges um. Berücksichtigt man nun jene Eigenschaft des gleichseitigen Hyperboloids und erwägt, dass

gleiche Volumina sich in gleiche Volumina transformiren, so lässt sich das Theorem aussprechen:

Ist ein Parallelepipedon einem Ellipsoid eingezeichnet und zugleich einem Hyperboloid umgezeichnet, so giebt es eine ganze Schaar Parallelepipeda, welche der einen Fläche ein- und der andern umgezeichnet sind, und alle diese Parallelepipeda haben gleiches Volumen.

Berlin. Dr. Ad. Schumann.

XIV. Eigenschaften der Lemniscate.

Für die Lemniscate $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi = b^2 \cos 2\varphi$ lassen sich, wie für die Kegelschnitte, mit denen dieselbe in gewissem Sinne verwandt ist, einfache Sätze aufstellen, von denen — unter Beibehaltung der bei den Kegelschnitten giltigen Nomenclatur — einige der interessanteren hier ausgesprochen werden mögen.

Mittelstrahl und Brennstrahlen. Für jeden Lemniscatenpunkt ist die Summe der Brennstrahlen gleich der Projection der Axe $2b$ auf den Mittelstrahl. Zieht man also durch den Mittelpunkt gerade Linien und fällt auf sie von den Scheiteln Perpendikel, so schneiden die mit den abgegrenzten Stücken als grosser Axe beschriebenen, der Lemniscate confocalen Ellipsen das Geradenbüschel in Punkten der Lemniscate. — Zieht man zu einem Brennstrahl durch den benachbarten Scheitel eine Parallele, so schneidet diese auf dem Mittelstrahl ein Stück ab, das der Differenz der Brennstrahlen gleich kommt. — Trägt man im Mittelpunkte an einen Mittelstrahl einen rechten Winkel, im Curvenpunkte dagegen den halben Winkel der dort sich treffenden Brennstrahlen an, so ist die Hypotenuse des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks gleich der Halbaxe. — Die auf den zwei Brennstrahlen in den Brennpunkten errichteten Perpendikel schneiden auf der Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen die Focalentfernung $2a$ aus. — Die Halbirungslinie des Winkels zweier Brennstrahlen bildet mit dem zugehörigen Mittelstrahl und der Axe ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der Mittelstrahl; sie schneidet also die Axe unter doppelt so grossem Winkel, wie der Mittelstrahl. Umgekehrt liegen die Spitzen aller Dreiecke über derselben Basis, für welche die Mittellinien von diesen Spitzen aus gegen die von ebenda auslaufenden Winkelhalbirungslinien und die feste Basis gleich geneigt sind, auf der Lemniscate, deren Brennpunkte die Ecken der Basis sind.

Scheitelstrahlen. Das aus zwei Scheitelstrahlen als Katheten construirte rechtwinklige Dreieck hat die Summe der Brennstrahlen zur Hypotenuse. — Die Differenz der Quadrate zweier Scheitelstrahlen steht zur Differenz der Quadrate der Brennstrahlen in constantem Verhältniss, nämlich wie $\sqrt{2}:1$, d. h. wie Halbaxe b und Excentricität a. — Der Unterschied der Winkel, den ein Mittelstrahl mit den beiden zugehörigen

Scheitelstrahlen bildet, ist ein rechter. — Die Halbirungslinie des Winkels zweier Scheitelstrahlen schneidet den Mittelstrahl stets unter 45^0.

Tangente und Normale. Aus der Thatsache, dass die Normale in einem Curvenpunkte die Axe unter dreifach so grossem Winkel schneidet, wie der zugehörige Mittelstrahl, resultirt in Verbindung mit dem Vorhergehenden: Die Winkelhalbirungslinie des Winkels zweier Brennstrahlen ist zugleich die des Winkels zwischen Mittelstrahl und Normale. Eine Lemniscate und eine ihr confocale Ellipse schneiden sich daher unter dem nämlichen Winkel, wie der nach dem Schnittpunkte führende Mittelstrahl und die Axe. Durch den Schnittpunkt geht noch eine Ellipse, deren Brennpunkte der Lemniscatenmittelpunkt und der Schnittpunkt der Normalen und Axe sind; diese Ellipse berührt die vorige. — In jedem Curvenpunkte bildet der Mittelstrahl mit dem einen Brennstrahl denselben Winkel, wie die Normale mit dem andern. — Die in den Brennpunkten auf den zwei Brennstrahlen nach einem Punkte errichteten Senkrechten schneiden zu beiden Seiten des Punktes gleiche Stücke auf seiner Tangente ab. — Verlängert man den einen Brennstrahl nach einem Punkte über diesen hinaus um sich selbst, so schneidet die in dem Endpunkte errichtete Senkrechte jene im andern Brennpunkte auf den von ihm ausgehenden Brennstrahl errichtete in einem Punkte der Tangente. (Vergl. Cantor, diese Zeitschr., Bd. 12 S. 428—430.) — Die Neigungswinkel zweier Scheitelstrahlen nach einem Punkte und der Axe sind zusammengenommen dem stumpfen Winkel zwischen der Tangente und dem Mittelstrahl des betreffenden Punktes gleich.

Krümmungsradius. Der Winkel zweier Tangenten ist dreimal so gross, als der Winkel der nach ihren Berührungspunkten zielenden Mittelstrahlen; der eine ist also zugleich mit dem andern constant. Der Contingenzwinkel zweier Tangenten ist somit das Dreifache des der unendlich benachbarten Mittelstrahlen nach den Berührungspunkten. — Das Rechteck aus dem Krümmungsradius und Mittelstrahl ist für jeden Curvenpunkt constant dem Quadrat des Radius jenes Kreises gleich, der dem aus der Halbaxe gebildeten gleichseitigen Dreieck umschrieben ist. — Errichtet man im Mittelpunkte ein Perpendikel auf dem nach einem Punkte führenden Mittelstrahl, so schneidet dieses auf der Normalen den dreifachen Krümmungshalbmesser für den Punkt aus.

Lemniscatensector. Die Senkrechte von einem Brennpunkt auf einen Mittelstrahl halbirt den von diesem und der Axe gebildeten Flächensector. — Das Rechteck aus den zwei Scheitelstrahlen eines Punktes ist das Vierfache des von dem Mittelstrahl dieses Punktes und der Axe begrenzten Sectors.

Besondere Punkte. Als solche heben wir den Punkt hervor, der von der Axe am weitesten absteht, und den Berührungspunkt der von einem Brennpunkt an den andern Lemniscatenzweig gehenden Tangente, weil für beide Punkte die vorangehenden Sätze sich bedeutend modificiren.

München. Dr. Wilhelm Hess.

VII.

Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials.*

Von

THEODOR HORN

in Leipzig.

Hierzu Taf. III Fig. 1—6.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, in welcher Weise sich die nach beliebigen Richtungen genommenen zweiten Differentialquotienten des Potentials einer mit Masse belegten krummen Oberfläche ändern, wenn der Punkt, für welchen man dieselben bildet, die Oberfläche durchschreitet. Namentlich ist auch festzustellen, welche Eigenschaften die gegebene Fläche und die auf ihr befindliche Massenbelegung besitzen müssen, damit etwaige sprungweise Aenderungen der zweiten Derivirten dieses Potentials noch bestimmt angebbare Werthe besitzen.

Die Methode, die wir zur Lösung dieser Aufgabe anwenden, wird derjenigen analog sein, deren sich Gauss u. A. bei der Berechnung der Discontinuitäten der ersten Differentialquotienten des Flächenpotentials bedient haben. Auch werden wir zunächst die Discontinuitäten derjenigen zweiten Differentialquotienten des Flächenpotentials berechnen, die nach gewissen Tangenten der gegebenen Fläche und nach der Flächennormale im Durchgangspunkte O genommen sind. Mit Hilfe der Discontinuitäten dieser speciellen Differentialquotienten können wir dann leicht die sprungweisen Aenderungen der nach beliebigen Richtungen genommenen zweiten Derivirten des betrachteten Oberflächenpotentials aufstellen.

Bei der vorliegenden Untersuchung genügt es, diejenigen Theile der mit Masse belegten Fläche in Betracht zu ziehen, die der Stelle O, in welcher der Punkt P, in Bezug auf welchen die Differentialquotienten des betrachteten Potentials gebildet werden, die Fläche durchschreitet, unendlich oder ausserordentlich nahe liegen; denn von allen Stellen derselben, die um eine endliche, wenn auch noch so kleine Strecke von O

* Diese Arbeit wurde veranlasst durch eine von der philosophischen Facultät der Universität Leipzig im Jahre 1878 gestellte Preisaufgabe.

entfernt sind, bleibt auch der Punkt P um eine endliche Strecke entfernt. Es ändern sich dann bekanntlich das von den auf der gegebenen Fläche befindlichen Massen herrührende Potential und seine sämmtlichen Derivirten stetig, wenn die auf der Fläche verbreitete Gesammtmasse endlich ist.

Wir denken uns daher auf der gegebenen Fläche ein kleines, aber endliches Flächenstück o durch eine geschlossene, den Punkt O einschliessende Curve s so abgegrenzt, dass alle Punkte dieser Grenzcurve um eine endliche, wenn auch noch so kleine Strecke von O entfernt sind. Wir nennen nun das Gesammtpotential der gegebenen Fläche V, bezeichnen den Theil desselben, welcher von der auf dem sehr kleinen Flächenstück o befindlichen Masse herrührt, mit V_1 und den von den übrigen Massen herrührenden Theil des Potentials mit V_2, so dass die Relation gilt

$$V = V_1 + V_2.$$

Da nach den oben gemachten Bemerkungen V_2 und seine Derivirten keine Discontinuitäten besitzen, wenn der Punkt P die gegebene Fläche in O durchschreitet, so untersuchen wir in der Folge immer nur V_1 und seine Differentialquotienten.

---

§ 1.

Coordinatensystem.

Wir führen ein rechtwinkliges Coordinatensystem (x, y, z) ein, welchem wir eine specielle Lage ertheilen können, ohne dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken. Wir wählen den Punkt O der gegebenen Fläche, in welchem der Punkt P dieselbe durchschreiten soll, zum Anfangspunkt des Coordinatensystems. Wir betrachten in der Folge nur solche Flächen, die an der Durchgangsstelle O eine stetige Krümmung und somit auch eine Tangentialebene besitzen, und wählen diese zur xy-Ebene unseres rechtwinkligen Coordinatensystems. Ferner denken wir uns im Punkte O die Richtung der beiden Krümmungslinien der gegebenen Fläche bestimmt und wählen die in O an dieselben gelegten Tangenten, welche natürlich auch in die Tangentialebene der Fläche in O hineinfallen, zur x- und y-Axe. Wir dürfen dies, weil nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Krümmungslinien senkrecht aufeinander stehen. Ferner nennen wir die Seite der gegebenen Fläche, welche im Punkte O der positiven z-Axe zugewandt ist, die positive Seite, und verstehen demnach unter der positiven Flächennormale n diejenige, welche nach dieser positiven Seite gerichtet ist. (Fig. 1.)

Wir führen nun in Bezug auf das gewählte Coordinatensystem die folgende Bezeichnung ein. Wir nennen die Coordinaten eines beliebigen Punktes der mit Masse belegten Fläche a, b, c und verstehen unter E

die Entfernung des variabelen Punktes P (mit den Coordinaten x, y, z) von der Stelle (a, b, c), wir setzen also

$$E^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2.$$

Ferner zerlegen wir die gegebene Fläche so in Elemente do, dass do auf derselben von einem rechtwinkligen Prisma ausgeschnitten wird, dessen Seitenflächen parallel den Coordinatenebenen sind und dessen unendlich kleine Basis gebildet wird von dem Element der xy-Ebene $da\,db$.

§ 2.

Eigenschaften der gegebenen Fläche und ihrer Massenbelegung.

Wenn die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Flächenpotentials noch bestimmte, endliche Werthe erhalten sollen, so müssen wir über die Beschaffenheit der gegebenen Fläche und der Flächendichtigkeit q gewisse beschränkende Voraussetzungen machen. Es ist zweckmässig, diese Voraussetzungen von vornherein als erfüllt zu betrachten, obwohl sich erst im Laufe der Untersuchung zeigen kann, aus welchen Gründen die jetzt anzuführenden Bedingungen zur Lösung unserer Aufgabe nothwendig und hinreichend sind.

Während es bei der Berechnung der ersten Differentialquotienten des Flächenpotentials hinreichend ist, vorauszusetzen, dass die gegebene Fläche an der Durchgangsstelle O eine Tangentialebene* oder stetige Biegung** besitze, ist es bei der Berechnung der Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten nothwendig, die Voraussetzung der stetigen Krümmung der Fläche in O in vollem Umfange zu machen, also anzunehmen, dass sich die Krümmungsradien der Normalschnitte in Stellen, die O unendlich nahe liegen, nicht sprungweise ändern und nicht unendlich klein werden. Unter diesen Voraussetzungen können wir der Gleichung der mit Masse belegten Fläche, welche im Allgemeinen von der Form

$$c = c(a, b)$$

ist, eine specielle Gestalt geben, insofern wir nur den unendlich kleinen, den Punkt O unmittelbar umgebenden Theil der Fläche in Betracht ziehen. Zu dem Ende führen wir die beiden Hauptkrümmungsradien derselben im Punkte O ein. Bei der speciellen Lage unseres Coordinatensystems sind die den Hauptkrümmungsradien zugehörigen Hauptschnitte gelegen in der zx- resp. zy-Ebene. Wir nennen nun den Krümmungsradius, welcher dem in der zx-Ebene liegenden Hauptschnitte zugehört, r_1, den

---

* Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung etc., Art. 13.

** Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, S. 15.

entsprechenden in der zy-Ebene r_2, beide Krümmungsradien auf den Anfangspunkt O bezogen gedacht. Legen wir ferner durch den Anfangspunkt einen beliebigen Normalschnitt, dessen Ebene mit der zx-Ebene einen Winkel ϑ bildet, und bezeichnen wir den Krümmungsradius dieses Normalschnittes mit r, so gilt bekanntlich die Relation

$$1) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_2}.$$

Mit Hilfe des Krümmungskreises vom Radius r ergiebt sich nun sofort die Ordinate c eines unendlich nahe an O gelegenen Punktes bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung genau. Nach Fig. 2, welche in der Ebene desjenigen Normalschnittes liegt, der den betrachteten Flächenpunkt (a, b, c) enthält, folgt sofort

$$1') \qquad 2rc = a^2 + b^2 = \varrho^2$$

oder mit Rücksicht auf 1)

$$c = \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\cos^2\vartheta}{r_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_2}\right);$$

da nun aber

$$\cos^2\vartheta = \frac{a^2}{\varrho^2}, \quad \sin^2\vartheta = \frac{b^2}{\varrho^2}$$

ist, so wird für unendlich kleine a und b bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung genau

$$2) \qquad c = \frac{a^2}{2r_1} + \frac{b^2}{2r_2}.$$

Ferner muss mit Rücksicht auf die geforderte Stetigkeit der Krümmung der gegebenen Fläche für verschwindende a und b

$$2') \qquad \begin{gathered} \frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{r_1}, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{r_2}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} = \frac{1}{r_1}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial a\,\partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial b^2} = \frac{1}{r_2} \end{gathered}$$

werden, und zwar müssen sich die Werthe der genannten Differentialquotienten in stetiger Weise den angegebenen Grenzwerthen nähern.

Mit Hilfe der Grössen $\frac{\partial c}{\partial a}$, $\frac{\partial c}{\partial b}$ bestimmen wir nun die Richtungscosinus der Flächennormalen für Punkte, die O unendlich nahe liegen. Sind

$$\alpha = \cos(n, x), \quad \beta = \cos(n, y), \quad \gamma = \cos(n, z)$$

diese Richtungscosinus der Flächennormalen n an der Stelle (a, b, c), so ist z. B.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2}}.$$

Da nun für unendlich kleine a und b $\frac{\partial c}{\partial a}$ von der Ordnung a, $\frac{\partial c}{\partial b}$ von der Ordnung b ist, so können wir für verschwindende a und b

$$3) \qquad \gamma = 1 - \gamma', \quad \frac{1}{\gamma} = 1 + \gamma'$$

setzen, wenn γ' eine Function von a und b ist, die mit a und b unendlich klein wird von der Ordnung ϱ^2.

Wir setzen nun ferner voraus, dass die Dichtigkeit der Flächenbelegung q, sowie deren erste Ableitungen nach den Tangenten der Fläche in O für alle Punkte, die der Durchgangsstelle O unendlich nahe liegen, endlich und stetig sind.

Unter dieser Annahme kann man setzen

$$4) \qquad q = q_0 + q', \quad \frac{\partial q}{\partial a} = q_1 + q'_1, \quad \frac{\partial q}{\partial b} = q_2 + q'_2,$$

wenn q_0, q_1, q_2 die Werthe bedeuten, welche resp. q, $\frac{\partial q}{\partial a}$, $\frac{\partial q}{\partial b}$ erhalten im Punkte O, und wenn ferner q', q'_1, q'_2 Functionen von a und b sind, die mit a und b stetig verschwinden, wie $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wir bilden endlich noch den Ausdruck

$$t = \frac{q}{\gamma}.$$

Mit Rücksicht auf die Formeln 3) und 4) ergiebt sich dann

$$4') \qquad t = q_0 + t', \quad \frac{\partial t}{\partial a} = q_1 + t'_1, \quad \frac{\partial t}{\partial b} = q_2 + t'_2.$$

Es ist leicht zu sehen, dass t', t'_1, t'_2 hier ebenfalls Functionen von a und b sind, die für verschwindende a und b verschwinden wie ϱ.

§ 3.

Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}$.

Wenn wir unter i und a zwei Punkte des Raumes verstehen, von denen der erstere auf der positiven, der letztere auf der negativen Seite der Fläche gelegen ist, so erhalten wir die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ als die Differenz der Grenzwerthe, welchen sich $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$, genommen für den Punkt i und andererseits für den Punkt a, nähert, wenn diese Punkte i und a von beiden Seiten in den Punkt O hineinrücken. Bezeichnen wir diese Discontinuität mit $\Delta(x^2)$, und definiren wir sie als die sprungweise Aenderung, die $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ erleidet, wenn der Punkt, für welchen $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$

gebildet wird, von der negativen Seite der gegebenen Fläche auf die positive übergeht, so haben wir die Relation

$$\Delta(x^2) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_a.$$

Wir gehen aus von dem Werthe $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, welcher, so lange der Punkt $P(x, y, z)$ nicht in der gegebenen Fläche selbst liegt, identisch ist mit der X-Componente der von den auf dem kleinen Flächenstück o gelegenen Massen auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Wirkung*. Es ist also

$$5)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \int q\,\frac{a-x}{E^3}\,do,$$

wo das Integral zu erstrecken ist über das kleine Flächenstück o. Ersetzt man noch das Element do durch seine senkrechte Projection auf die xy-Ebene $d\omega$, so wird

$$5')\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \int t\,\frac{a-x}{E^3}\,d\omega,$$

da

$$do = \frac{d\omega}{\gamma},\quad t = \frac{q}{\gamma}$$

ist. Selbstverständlich ist dann dieses Integral zu erstrecken über sämmtliche Elemente der senkrechten Projectionen ω des kleinen Flächenstücks o auf die xy-Ebene. Ausserdem ist bekannt, dass der Werth dieses Integrals endlich und bestimmt sein muss bei den über die Beschaffenheit der gegebenen Fläche und der Belegung gemachten Voraussetzungen.

Um nun für $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ einen Ausdruck zu erhalten, der für unendlich kleine x, y und z seinen Sinn nicht verliert, formen wir das Integral 5′) zunächst durch eine partielle Integration um. Zu dem Ende benutzen wir die identische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(t\,\frac{1}{E}\right) = \frac{1}{E}\,\frac{\partial t}{\partial a} - t\,\frac{a-x}{E^3} - t\,\frac{c-z}{E^3}\,\frac{\partial c}{\partial a}.$$

Setzen wir den aus dieser Formel für $t\,\frac{a-x}{E^3}$ folgenden Werth in 5′) ein, so erhalten wir

$$6)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \frac{1}{E}\,\frac{\partial t}{\partial a}\,d\omega - \int t\,\frac{c-z}{E^3}\,\frac{\partial c}{\partial a}\,d\omega - \int \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{t}{E}\right)d\omega,$$

wo sämmtliche Integrale auszudehnen sind über den kleinen, den Punkt O unmittelbar umgebenden Theil der xy-Ebene, den wir mit ω bezeichnet haben.

Das Integral der letzten Formel

$$J = \int \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{t}{E}\right)d\omega$$

* Gauss, Allgemeine Lehrsätze etc., Art. 13.

können wir theilweise ausführen. Denn ersetzen wir das Flächenelement $d\omega$ durch das äquivalente $da\,db$, so können wir schreiben

$$7)\qquad J=\int\!\!\int\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{t}{E}\right)da\,db=\int_{-b_1}^{b_2}db\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{t}{E}\right)da.$$

Verstehen wir unter σ die Curve, welche den kleinen Theil ω der xy-Ebene begrenzt, so bedeuten a_1 und a_2 die Werthe, welche a für die Grenzcurve σ annimmt, und $-b_1$ und b_2 den kleinsten, resp. grössten Werth, den b auf ω annehmen kann. b_1 und b_2 sind offenbar positiv. Wir führen in J die Integration nach a aus und erhalten

$$J=\int_{-b_1}^{b_2}\left(\left[\frac{t}{E}\right]_{a_2}-\left[\frac{t}{E}\right]_{a_1}\right)db.$$

Dieses Integral können wir auf die Form eines Linienintegrals bringen. Zu dem Ende bezeichnen wir mit n' die nach Innen gerichtete Normale von σ und mit $d\sigma$ ein Element der Randcurve σ. Dann folgt aus Fig. 3 sofort

$$db=\mp\, d\sigma\cos(n', x),$$

wo das negative oder positive Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die positive, d. h. nach dem Innern von ω gerichtete Normale n' mit der positiven x-Axe einen stumpfen oder spitzen Winkel bildet, denn db und $d\sigma$ sind ihrer Natur nach positiv.

Denken wir uns aus der von σ begrenzten kleinen Fläche ω einen unendlich schmalen, zur x-Axe parallelen Streifen von der Breite db ausgeschnitten, so bildet an der Stelle $x=a_1$, wo der Streifen beginnt, n' mit der x-Axe einen spitzen, und an der Stelle $x=a_2$, wo der Streifen endet, mit derselben einen stumpfen Winkel. Wir haben für die Eintrittsstelle a_1 des Streifens

$$db=+\,d\sigma\cos(n', x)$$

und für jede Austrittsstelle a_2

$$db=-\,d\sigma\cos(n', x).$$

Analoges findet statt, wenn ein solcher unendlich schmaler Flächenstreifen aus mehreren getrennten Theilen besteht. Führen wir im Integral J in der angegebenen Weise für db den Ausdruck $d\sigma\cos(n', x)$ ein, so erhalten wir

$$8)\qquad J=-\int\frac{t}{E}\cos(n', x)\,d\sigma,$$

welches Integral auszudehnen ist über die geschlossene Curve σ.

Wir bilden nun $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ dadurch, dass wir die Gleichung 6) partiell nach x differentiiren. Hierdurch erhalten wir

$$9)\qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \int \frac{\partial t}{d a}\, \frac{a-x}{E^3}\, d\omega - 3\int t \frac{\partial c}{\partial a}\, \frac{(c-z)(a-x)}{E^5}\, d\omega - \frac{\partial J}{\partial x}.$$

Hierbei sind das erste und zweite Integral rechter Hand zu erstrecken über die kleine Fläche ω, das letzte Integral dagegen über die Curve σ. So lange z (und somit auch E) endlich bleibt, ist diese Formel richtig; wenn aber neben x und y auch z unendlich klein wird, so wird der Ausdruck unter dem zweiten Integral der Formel 9) unendlich und das Integral selbst scheinbar unbestimmt. Wir müssen daher, um den richtigen Werth desselben zu ermitteln, z vorläufig als endlich annehmen und das Integral durch eine partielle Integration umzuformen suchen. Zu dem Ende differentiiren wir den Ausdruck $t\frac{c-z}{E^3}\,\frac{\partial c}{\partial a}$ partiell nach a und erhalten hierdurch

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{c-z}{E^3}\right)$$

$$= -3t\,\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{(c-z)(a-x)}{E^5} + t\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 \frac{E^2-3(c-z)^2}{E^5} + \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach dem ersten Gliede rechter Hand auf und substituiren diesen Werth in das zweite Integral der Formel 9), so erhalten wir schliesslich

$$10)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \int \frac{\partial t}{\partial a}\,\frac{a-x}{E^3}\, d\omega - \int t\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 \frac{E^2-3(c-z)^2}{E^5}\, d\omega - \int \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\, d\omega \\ + \int \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{c-z}{E^3}\right) d\omega - \frac{\partial J}{\partial x},\end{aligned}$$

wo sämmtliche Integrale mit Ausnahme des letzten zu erstrecken sind über ω, das letzte dagegen über die Grenze σ von ω.

Das vorletzte Integral der Gleichung 10) können wir in derselben Weise, wie das Integral J (S. 151) behandeln. Bezeichnen wir das zu betrachtende Integral mit J' und ersetzen wir darin $d\omega$ durch $da\,db$, so erhalten wir

$$J' = \int \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{c-z}{E^3}\right) d\omega = \int_{-b_1}^{b_2}\left\{\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{c-z}{E^3}\right) da\right\} db.$$

J' ist also von der Form J [7)] und ist ebenso, wie J zu erstrecken über ω. Transformiren wir J' in analoger Weise wie J in ein Randintegral, so müssen wir geführt werden zu einem Resultat von der Form 8), also

$$J' = -\int t\frac{\partial c}{\partial a}\,\frac{c-z}{E^3}\cos(n', x)\, d\sigma,$$

wo dieses Integral auszudehnen ist über die kleine Curve σ.

Wir bezeichnen nun in der Formel 10) die drei Integrale der ersten Zeile der Reihe nach mit J_1, J_2, J_3. Es ist nun zu untersuchen, ob alle Glieder dieser Formel bei verschwindenden x, y und z bestimmte Werthe

annehmen und, wenn dies der Fall, wie gross etwaige sprungweise Aenderungen derselben sind, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet. Wir bezeichnen die Discontinuität eines solchen Integrals, z. B. von J_1, durch

$$(J_1)_a^i = (J_1)_i - (J_1)_a,$$

und wir erhalten für die Discontinuität $\varDelta(x^2)$ von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$ mit Rücksicht auf 10) die folgende Gleichung:

$$10') \qquad \varDelta(x^2) = (J_1)_a^i - (J_2)_a^i - (J_3)_a^i + (J')_a^i - \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_a^i.$$

Das erste dieser Integrale

$$J_1 = \int \frac{\partial t}{\partial a} \frac{a-x}{E^3} d\omega = \int \left(\frac{\partial t}{\partial a} \gamma\right) \frac{a-x}{E^3} do$$

ist von der Form 5) und lässt sich daher auffassen als der erste Differentialquotient nach x von einem Potential, welches herrührt von einer auf dem kleinen Flächenstück o befindlichen Massenbelegung von der Dichtigkeit $\left(\frac{\partial t}{\partial a}\gamma\right)$. Da nun in allen dem Punkte O unendlich nahe liegenden Stellen $\left(\frac{\partial t}{\partial a}\gamma\right)$ endlich und stetig und ferner die x-Axe eine in O an die gegebene Fläche gelegte Tangente ist, so folgt nach einem bekannten Satze über das Flächenpotential*, dass das Integral J_1 endlich und stetig bleibt, wenn der Punkt (x, y, z) in O die gegebene Fläche durchschreitet. Also ist

$$(J_1)_a^i = 0.$$

Wir untersuchen nun das zweite Integral der Formel 10)

$$J_2 = \int t \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 \frac{E^2 - 3(c-z)^2}{E^5} d\omega,$$

welches wir unter Benutzung der Relationen

$$d\omega = \gamma\, do, \quad t = \frac{q}{\gamma}$$

in der Form schreiben

$$11) \qquad J_2 = \int \mu \frac{do}{E},$$

wo dann

$$\mu = q\left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right)\left(\frac{\partial c}{\partial a}\frac{1}{E}\right)^2$$

zu setzen ist. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass der Ausdruck μ im Allgemeinen endlich bleibt, auch für verschwindende x, y, z. Zunächst ist q immer endlich nach den über die Flächenbelegung gemachten Voraussetzungen. Ferner ist stets

* Gauss, Allgemeine Lehrs., Art. 17.

12) $$-2 \leqq 1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2 \leqq 1,$$

weil $c - z \leqq E$ ist. Der Ausdruck μ kann also nur unendlich werden, wenn der Factor

$$\frac{\partial c}{\partial a}\frac{1}{E}$$

unendlich wird.

Für unendlich kleine a und b, auf die es bei dieser Betrachtung allein ankommt, können wir setzen nach Formel 2′)

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{r_1}, \quad \frac{\partial c}{\partial a}\frac{1}{E} = \frac{1}{r_1}\frac{a}{E},$$

wo r_1 immer endlich ist. Bezeichnen wir nun (Fig. 4) einen Punkt der gegebenen Fläche (a, b, c) mit Q, die Sehne OQ mit s, die Senkrechte von Q auf OP mit ε und den Winkel POQ mit δ, so ist

$$abs.\, a \leqq s, \quad E \geqq \varepsilon,$$

also

12′) $$abs.\frac{a}{E} = \frac{abs.\, a}{E} \leqq \frac{s}{\varepsilon} = \frac{1}{\sin\delta}.$$

Der Ausdruck $\frac{a}{E}$ wird daher immer endlich sein, wenn für alle Stellen des Integrationsgebiets δ von Null verschieden ist. Das Letztere ist aber dann der Fall, wenn der Punkt $P(xyz)$ die gegebene Fläche in O in einer Richtung durchdringt, die mit der in O an die gegebene Fläche gelegten Tangentialebene einen von Null verschiedenen Winkel bildet. Unter dieser Voraussetzung ist dann auch $\frac{\partial c}{\partial a}\frac{1}{E}$ und damit μ immer endlich. Das zu untersuchende Integral

$$J_2 = \int \mu \frac{do}{E},$$

welches die Form eines Oberflächenpotentials besitzt und wo μ die Flächendichtigkeit repräsentirt, bleibt dann bekanntlich endlich und stetig, wenn der Punkt P die gegebene Fläche in O durchschreitet. Es ist also

$$(J_2)_a^i = 0.$$

Das dritte Integral der Gleichung 10)

$$J_3 = \int \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\, d\omega$$
$$= \int \gamma \frac{\partial}{\partial a}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\, do$$

ist von der Form

13) $$\int \nu \frac{c-z}{E^3}\, do,$$

d. h. von der Form eines ersten Differentialquotienten nach z desjenigen Potentials, welches von Massen herrührt, die mit einer Dichtigkeit

$$\nu = \gamma \frac{\partial}{\partial a}\left(t \frac{\partial c}{\partial a}\right)$$

über die gegebene Fläche ausgebreitet sind. Da die z-Axe mit der Flächennormale in O zusammenfällt, so besitzt das betrachtete Integral nach einem bekannten Potentialsatze* eine Unstetigkeit von der Grösse $-4\pi\nu_0$, vorausgesetzt, dass sich ν in unmittelbarer Nähe von O stetig ändert und in O selbst den Werth ν_0 annimmt.

Nun ist

$$\nu = \gamma \frac{\partial}{\partial a}\left(t \frac{\partial c}{\partial a}\right) = q \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} + \gamma \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial c}{\partial a}.$$

Da q und $\frac{\partial t}{\partial a}$ nach den über die Flächendichtigkeit und ihre ersten Ableitungen nach den Tangenten der Fläche gemachten Voraussetzungen, sowie γ, $\frac{\partial^2 c}{\partial a^2}$, $\frac{\partial c}{\partial a}$ nach den über die Krümmung getroffenen Bedingungen endlich und stetig sind, so ist der Ausdruck ν endlich und in der unmittelbaren Nähe von O auch stetig. Nun wird für $a=0$, $b=0$ nach 4) $q=q_0$, und nach den Formeln 2′) $\frac{\partial^2 c}{\partial a^2}=\frac{1}{r_1}$, $\frac{\partial c}{\partial a}=0$, daher $\nu_0 = q_0 \frac{1}{r_1}$. Die Unstetigkeit des Integrals J_3 beträgt demnach

$$(J_3)_a^i = -4\pi q_0 \frac{1}{r_1}.$$

Es erübrigt noch, die beiden letzten Glieder der Gleichung 10) zu betrachten, nämlich J' und $\frac{\partial J}{\partial x}$. Die Integrale J' und J erstrecken sich über eine den Punkt O umschliessende Curve σ, welche in allen ihren Theilen um eine sehr kleine, aber endliche Strecke von O entfernt bleibt. Lassen wir nun den Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O in einer im Allgemeinen beliebigen Richtung durchschreiten, die aber mit der in O an die gegebene Fläche gelegten Tangentialebene einen noch angebbaren, endlichen Winkel bildet, so kann die Entfernung E nie unendlich klein werden. Es müssen also diese „Randintegrale" mit Rücksicht auf die Endlichkeit und Stetigkeit aller übrigen in ihnen auftretenden Grössen endlich bleiben und sich stetig ändern, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet. Ganz dasselbe gilt aber auch von den Ableitungen dieser Integrale nach x, y und z. Wir finden daher

$$(J')_a^i = 0, \quad \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_a^i = 0.$$

Stellen wir das Resultat für $\Delta(x^2)$ nach der Formel 10′) zusammen, so erhalten wir, da nur $(J_3)_a^i$ von Null verschieden ist, die Relation

* Gauss, Allgemeine Lehrs., Art. 15

$$14)\qquad \varDelta(x^2) = \frac{4\pi q_0}{r_1}.$$

Man kann nun, da x und y in den Ausdrücken für V_1 etc. ganz symmetrisch vorkommen, sofort das Resultat angeben, zu welchem man gelangen muss, wenn man in analoger Weise die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}$ bestimmt. Bezeichnen wir dieselbe entsprechend mit $\varDelta(y^2)$, so erhalten wir

$$15)\qquad \varDelta(y^2) = \frac{4\pi q_0}{r_2}.$$

In den Formeln 14) und 15), welche ausführlicher lauten

$$\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_a = \frac{4\pi q_0}{r_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}\right)_a = \frac{4\pi q_0}{r_2},$$

bedeuten q_0 die Flächendichtigkeit im Punkte O und r_1 resp. r_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte, die in der xz- resp. yz-Ebene des eingeführten Coordinatensystems gelegen sind. Selbstverständlich sind diese Krümmungsradien positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt mit dem Punkte i auf derselben oder entgegengesetzten Seite der gegebenen Fläche liegt.

(Schluss folgt.)

VIII.

Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde.

Von

Dr. Ad. Schumann,

Oberlehrer am Ascanischen Gymnasium in Berlin.

Im 23. Bande dieser Zeitschrift hat Herr L. Burmester sich mit der Bewegung affin-veränderlicher Systeme beschäftigt*, welche als besondere Formen die ähnlich-veränderlichen und starren Systeme in sich begreifen. Von synthetischen Gesichtspunkten ausgehend, untersucht er die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Systempunkte und giebt über die Abhängigkeit der Bewegungszustände eines Punktes von seiner Lage eine Reihe einfacher Gesetze, welche eine klare Einsicht in die Bewegungsformen jener Systeme ermöglichen. Auf die Flächengeschwindigkeiten der Systempunkte, welche man gegen einen beliebigen festen Punkt schätzen mag, geht er nicht ein, auch nicht auf die Bogenlängen, welche eine Systemgerade bei der Bewegung umschreibt, oder auf die Flächen, welche eine solche umzieht. Fragen dieser Natur sind, soweit sie sich auf starre Systeme beziehen, in letzter Zeit von Herrn Liguine** im Anschluss an die Steiner'sche Abhandlung: „Ueber den Krümmungsschwerpunkt ebener Curven" (Crelle's Journal, Bd. XXI, 1840), und von Herrn Darboux*** behandelt worden. Auch ich habe über die Flächen, welche eine Gerade eines starren Systems bei der Bewegung desselben umzieht, bereits im Jahre 1867 einige Theoreme†

---

* L. Burmester, Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 23 S. 108—131.

** *V. Liguine, Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable. Bull. d. scienc. math., Tom. II, Aout 1878, p. 306.*

*** *G. Darboux, Sur le mouvement d'une figure invariable; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires. Bull. d. scienc. math., Tom. II, Aout 1878, p. 383.*

† Ad. Schumann, Beziehungen zwischen Flächen im Zusammenhange mit dem Krümmungsschwerpunkte von Curven. Progr. d. Louisenstädt. Realschule in Berlin, 1867.

veröffentlicht, und aus Anlass der Darboux'schen Abhandlung im 25. Bande dieses Journals* die Theoreme in generellerer Form vorgelegt und über die Bogenlängen, welche eine solche Gerade umschreibt, andere hinzugefügt.

Alle diese Theoreme lassen sich auch auf solche Gebilde ausdehnen, welche während der Bewegung ihre Aehnlichkeit bewahren, ein Theil derselben selbst auf diejenigen, welche, während sie sich bewegen, solche Aenderungen der Gestalt zulassen, dass die Affinität erhalten bleibt. Es haben diese Gesetze nicht nur deshalb Interesse, weil sie trotz so allgemeiner Voraussetzungen sich in höchst einfachen Formen darstellen, sondern auch insofern, als sie bereits bekannte Theoreme unter andere Gesichtspunkte stellen und so auf ihre Natur ein neues Licht werfen.

I.

Es seien u und v zwei complexe Zahlen; ihnen entsprechen in der Ebene, welche das Reich der Zahlen veranschaulicht, zwei Punkte. Sind z und η gleichfalls zwei complexe Zahlen, welche durch die Gleichung $\eta = zu + v$ verbunden sind, so gehört zu jedem Punkte z der Zahlenebene ein Punkt η dergestalt, dass jedem Gebilde aus einer Anzahl von Punkten z ein ähnliches Gebilde von Punkten η entspricht. Es liegen nämlich die Punkte η zu den Punkten v und $v+u$ in derselben Lage, wie die Punkte z zu den Punkten Null und Eins, d. h. das Dreieck $(z, 0, 1)$ ist stets dem Dreieck $(\eta, v, v+u)$ ähnlich.

Fasst man nunmehr u und v als Functionen der Zeit auf, so wird das η-System sich mit der Zeit verändern, aber die Aehnlichkeit in sich bewahren; denn es bleibt stets dem z-System ähnlich. Man könnte sich die Vorstellung bilden, dass eine Strecke $(v, v+u)$ sich beliebig bewegte und während ihrer Bewegung sich ganz willkürlich änderte; jeder Punkt η würde mit dieser Strecke zu jeder Zeit ein Dreieck bestimmen, welches mit dem von der Zeit unabhängigen Dreieck $(z, 0, 1)$ die Aehnlichkeit bewahrt.

Soll das System während der Bewegung in sich starr bleiben, so hat man nur die Bedingung $mod. u = const.$ hinzuzufügen; denn die Strecke zwischen v und $v+u$ ist nichts Anderes, als $mod. u$. Es muss also in diesem Falle der Punkt u auf einem Kreise um den Nullpunkt seine Bahn haben.

Hiermit ist die Grundlage für die Behandlung ähnlich-veränderlicher ebener Gebilde gegeben, und es würde ein Leichtes sein, die wesentlich-

---

* Ad. Schumann, Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Geraden umschrieben werden. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 25 S. 87—95.

sten Theoreme des Herrn Burmester aus den analytischen Formen, welche sich aus diesem Boden entwickeln, abzulesen. Aber es steht die Untersuchung einer andern Frage in Absicht.

Wenn das η-System sich nach einem willkürlich gewählten Gesetz bewegt, aber während seiner Bewegung nur solche Veränderungen in sich zulässt, dass es die Aehnlichkeit mit dem z-System beibehält, so wird ein Richtstrahl, welcher von dem Nullpunkte nach einem Punte η läuft, eine Fläche durchstreichen. Die Grösse dieser Fläche ist theils abhängig von der Wahl des Bewegungsgesetzes, theils von der Lage des Punktes η im System. Ist über jenes entschieden, so lässt sich nach der Abhängigkeit von dieser fragen. Zu diesem Zwecke stelle ich die Aufgabe: Welche Systempunkte umschreiben bei der Bewegung gleiche Flächen?

Es sei

$$u = p + qi, \quad v = r + si, \quad z = x + yi, \quad \eta = \varrho e^{i\varphi}.$$

Da $\varrho e^{i\varphi} = uz + v$, so folgt durch eine logarithmische Differentiation

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + i\,d\varphi = \frac{z\,du + dv}{uz + v}. \tag{1}$$

Um die Trennung der rechten Seite der Gleichung in einen reellen und imaginären Bestandtheil zu vollziehen, erweitere man sie mit dem conjugirten Werthe von η. Dadurch wird der Nenner ϱ^2, der Zähler aber erhält die Form

$$\begin{aligned}&[(x + iy)(dp + i\,dq) + (dr + i\,ds)][(x - iy)(p - iq) + (r - is)]\\ = &[(x\,dp - y\,dq + dr) + i(x\,dq + y\,dp + ds)][(xp - yq + r) - i(xq + yp + s)].\end{aligned}$$

Der imaginäre Bestandtheil dieses Ausdruckes ist

$$i[(xp - yq + r)(x\,dq + y\,dp + ds) - (xq + yp + s)(x\,dp - y\,dq + dr)].$$

Denkt man nun beide Seiten der Gleichung 1) mit ϱ^2 multiplicirt und vergleicht die rein imaginären Werthe, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\varrho^2\,d\varphi = {} & x^2(p\,dq - q\,dp) + y^2(p\,dq - q\,dp)\\ & + x(r\,dq - q\,dr + p\,ds - s\,dp) + y(r\,dp - p\,dr + s\,dq - q\,ds)\\ & + (r\,ds - s\,dr).\end{aligned}$$

Die Grösse $\frac{1}{2}(p\,dq - q\,dp)$ ist das Flächendifferential, welches der Punkt u in dem Zeitdifferential umschreibt, und möge mit dU bezeichnet werden; die Grösse $\frac{1}{2}(r\,ds - s\,dr) = dV$ hat dieselbe Bedeutung für den Punkt v, endlich sind die Coefficienten von x und y gleichfalls gewisse Flächendifferentiale, von deren Bedeutung indessen vorläufig abgesehen werden mag.

Führt man eine Integration über einen beliebigen Zeitabschnitt aus, so können x und y vor die Integrale genommen werden, da sie von der Zeit unabhängig sind, und man erhält, wenn man mit F die von dem Punkte η umschriebene Fläche bezeichnet, für F einen Ausdruck der Form

$$F = (x^2 + y^2) U + x A + y B + V.$$

Hierin sind U und V die Flächen, welche u und v während des Bewegungsvorganges umschreiben, A und B aber gewisse Integrale, die gleichfalls als Flächen angesehen werden dürfen.

Aus der Form für F ergiebt sich, dass alle diejenigen Punkte Flächen von gleichem Inhalt umschreiben, welche Punkten z entsprechen, die auf der Peripherie eines Kreises gelegen sind; da einem Kreise im z-System aber ein Kreis im η-System entspricht, so liegen diese Punkte η gleichfalls auf einem Kreise. Was den Werth der umschriebenen Flächen betrifft, so mag die Bemerkung hinzugefügt werden, dass dieselben stets in Gauss'schem Sinne in Rechnung zu stellen sind.

Im Besondern umschreiben diejenigen Punkte η Flächenwerthe Null, deren z-Werthe auf dem Kreise

$$x^2 + y^2 + x \frac{A}{U} + y \frac{B}{U} + \frac{V}{U} = 0$$

sich befinden. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat zu Coordinaten

$$\alpha = -\frac{A}{2U}, \quad \beta = -\frac{B}{2U}$$

und zum Radius die Grösse R, welche durch die Gleichung bestimmt ist

$$R^2 = \frac{A^2 + B^2}{4U^2} - \frac{V}{U}.$$

Für die Fläche M, welche der Mittelpunkt des Nullkreises umschreibt, gewinnt man hiernach den Werth

$$\begin{aligned} M &= \left(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha \frac{A}{U} + \beta \frac{B}{U} + \frac{V}{U}\right) U \\ &= \left(\frac{V}{U} - \frac{A^2 + B^2}{4U^2}\right) U \\ &= -R^2 U. \end{aligned}$$

Ist $z_1 = x_1 + iy_1$ ein beliebiger Punkt des z-Systems, so stellt der algebraische Ausdruck

$$x_1^2 + y_1^2 + x_1 \frac{A}{U} + y_1 \frac{B}{U} + \frac{V}{U}$$

die Potenz des Punktes z_1 in Beziehung auf den Kreis im z-Gebilde dar, welcher dem Nullkreis im η-Gebilde entspricht. Bezeichnet Q den Abstand des Punktes z_1 von dem Mittelpunkte jenes Kreises im z-System, so drückt sich diese Potenz durch $Q^2 - R^2$ aus und der Punkt η_1 umschreibt daher eine Fläche

$$F = U(Q^2 - R^2) = M + Q^2 U.$$

Um endlich alle Grössen auf das η-System zu beziehen, sei ϱ der Abstand eines Punktes η vom Mittelpunkte des Nullkreises und $mod\, u = a$ zu Beginn der Bewegung. Da alsdann $\frac{Q}{1} = \frac{\varrho}{a}$, so ist

$$F = M + \frac{\varrho^2}{a^2} U$$

oder mit Einführung des Radius r des Nullkreises an Stelle der Grösse a

$$F = M\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right);$$

denn es ist $\frac{a}{1} = \frac{r}{R}$ und $M = -UR^2$.

Wenn daher ein Gebilde sich ganz willkürlich bewegt und während der Bewegung sich so ändert, dass es die Aehnlichkeit bewahrt, so umschreiben diejenigen Punkte gleiche Flächenräume, welche auf einem bestimmten Kreise gelegen sind. Dem veränderlich gedachten Werthe dieser Flächenräume entspricht eine Schaar concentrischer Kreise. Der Mittelpunkt dieser Kreisschaar umzieht eine Minimal- oder Maximalfläche, je nachdem das Bewegungsgesetz so beschaffen ist, dass die vom Punkte u umschriebene Fläche einen positiven oder negativen Werth empfängt.

Bleibt während der Bewegung das System in sich starr, so beträgt, da zu jeder Zeit $mod\, u = a$ ist, die von u umschriebene Fläche $\frac{1}{2} a^2 \Theta$, wo Θ die Gesammtdrehung des Systems bedeutet, und es ist die von einem Systempunkte umschriebene Fläche $F = M + \frac{1}{2} \varrho^2 \Theta$.

Ist endlich die Bewegung des starren Systems periodisch, d. h. gelangt das System nach einer vollständigen Umdrehung in seine ursprüngliche Lage zurück, so ist $\Theta = 2\pi$, und daher $F = M + \varrho^2 \pi$; es unterscheidet sich also die Fläche, welche ein beliebiger Punkt des Systems umzieht, von der Minimalfläche um die Grösse eines Kreises, dessen Radius die Entfernung des Punktes von demjenigen Punkte ist, welche die Minimalfläche umschreibt. Hierin liegt das Gesetz von Steiner, welches derselbe in seiner oben citirten Abhandlung veröffentlicht hat und welches in der Folge durch eine Anzahl allgemeinerer Gesetze der Kinematik umfasst wurde.

Sind 1, 2, 3 Punkte des ähnlich-veränderlichen Systems, welche in einer Geraden liegen, und bedeuten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Abstände derselben von dem ausgezeichneten Punkte, der eine Minimal- resp. Maximalfläche umschreibt, so gelten für die drei Flächenräume F_1, F_2, F_3 die Gleichungen

$$F_1 = M + \frac{\varrho_1^2}{a^2} U, \quad F_2 = M + \frac{\varrho_2^2}{a^2} U, \quad F_3 = M + \frac{\varrho_3^3}{a^2} U.$$

Bezeichnet (i, k) den Abstand des Punktes i von dem Punkte k und wird $(i, k) = -(k, i)$ gerechnet, so lässt sich die Relation folgern

$$F_1(2, 3) + F_2(3, 1) + F_3(1, 2) = \frac{U}{a^2} (\varrho_1^2(2, 3) + \varrho_2^2(3, 1) + \varrho_1^2(1, 2)).$$

Der Ausdruck $\varrho_1^2(2,3)+\varrho_2^2(3,1)+\varrho_3^2(1,2)$ lässt sich nach folgenden Gesichtspunkten transformiren. Man überzeugt sich leicht, dass, wenn der Punkt 1 proportional $(2,3)$ und der Punkt 3 proportional $(1,2)$ belastet gedacht wird, der Punkt 2 der Schwerpunkt des so belasteten Systems ist. Wendet man daher einen bekannten Satz vom Schwerpunkt an, so ist

$$\begin{aligned}\varrho_1^2(2,3)+\varrho_3^2(1,2) &= (1,2)^2(2,3)+(3,2)^2(1,2)+\varrho_2^2[(2,3)+(1,2)]\\ &= -(1,2)(2,3)(3,1)+\varrho_2^2(1,3).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\varrho_1^2(2,3)+\varrho_2^2(3,1)+\varrho_3^2(1,2)=-(1,2)(2,3)(3,1).$$

Führt man diesen Werth in obige Gleichung ein, so darf jene Beziehung, wie folgt, ausgesprochen werden:

Wenn ein ähnlich-veränderliches System sich nach einem ganz willkürlich gewählten Gesetz bewegt, so sind die Flächen, welche drei in gerader Linie liegende Systempunkte umschreiben, durch die Relation verknüpft

$$F_1(2,3)+F_2(3,1)+F_3(1,2)+\frac{U}{a^2}(1,2)(2,3)(3,1)=0.$$

In dieser Gleichung liegt als besonderer Fall der bekannte Satz von Holditsch. Man nehme zu dem Ende das System starr an und lasse die starre Strecke a, deren Endpunkte die Punkte 1 und 3 sein mögen, auf einer geschlossenen Curve gleiten, bis sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist. Diesen Annahmen gemäss ist $(1,3)=a$, $U=a^2\pi$, und $F_1=F_2=F$, wenn F die Fläche bezeichnet, in deren Umgrenzung die Endpunkte der Strecke sich bewegen. Theilt nun ein Punkt μ die Strecke a in die Theile b und c, so wird die Fläche F_μ bestimmt durch

$$F(c)+F_\mu(-a)+F(b)+\pi(b)(c)(-a)=0$$

oder

$$F-F_\mu=\pi b c.$$

Bewegt sich daher eine Strecke in einer geschlossenen Curve, bis sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, so unterscheidet sich die Fläche, welche ein Punkt dieser Strecke umschreibt, von der geschlossenen Curve um den Inhalt der Ellipse, welche zu Halbaxen die Theile hat, in welche der beschreibende Punkt die Strecke zerlegt.

Eine Verallgemeinerung dieses Holditsch'schen Theorems tritt aus obiger Relation in folgender Form hervor:

Umlaufen zwei Punkte die Umgrenzung einer beliebigen Fläche F, bis sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt sind, so wird ein Richtstrahl, welcher von einem beliebigen festen Punkte ausläuft und die jedesmalige mit der Zeit variable Distanz der beiden Punkte in Grösse und Richtung darstellt, eine Fläche U durchstreichen. Ein Punkt μ, welcher den veränderlichen Abstand jener Punkte im Verhältniss von

$p:q$ theilt, umschreibt eine Fläche F_μ, welche mit den Flächen U und F in der Verbindung steht:

$$F - F_\mu = U\frac{pq}{(p+q)^2}.$$

Es seien 1, 2, 3, 4 vier beliebige Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems, und die Form (i,k,l) bedeute den Werth der Dreiecksfläche, welche von den Punkten i, k, l gebildet wird. Diese Dreiecksfläche mag, in einem Sinne umlaufen, positiv gezählt werden, in dem entgegengesetzten Sinne aber negativ, so dass in der Rechnung die Formel (i,k,l) gleichwerthig mit $-(l,k,i)$ behandelt werde.

Der obigen Formel gemäss sind die Flächenräume, welche jene vier Punkte umschreiben, durch die Gleichungen bestimmt

$$F_1 = M + \frac{\varrho_1^2}{a^2}U,\quad F_2 = M + \frac{\varrho_2^2}{a^2}U,\quad F_3 = M + \frac{\varrho_3^2}{a^2}U,\quad F_4 = M + \frac{\varrho_4^2}{a^2}U.$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned}&F_1(2,3,4) - F_2(3,4,1) + F_3(4,1,2) - F_4(1,2,3)\\ &= \frac{U}{a^2}\left[\varrho_1^2(2,3,4) - \varrho_2^2(3,4,1) + \varrho_3^2(4,1,2) - \varrho_4^2(1,2,3)\right].\end{aligned}$$

Um den Ausdruck $\varrho_1^2(2,3,4) - \varrho_2^2(3,4,1) + \varrho_3^2(4,1,2) - \varrho_4^2(1,2,3)$ in eine andere Form überzuführen, möge man in den Eckpunkten des Dreiecks $(1,2,3)$ sich Massen denken, welche proportional den Werthen $+(2,3,4)$, $-(3,4,1)$, $+(4,1,2)$ sind. Der Schwerpunkt dieser Massen ist der Punkt 4. Wendet man nun einen bekannten Satz vom Schwerpunkte an, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}&\varrho_1^2(2,3,4) - \varrho_2^2(3,4,1) + \varrho_3^2(4,1,2)\\ &= (1,4)^2(2,3,4) - (2,4)^2(3,4,1) + (3,4)^2(4,1,2)\\ &+ \varrho_4^2[(2,3,4) - (3,4,1) + (4,1,2)]\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&\varrho_1^2(2,3,4) - \varrho_2^2(3,4,1) + \varrho_3^2(4,1,2) - \varrho_4^2(1,2,3)\\ &= (1,4)^2(2,3,4) - (2,4)^2(3,4,1) - (3,4)^2(4,1,2).\end{aligned}$$

Ist R der Radius des Kreises, welcher dem Dreieck $(1,2,3)$ umgeschrieben ist, und m der Abstand seines Mittelpunktes von dem Schwerpunkte 4, so folgt durch Benutzung desselben Satzes

$$\begin{aligned}&R^2(2,3,4) - R^2(3,4,1) + R^2(4,1,2)\\ &= (1,4)^2(2,3,4) - (2,4)^2(3,4,1) + (3,4)^2(4,1,2)\\ &+ m^2[(2,3,4) - (3,4,1) + (4,1,2)]\end{aligned}$$

oder

$$R^2(1,2,3) - m^2(1,2,3) = (1,4)^2(2,3,4) - (2,4)^2(3,4,1) + (3,4)^2(4,1,2).$$

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\varrho_1^2(2,3,4) - \varrho_2^2(3,4,1) + \varrho_3^2(4,1,2) - \varrho_4^2(1,2,3) = (R^2 - m^2)(1,2,3).$$

Der Werth $m^2 - R^2$ ist die Potenz des Punktes 4 in Bezug auf den Kreis, welcher dem Dreieck (1, 2, 3) umgeschrieben ist. Wird diese P^2 gesetzt, so folgt:

Wenn ein ähnlich-veränderliches Gebilde sich nach einem ganz willkürlichen Gesetz bewegt, so umschreiben vier beliebige Punkte desselben vier Flächenräume, welche durch die Gleichung verbunden sind

$$F_1(2,3,4) - F_2(3,4,1) + F_3(4,1,2) - F_4(1,2,3) = -\frac{U}{a^2} P^2(1,2,3),$$

worin P die Potenz des Punktes 4 gegen den dem Dreieck (1, 2, 3) umgeschriebenen Kreis bedeutet.

Diese Relation enthält die Generalisation des Theorems von Herrn Leudersdorf. Denn wenn das System starr ist und eine vollständige Umdrehung macht, so ist $U^2 = a^2\pi$, und führt man die Dreieckscoordinaten des Punktes 4 gegen das Grunddreieck in der Form ein $X = \frac{(2,4,3)}{(1,2,3)}$, $Y = \frac{(3,4,1)}{(1,2,3)}$, $Z = \left(\frac{1,4,2}{1,2,3}\right)$, so ergiebt sich

$$F_4 = F_1 X + F_2 Y + F_3 Z + \pi P^2.*$$

Aus der obigen Relation springt eine einfache Beziehung zwischen vier Punkten einer Ebene hervor, auf die noch die Aufmerksamkeit gelenkt werden mag. Wenn nämlich P^2_m die Potenz eines Punktes m gegen den Kreis bedeutet, welcher dem Dreieck (i, k, l) umgeschrieben ist, so geht die Gleichung

$$F_1(2,3,4) - F_2(3,4,1) + F_3(4,1,2) - F_4(1,2,3) = -\frac{U}{a^2} P_4^2(1,2,3),$$

wenn man 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4 und 4 mit 1 vertauscht, in folgende über:

$$F_2(3,4,1) - F_3(4,1,2) + F_4(1,2,3) - F_1(2,3,4) = -\frac{U}{a^2} P_1^2(2,3,4).$$

Aus beiden aber ergiebt sich

$$P_4^2(1,2,3) + P_1^2(2,3,4) = 0.$$

Wenn demnach vier Punkte in der Ebene gegeben sind, so hat das Product, gebildet aus der Dreiecksfläche von dreien und der Potenz des vierten gegen den Kreis, welcher durch die drei anderen bestimmt ist, denselben absoluten Werth, wie man auch die Punkte combiniren mag.

II.

Eine andere Frage, welche gleichfalls eine Lösung in einfacher Form zulässt, ist die: Welche Geraden eines ähnlich-veränderlichen Systems

---

* *Leudersdorf, Theorem in Kinematics. The Messenger of Mathematics, t. VII p. 125, 1877.*

umschreiben während der Bewegung Bogenlängen von gleicher Grösse? Ehe auf sie eingegangen wird, soll ein einfacher analytischer Ausdruck für das Bogendifferential gegeben werden, welches eine Gerade, deren Coefficienten als Functionen einer willkürlichen Variabeln, etwa der Zeit, angesehen werden, umhüllt.

Werden in der Gleichung $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ die Coefficienten als Functionen der Zeit betrachtet, so umhüllt die Gerade eine Curve. Ein Punkt derselben ist durch die Gleichungen gegeben

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0, \quad -x \sin\alpha + y \cos\alpha - \frac{d\delta}{d\alpha} = 0;$$

aus ihnen folgen für x und y die Werthe

$$x = \delta \cos\alpha - \frac{d\delta}{d\alpha} \sin\alpha, \quad y = \delta \sin\alpha + \frac{d\delta}{d\alpha} \cos\alpha.$$

Es ist demnach

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\delta \sin\alpha - \frac{d^2\delta}{d\alpha^2} \sin\alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = \delta \cos\alpha + \frac{d^2\delta}{d\alpha^2} \cos\alpha$$

und das Bogendifferential ds wird in der Form gewonnen

$$ds = \left(\delta + \frac{d^2\delta}{d\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems sei dadurch gekennzeichnet, dass ein rechter Winkel mit der Schenkellänge r sich bewegt, die Grösse r aber während der Bewegung sich nach irgend einem Gesetz ändert. Auf diesen rechten Winkel sei eine Systemgerade durch die Gleichung $\frac{\xi}{A} + \frac{\eta}{B} = 1$ bezogen, und ihr Abbild in dem festen System sei durch die Abschnitte auf den Axen A_1 und B_1 bestimmt, so dass $\frac{A}{r} = \frac{A_1}{1}$ und $\frac{B}{r} = \frac{B_1}{1}$. Führt man die Liniencoordinaten $u = -\frac{1}{A_1}$, $v = -\frac{1}{B_1}$ ein, so stellt sich die Gleichung der Geraden in der Form dar $\xi u + \eta v + r = 0$, worin u und v von der Zeit unabhängig sind. Ist nunmehr φ der Winkel, den die positive η-Richtung mit der positiven x-Richtung bildet, und bedeuten a und b die Abstände der ξ- und η-Axe von dem Anfangspunkte des festen Coordinatensystems, so ist

$$\eta = x \cos\varphi + y \sin\varphi - a, \quad \xi = -x \sin\varphi + y \cos\varphi - b,$$

und daher die Gleichung der Geraden

$$x(v \cos\varphi - u \sin\varphi) + y(v \sin\varphi + u \cos\varphi) - (av + bu - r) = 0.$$

Wenn daher die betrachtete Systemgerade durch $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ dargestellt ist, so ist

$$\cos\alpha = \frac{v \cos\varphi - u \sin\varphi}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{v \sin\varphi + u \cos\varphi}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \delta = \frac{av + bu - r}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen ist zu folgern

$$d\alpha = d\varphi, \quad \frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{v\frac{d\delta}{d\varphi} + u\frac{d\delta}{d\varphi} - \frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Da nun $\frac{ds}{d\alpha} = \delta + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)$, so ist, wenn man eine Integration über einen Zeitabschnitt ausführt, die Bogenlänge S dargestellt durch

$$S = \int \delta\, d\alpha + \left\{\frac{d\delta}{d\alpha}\right\}_{\alpha_0}^{\alpha_1}.$$

Führt man in diese Form obige Werthe ein und zieht die von der Zeit unabhängigen Grössen vor die Integrale, so ist

$$S = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\int a\, d\varphi + \left\{\frac{d\delta}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right) + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\int b\, d\varphi + \left\{\frac{d\delta}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\int r\, d\varphi + \left\{\frac{dr}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right).$$

Setzt man

$$\int a\, d\varphi + \left\{\frac{d\delta}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} = L, \quad \int b\, d\varphi + \left\{\frac{d\delta}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} = M, \quad \int r\, d\varphi + \left\{\frac{dr}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} = N,$$

so ergiebt sich

$$S = \frac{vL + uM - N}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

oder

$$S^2(u^2+v^2) - (vL + uM - N)^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist zu erkennen, dass die Systemgeraden, welche gleiche Bogenlängen umschreiben, als Abbilder in dem festen System eine Schaar Gerade haben, welche einen Kreis umhüllen, dass also auch diese Systemgeraden selbst Tangenten eines gewissen Kreises sind.

Ist die Gleichung der beschreibenden Systemgeraden auf den sich bewegenden rechten Winkel in der Form bezogen $\xi \cos\mu + \eta \sin\mu - p = 0$, so lassen sich die Coefficienten dieser Gleichung durch u und v ausdrücken; es ist nämlich

$$\cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$\sin\mu = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$
$$p = \frac{A.B}{\sqrt{A^2+B^2}} = r.\frac{A_1.B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = r.\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Da nun $S = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}L + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}M - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}N$, so ist S auch darstellbar durch

$$S = -L\sin\mu - M\cos\mu - \frac{p}{r}N.$$

Für $\mu = 0$, $p = 0$ ist $S = -M$, d. h. $-M$ bedeutet die Bogenlänge, welche die η-Axe umzieht; für $\mu = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ ist $S = -L$, also bezeichnet $-L$ die von der ξ-Axe umschriebene Bogenlänge. Führt man diese beiden Bogen bezüglich S_ξ und S_η ein, so ist

$$S = S_\eta \cos\mu + S_\xi \sin\mu - \frac{p}{r}N,$$

$$S = \frac{N}{r}\left\{\frac{r\,.\,S_\eta}{N}\cos\mu + \frac{r\,.\,S_\xi}{N}\sin\mu - p\right\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt den Abstand eines Punktes mit den Coordinaten $\frac{r\,.\,S_\eta}{N}$, $\frac{r\,.\,S_\xi}{N}$ von der beschreibenden Systemgeraden dar. Da diese Coordinaten, unabhängig von der Lage der Geraden im ähnlich-veränderlichen System, einzig und allein durch das Bewegungsgesetz bedingt sind, so spielt der Punkt für alle Systemgeraden dieselbe Rolle. Nennt man den Abstand desselben von einer Systemgeraden P, so ist der von ihr umzogene Bogen

$$S = \frac{N}{r}P.$$

Zum Verständniss der Formel möge bemerkt werden, dass bei den Rückkehrpunkten die Bogen ihr Zeichen wechseln, unter S also die in diesem Sinne gezählte algebraische Summe der Bogenlängen zu verstehen ist.

Der Inhalt der letzten Gleichung lässt sich so darstellen:

Wenn ein ähnlich-veränderliches System eine willkürlich gewählte Bewegung macht, so giebt es in dem System einen Punkt mit der bemerkenswerthen Eigenschaft, dass alle Geraden, welche durch ihn hindurchgehen, Bogen bei der Bewegung umschreiben, deren Gesammtwerth Null ist; die Geraden aber, welche gleiche Bogenlängen umziehen, umhüllen einen Kreis, für welchen jener Punkt Mittelpunkt ist.

Ist das System starr, so ist r unveränderlich, daher

$$N = \int r\,d\varphi + \left\{\frac{dr}{d\varphi}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} = r\Theta \quad \text{und} \quad S = P\,.\,\Theta,$$

worin Θ die bei der Bewegung vom System vollzogene Drehung angiebt. Ist die Bewegung periodisch, d. h. kehrt das System nach einer Umdrehung in seine Anfangslage zurück, so ist $S = 2\pi P$, also gleich der Peripherie eines Kreises, dessen Tangenten alle denselben Bogen S bei der Bewegung umschreiben.

Wenn n Gerade des Systems die Bogen S_1, S_2, ... S_n während der Bewegung umschreiben, so gelten die Gleichungen

$$S_1 = P_1 . \frac{N}{r}, \quad S_2 = P_2 . \frac{N}{r}, \; \dots \; S_n = P_n . \frac{N}{r}.$$

Begrenzen diese n Geraden ein n-Eck mit den Seiten a_1, a_2, ... a_n, so lässt sich

$$S_1 a_1 + S_2 a_2 + \dots + S_n a_n = \frac{N}{r} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n)$$

folgern, und wenn man $P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n$ durch den doppelten Inhalt des n-Ecks ersetzt, so ergiebt sich:

Die n Seiten a_1, a_2, ... a_n eines n-Ecks umschreiben bei der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Gebildes n Bogenlängen S_1, S_2, ... S_n, welche durch

$$S_1 a_1 + S_2 a_2 + \dots + S_n a_n = 2 \frac{N}{r} . \mathfrak{B}$$

verknüpft sind, worin $\mathfrak{B}$ den Inhalt des n-Ecks, $\frac{N}{r}$ aber für alle Systemgeraden denselben oben definirten Werth bedeutet.

Für ein Dreieck mit dem Inhalt $\varDelta$ gilt demnach die Beziehung

$$S_1 a_1 + S_2 a_2 + S_3 a_3 = 2 \varDelta . \frac{N}{r}.$$

Ersetzt man a_1, a_2, a_3 durch den Radius des umgeschriebenen Kreises R und die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$S_1 \sin(2, 3) + S_2 \sin(3, 1) + S_3 \sin(1, 2) = \frac{\varDelta}{R} . \frac{N}{r}.$$

Denkt man eine Dreiecksseite so verschoben, dass sie durch den Durchschnitt der beiden anderen geht, so convergirt $\frac{\varDelta}{R}$ zu Null, und man darf daher folgenden Satz aussprechen:

Drei Systemgerade 1, 2, 3, welche sich in einem Punkte schneiden, umschreiben bei der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems drei Bogenlängen S_1, S_2, S_3, für welche die Beziehung gilt

$$S_1 \sin(2, 3) + S_2 \sin(3, 1) + S_3 \sin(1, 2) = 0.$$

Es überträgt sich also dieser für starre Systeme zuerst von Herrn Darboux* aufgestellte Satz in aller Reinheit auch auf ähnlich-veränderliche Gebilde.

Es war oben gezeigt, dass, wenn eine Systemgerade in der Form $\xi \cos\mu + \eta \sin\mu - p = 0$ dargestellt ist, die von ihr umschriebene Bogenlänge durch $S = S_\eta \cos\mu + S_\xi \sin\mu - p . \frac{N}{r}$ angegeben ist. Sind vier Systemgerade durch die Werthe $\mu_1 p_1$, $\mu_2 p_2$, $\mu_3 p_3$, $\mu_4 p_4$ bestimmt, so erhält man

* *Darboux, Bull. des Scienc. math., Tom II, Aout 1878, p. 345.*

zur Darstellung der von ihnen umschriebenen Bogenlängen S_1, S_2, S_3, S_4 vier Gleichungen. Eliminirt man aus ihnen S_η, S_ξ, $\frac{N}{r}$, so gewinnt man als Eliminationsresultante

$$\begin{vmatrix} S_1 & \cos\mu_1 & \sin\mu_1 & p_1 \\ S_2 & \cos\mu_2 & \sin\mu_2 & p_2 \\ S_3 & \cos\mu_3 & \sin\mu_3 & p_3 \\ S_4 & \cos\mu_4 & \sin\mu_4 & p_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 & p_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 & p_2 \\ \cos\mu_3 & \sin\mu_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

sind Invarianten und haben folgende geometrische Beziehung. Bezeichnet man den Abstand des Schnittpunktes der Geraden 1 und 2 von der Geraden 3 mit h_3, so ist dies h_3 zu bestimmen aus

$$\begin{aligned} \xi\cos\mu_1 + \eta\sin\mu_1 - \quad p_1 \quad &= 0, \\ \xi\cos\mu_2 + \eta\sin\mu_2 - \quad p_2 \quad &= 0, \\ \xi\cos\mu_3 + \eta\sin\mu_3 - (p_3 + h_3) &= 0. \end{aligned}$$

Nach Elimination von ξ und η ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 & p_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 & p_2 \\ \cos\mu_3 & \sin\mu_3 & (p_3 + h_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 & p_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 & p_2 \\ \cos\mu_3 & \sin\mu_3 & p_3 \end{vmatrix} + h_3 \begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun $\begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 \end{vmatrix} = \sin(\mu_2 - \mu_1) = \sin(2, 1) = -\sin(1, 2)$, so ist

$$\begin{vmatrix} \cos\mu_1 & \sin\mu_1 & p_1 \\ \cos\mu_2 & \sin\mu_2 & p_2 \\ \cos\mu_3 & \sin\mu_3 & p_3 \end{vmatrix} = h_3 \sin(1, 2) = \frac{\varDelta_{1,2,3}}{r_{1,2,3}},$$

wenn $\varDelta_{1,2,3}$ die Dreiecksfläche, welche von den Geraden 1, 2, 3 gebildet wird, und $r_{1,2,3}$ den Radius des ihr umgeschriebenen Kreises bedeutet.

Entwickelt man daher obige Determinante und führt für die Partialdeterminanten die erhaltenen Werthe ein, so erhält man folgenden Satz:

Wenn ein ähnlich-veränderliches System sich nach einem willkürlichen Gesetz bewegt, so sind die vier Bogenlängen S_1, S_2, S_3, S_4, welche vier beliebige Gerade des Systems bei der Bewegung umziehen, durch die Gleichung verbunden

$$S_1 \frac{\varDelta_{2,3,4}}{r_{2,3,4}} + S_2 \frac{\varDelta_{3,4,1}}{r_{3,4,1}} + S_3 \frac{\varDelta_{4,1,2}}{r_{4,1,2}} + S_4 \frac{\varDelta_{1,2,3}}{r_{1,2,3}} = 0,$$

worin $\varDelta_{i,k,l}$ die aus den Geraden i, k, l gebildete Dreiecksfläche und $r_{i,k,l}$ den Radius des ihr umgeschriebenen Kreises angiebt.

Wenn also drei Gerade eine gegebene geschlossene Curve so umlaufen, dass sie stets ein Dreieck mit denselben Winkeln bilden, so lässt sich bei einem vollständigen Umlauf der Bogen, welchen irgend eine vierte Gerade, die mit jenen in der Beziehung der Aehnlichkeit bleibt, durch den Bogen der geschlossenen Curve ausdrücken und durch einfache geometrische Elemente, welche durch die Lage der Geraden gegen das Dreieck im Anfangszustande der Bewegung bedingt sind.

III.

Aehnlich einfache Gesetze ergeben sich, wenn man die von Systemgeraden umschriebenen Flächenräume in Betracht zieht.

Ist $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ eine Gerade, auf ein festes Axensystem bezogen, so wird diese, wenn α und δ als Functionen der Zeit aufgefasst werden, einen Bogen umschreiben, dessen Differential durch $ds = \left(\delta + \frac{d^2\delta}{d\alpha^2}\right) d\alpha$ angegeben ist. Das Flächendifferential dV, welches durch dieses Bogenelement und die Richtstrahlen nach seinen Endpunkten begrenzt ist, hat zum Ausdruck $\frac{1}{2}\delta\, ds$. Es ist daher

$$dV = \tfrac{1}{2}\delta^2\, d\alpha + \tfrac{1}{2}\delta \frac{d^2\delta}{d\alpha^2} d\alpha = \tfrac{1}{2}\delta^2\, d\alpha + \tfrac{1}{2}\delta\, d\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)$$

und nach einer Integration über einen endlichen Zeitabschnitt

$$V = \tfrac{1}{2}\int \delta^2\, d\alpha + \tfrac{1}{2}\int \delta\, d\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \delta^2\, d\alpha + \tfrac{1}{2}\left\{\delta \frac{d\delta}{d\alpha}\right\}_{\alpha_0}^{\alpha_1} - \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Wenn nun die Gerade einem ähnlich-veränderlichen System angehört, so ist mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung

$$d\alpha = d\varphi, \quad \delta = \frac{av + bu - r}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{v\frac{da}{d\varphi} + u\frac{db}{d\varphi} - \frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

und daher

$$2V = \int \frac{(av + bu - r)^2}{u^2 + v^2} d\varphi + \left\{\frac{(av + bu - r)\left(v\frac{da}{d\varphi} + u\frac{db}{d\varphi} - r\right)}{u^2 + v^2}\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

$$- \int \frac{\left(v\frac{da}{d\varphi} + u\frac{db}{d\varphi} - \frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{u^2 + v^2} d\varphi.$$

Nimmt man die von der Zeit unabhängigen Grössen vor die Integrale, so ergiebt sich

$$2V(u^2 + v^2) - (Lu^2 + Mv^2 + 2Nuv + 2Pu + 2Qv + R) = 0.$$

Die Coefficienten L, M, N, P, Q, R bedeuten gewisse Flächenräume; sie sind nur von dem Bewegungsgesetz abhängig, nicht aber von der Lage der betrachteten Geraden im System. Was im Besondern den Werth R anbetrifft, so ist dieser

$$R = \int r^2 \, d\varphi + \Big\{ r \frac{dr}{d\varphi} \Big\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} - \int \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Er reducirt sich in dem Falle, dass das System in sich starr bei der Bewegung bleibt, auf $r^2 \Theta$, wo Θ die Gesammtdrehung des Systems bezeichnet.

Will man V als Function der Lage der beschreibenden Geraden gegen die Axen des ähnlich-veränderlichen Systems darstellen, so setze man

$$u = -\frac{1}{A_1} = -\frac{r}{A} = -r u', \quad v = -\frac{1}{B_1} = -\frac{r}{B} = -r v'$$

man erhält

$$2V(u'^2 + v'^2) - \left(L u'^2 + M v'^2 + 2 N u' v' - 2 \frac{P}{r} u' - 2 \frac{Q}{r} v' + \frac{R}{r^2} \right) = 0.$$

Da u' und v' Liniencoordinaten einer Geraden gegen die Axen des beweglichen Systems bedeuten, so zeigt die Form der Gleichung, dass die Systemgeraden, welche gleiche Flächen V umschreiben, Tangenten eines Kegelschnittes sind, dass aber den veränderlichen Werthen von V eine Schaar confocaler Kegelschnitte entspricht.

Ist eine beliebige Bewegungsform und ein Flächenwerth V gewählt, so ist in dem beweglichen System ein Kegelschnitt durch obige Gleichung in dem angegebenen Sinne charakterisirt. Hätte man die Axen dieses Kegelschnittes als diejenigen Linien gewählt, worauf man die Systemgeraden bezieht, so müssen für dies Axensystem die Grössen N, P, Q verschwinden und der Kegelschnitt sich in der Form darstellen

$$(2V - L) u'^2 + (2V - M) v'^2 - \frac{R}{r^2} = 0.$$

Ist die Gerade auf dies Axenkreuz in der Form bezogen $\xi \cos\mu + \eta \sin\mu - p = 0$, so ist

$$\cos\mu = \frac{-u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad \sin\mu = \frac{-v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

und nach Einführung dieser Werthe

$$V = \tfrac{1}{2} L \cos^2\mu + \tfrac{1}{2} M \sin^2\mu + \frac{R}{2r^2} \cdot p^2.$$

Für $\mu = 0$, $p = 0$ ist $V = \frac{1}{2} L$, also $\frac{1}{2} L$ die Fläche, welche die eine Axe des Kegelschnitts umschreibt, und für $\mu = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ ist $V = \frac{1}{2} M$, also $\frac{1}{2} M$ die Fläche, welche die andere Axe des Kegelschnitts umzieht. Setzt man jene V_2, diese V_1, so ist

$$V = V_2 \cos^2\mu + V_1 \sin^2\mu + \frac{R}{2r^2} \cdot p^2.$$

Es beschreiben daher unter allen parallelen Geraden diejenigen Maximal- oder Minimalflächen, welche durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gehen, und zwar das Eine oder das Andere, je nach der Natur von R. Von den Geraden aber, welche durch den Mittelpunkt laufen, umzieht die eine Axe eine Minimal-, die andere eine Maximalfläche, denn unter den gemachten Annahmen ist

$$\frac{dV}{d\mu} = \sin 2\mu (V_1 - V_2) \text{ und } \frac{d^2V}{d\mu^2} = 2\cos 2\mu (V_1 - V_2).$$

Es tritt daher für $\mu = 0$ ein Maximum ein, wenn $V_1 < V_2$, und ein Minimum, wenn $V_1 > V_2$. Hätte man über die Axen so verfügt, dass $V_1 > V_2$, so umschreibt die η-Axe von allen Geraden die kleinste Fläche.

Stellt man sich die Frage, welche Geraden den Flächenwerth V_1 umschreiben, so giebt die Gleichung

$$V_1 = V_2 \cos^2\mu + V_1 \sin^2\mu + \frac{R}{2r^2} \cdot p^2,$$

also

$$p^2 = 2\cos^2\mu \frac{(V_1 - V_2)r^2}{R}.$$

Schneidet man daher auf der ξ-Axe nach beiden Seiten ein Stück $e = \sqrt{\frac{2(V_1 - V_2)r^2}{R}}$ ab, so ist für alle Geraden, welche durch die Endpunkte f_1 und F_2 dieser Stücke gehen, $p = e\cos\mu$, also die obige Gleichung erfüllt; es umschreiben also alle Geraden, welche durch f_1 und f_2 gehen, gleiche Flächen. Führt man die Grösse e in den allgemeinen Ausdruck für V ein, so ist, da $\frac{R}{r^2} = \frac{2(V_1 - V_2)}{e^2}$,

$$V = V_2 \cos^2\mu + V_1 \sin^2\mu + \frac{V_1 - V_2}{e^2} \cdot p^2,$$

und es haben nunmehr alle Grössen in dieser Relation ihre geometrische Bedeutung.

Es war aus einer früheren Gleichung abgeleitet worden, dass die Geraden, welche bei der Bewegung einen willkürlich gewählten Flächenraum V umschreiben, in dem ähnlich-veränderlichen System einen Kegelschnitt umhüllen. Hat dieser die Halbaxen a und b, so hängen diese Grössen mit V durch die Gleichungen zusammen

$$V = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{e^2} a^2, \quad V = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{e^2} b^2;$$

denn man hat die obige Relation nur auf diejenigen Geraden anzuwenden, welche den Kegelschnitt in seinen Scheiteln berühren. Durch Elimination von V aus jenen beiden Gleichungen folgt $a^2 - b^2 = e^2$, also sind f_1 und f_2 die Brennpunkte des Kegelschnitts, der dem Werthe V ent-

spricht. Will man den Kegelschnitt in Cartesius'schen Coordinaten darstellen, so hat man aus obigen Gleichungen a^2 und b^2 durch V darzustellen, nämlich $a^2 = \frac{V - V_2}{V_1 - V_2} e^2$ und $b^2 = \frac{V - V_1}{V_1 - V_2} e^2$, und man erhält

$$\frac{\xi^2 (V_1 - V_2)}{e^2 (V - V_2)} + \frac{\eta^2 (V_1 - V_2)}{e^2 (V - V_1)} = 1.$$

Das Ergebniss der Analyse ist also dies:

Wenn ein ähnlich-veränderliches System sich nach einem ganz willkürlichen Gesetz bewegt, so giebt es in demselben zwei Punkte f_1 und f_2 von der Beschaffenheit, dass alle Geraden, welche durch sie hindurchgehen, gleiche Flächenräume V_1 umziehen. Die Gerade, welche in der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte senkrecht steht, umschreibt von allen Geraden die kleinste Fläche V_2; die Geraden aber, welche einen beliebigen Flächenwerth V umziehen, umhüllen einen Kegelschnitt, für welchen die Punkte f_1 und f_2 Brennpunkte sind. Ist deren Distanz $2e$, so sind die Halbaxen des Kegelschnitts gegeben durch $a^2 = \frac{V - V_2}{V_1 - V_2} e^2$ und $b^2 = \frac{V - V_1}{V_1 - V_2} e^2$. Den veränderlichen Werthen von V entspricht eine Schaar confocaler Kegelschnitte.

Denkt man von einem beliebigen Systempunkte aus die Tangenten an ein Glied der Schaar gelegt, so erkennt man, wenn man das Glied variabel sich vorstellt, folgende Beziehung:

Verbindet man einen beliebigen Systempunkt mit den beiden ausgezeichneten Punkten f_1 und f_2, so wird die Gerade, welche den Winkel dieser Verbindungslinien halbirt, eine Minimalfläche, diejenige, welche den Nebenwinkel halbirt, eine Maximalfläche von allen denjenigen Geraden umschreiben, welche durch den gewählten Punkt gehen; Gerade aber, welche mit der ersten Geraden gleiche Winkel einschliessen, umziehen während der Bewegung gleiche Flächenräume.

Endlich mag noch, was aus dem Ausdruck $V = V_2 \cos^2\mu + V_1 \sin^2\mu + \frac{V_1 - V_2}{e^2} . p^2$ unmittelbar abgelesen werden kann, bemerkt werden:

Senkrechte Gerade, welche durch einen Systempunkt gehen, umschreiben gleiche Flächensummen, und dieser Summenwerth ist unveränderlich für alle Punkte eines Kreises, welcher mit der Schaar confocaler Kegelschnitte concentrisch liegt. Den verschiedenen Summenwerthen entspricht eine Schaar concentrischer Kreise.

IV.

Bei affin-veränderlichen Gebilden zeigen sich analoge einfache Gesetze nur für die Flächenräume, welche irgend ein Systempunkt umschreibt.

Es seien $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ irgend drei Punkte der Ebene. Ordnet man ihnen bezüglich die Coefficienten α, β, γ zu und bezieht einen vierten Punkt (x, y) durch die Gleichungen

$$x(\alpha+\beta+\gamma) = x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma, \quad y(\alpha+\beta+\gamma) = y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma$$

auf jene drei Grundpunkte, so wird durch jede Wahl von $\alpha:\beta:\gamma$ ein Punkt (x, y) und durch jede Wahl von (x, y) ein Verhältniss $\alpha:\beta:\gamma$ bestimmt werden. Fasst man $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ als Functionen der Zeit auf, während man $\alpha:\beta:\gamma$ als von der Zeit unabhängig behandelt, so wird nach einem Zeitabschnitte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ in $(x'_1 y'_1)$, $(x'_2 y'_2)$, $(x'_3 y'_3)$ übergegangen sein, der Punkt (xy) aber in einen Punkt $(x'y')$, dessen Lage gegen die neue Stellung der Grundpunkte durch

$$x'(\alpha+\beta+\gamma) = x'_1\alpha + x'_2\beta + x'_3\gamma, \quad y'(\alpha+\beta+\gamma) = y'_1\alpha + y'_2\beta + y'_3\gamma$$

gegeben ist. Aus den Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma = k, \quad x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = k.x, \quad y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma = k.y$$

folgt

$$\alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

und aus den entsprechenden Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma = k, \quad x'_1\alpha + x'_2\beta + x'_3\gamma = k.x', \quad y'_1\alpha + y'_2\beta + y'_3\gamma = k.y'$$

ergiebt sich die Relation

$$\alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'_2 & y'_3 \\ y' & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix};$$

aus beiden aber ist die Folge

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'_2 & x'_3 \\ y' & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

Es hat demnach das Dreieck, welches der Punkt (x, y) mit irgend zwei Grundpunkten bestimmt, gegen die Dreiecksfläche der Grundpunkte ein von der Zeit unabhängiges Verhältniss. Dies ist aber nothwendige, wie ausreichende Bedingung dafür, dass das System (xy), dessen Punktelemente durch die Wahl von $\alpha:\beta:\gamma$ bestimmt sind, während der Bewegung die geometrische Verwandtschaft der Affinität bewahrt.

Die von einem Systempunkte (x, y) während eines Zeitabschnitts umschriebene Fläche $\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx) = V$ stellt sich zufolge obiger

Gleichungen, welche die Beziehung zu den beweglichen Grundpunkten ausdrücken, durch

$$\frac{1}{2k^2}\int\{(x_1\alpha+x_2\beta+x_3\gamma)(\alpha\,dy_1+\beta\,dy_2+\gamma\,dy_3) \\ -(y_1\alpha+y_2\beta+y_3\gamma)(\alpha\,dx_1+\beta\,dx_2+\gamma\,dx_3)\}$$

dar, und man erhält, wenn man die von der Zeit unabhängigen Grössen vor die Integrale zieht,

$$k^2 V=\alpha^2 V_1+\beta^2 V_2+\gamma^2 V_3+2A\,\alpha\beta+2B\,\beta\gamma+2C\,\gamma\delta;$$

hierin bedeuten V_1, V_2, V_3 die von den Grundpunkten umzogenen Flächen; A, B, C sind aber gleichfalls als gewisse Flächenstücke aufzufassen.

Nennt man h_1, h_2, h_3 die Höhen des Grunddreiecks und p, q, r die bezüglichen Abstände des Systempunktes (x, y) von seinen drei Seiten, so folgt aus

$$\alpha\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1&1&1\\x&x_2&x_3\\y&y_2&y_3\end{vmatrix}$$

die Beziehung $\alpha.h_1=k.p$. Führt man demnach für $\alpha=\frac{k.p}{h_1}$, $\beta=\frac{k.q}{h_2}$, $\gamma=\frac{k.r}{h_3}$ in den obigen Ausdruck für V ein, so erhält man

$$V=\frac{V_1}{h_1^2}p^2+\frac{V_2}{h_2^2}q^2+\frac{V_3}{h_3^2}r^2+2\frac{A}{h_1h_2}pq+2\frac{B}{h_2h_3}qr+2\frac{C}{h_3h_1}rp.$$

Sind demnach ausser V_1, V_2, V_3 noch für drei Systempunkte die Flächenräume bei dem Bewegungsvorgange bekannt, so sind A, B, C durch diese ausdrückbar, und man erhält eine Formel, welche den Flächenraum, den ein beliebiger Systempunkt umschreibt, durch die Flächenräume jener drei Systempunkte, und ihre Anfangslage im System durch die Flächenräume der Grundpunkte und diejenigen Grössen darstellt, welche die Lage des betreffenden Punktes gegen das Grunddreieck zu Beginn der Bewegung festsetzt. Im Besondern mag folgende Relation hervorgehoben werden. Ist ϱ der Radius des dem Grunddreieck eingeschriebenen Kreises und ϱ', ϱ'', ϱ''' die Radien der ihm angeschriebenen Kreise, so gelten, wenn W, V', V'', V''' die Flächenräume bedeuten, welche von den Mittelpunkten jener Kreise umschrieben werden, die vier Gleichungen

$$\frac{W}{\varrho^2}=\frac{V_1}{h_1^2}+\frac{V_2}{h_2^2}+\frac{V_3}{h_3^2}+2\frac{A}{h_1h_2}+2\frac{B}{h_2h_3}+2\frac{C}{h_3h_1},$$

$$\frac{V'}{\varrho'^2}=\frac{V_1}{h_1^2}+\frac{V_2}{h_2^2}+\frac{V_3}{h_3^2}-2\frac{A}{h_1h_2}+2\frac{B}{h_2h_3}-2\frac{C}{h_3h_1},$$

$$\frac{V''}{\varrho''^2}=\frac{V_1}{h_1^2}+\frac{V_2}{h_2^2}+\frac{V_3}{h_3^2}-2\frac{A}{h_1h_2}-2\frac{B}{h_2h_3}+2\frac{C}{h_3h_1},$$

$$\frac{V'''}{\varrho'''^2}=\frac{V_1}{h_1^2}+\frac{V_2}{h_2^2}+\frac{V_3}{h_3^2}+2\frac{A}{h_1h_2}-2\frac{B}{h_2h_3}-2\frac{C}{h_3h_1}.$$

Daraus folgt:

Umschreiben die Ecken eines Dreiecks in einem affin-veränderlichen System die Flächenräume V_1, V_2, V_3, so sind diese mit den Flächenräumen W, V', V'', V''', die von den Mittelpunkten der dem Dreieck um- und angeschriebenen Kreise umzogen werden, durch die Relation verknüpft

$$\frac{W}{\varrho^2}+\frac{V'}{\varrho'^2}+\frac{V''}{\varrho''^2}+\frac{V'''}{\varrho'''^2}=4\left(\frac{V_1}{h_1^2}+\frac{V_2}{h_2^2}+\frac{V_3}{h_3^2}\right),$$

wenn h_1, h_2, h_3 die Höhen im Grunddreieck, ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' aber die Radien der bezüglichen Kreise bedeuten.

Bewegen sich also im Besondern die Grundpunkte auf der Begrenzung einer geschlossenen Fläche F, bis sie nach einem Umlauf wieder in ihre Anfangslage zurückgekehrt sind, so ist die Grösse $\frac{W}{\varrho^2}+\frac{V'}{\varrho'^2}+\frac{V''}{\varrho''^2}+\frac{V'''}{\varrho'''^2}$ ganz unabhängig von der sonstigen Form der Bewegung der Grundpunkte und bewahrt den constanten Werth $4F\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)$.

Sind a, b, c die bezüglichen Distanzen der Grundpunkte, so besteht die Identität

$$\frac{1}{2\Delta}(ap+bq+cr)=\frac{p}{h_1}+\frac{q}{h_2}+\frac{r}{h_3}=1,$$

worin Δ die Dreiecksfläche bezeichnet. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Gleichung für V homogen machen; sie erhält alsdann die Form

$$V\left(\frac{p}{h_1}+\frac{q}{h_2}+\frac{r}{h_3}\right)^2$$
$$-\left(\frac{V_1}{h_1}p^2+\frac{V_2}{h_2}q^2+\frac{V_3}{h_3}r^2+2\frac{A}{h_1h_2}pq+2\frac{B}{h_2h_3}qr+2\frac{C}{h_3h_1}rp\right)=0.$$

Aus dieser ist zu entnehmen, dass die den verschiedenen Parameterwerthen V entsprechenden Kegelschnitte den Kegelschnitt, welcher zu $V=0$ gehört, in zwei Punkten berühren, und dass diese Punkte auf der unendlich entfernten Geraden liegen. Die Tangenten in den gemeinsamen Berührungspunkten schneiden sich in einem Punkte; er ist für alle Kegelschnitte der Pol der unendlich entfernten Geraden, also der gemeinsame Mittelpunkt der Schaar. Je zwei conjugirte Durchmesser eines Gliedes der Schaar bilden mit der unendlich entfernten Geraden ein selbstconjugirtes Tripel; da dieses aber auch für jedes Glied der Schaar als solches auftritt, so sind die Systeme der conjugirten Durchmesser aller Glieder identisch. Sie bilden also ein System ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte.

Würde man ein beliebiges Glied der Schaar, welches durch die Wahl eines Parameterwerthes V bestimmt sein mag, auf irgend ein selbstconjugirtes Tripel desselben bezogen haben, so wären aus der Formel

die Coefficienten von pq, qr, rp verschwunden und es hätte sich dieses Glied der Schaar durch

$$(V-V_1)\frac{p^2}{h_1^2}+(V-V_2)\frac{q^2}{h_2^2}+(V-V_3)\frac{r^2}{h_3^2}=0$$

dargestellt. Diese Form hätte sich ergeben, welches Tripel des Kegelschnitts man auch ausgewählt hätte, nur dass je nach der Wahl des Tripels die Werthe V_1, V_2, V_3, h_1, h_2, h_3 und dem entsprechend die Grössen p, q, r, welche einen Punkt des Kegelschnitts auf das Tripel beziehen, andere geworden wären. Bildet man sich demnach die Vorstellung, dass ein ausgewähltes Tripel allmälig in dasjenige übergeführt wird, welches durch die Axen des Kegelschnitts und die unendlich entfernte Gerade gebildet wird, so wird ein Grundpunkt in den Mittelpunkt des Kegelschnitts übergehen, die anderen beiden aber werden in die Punkte rücken, in denen die Axen des Kegelschnitts die unendlich entfernte Gerade schneiden. Lässt man den Punkt $(x_3\,y_3)$ die Rolle des Kegelschnittmittelpunkts übernehmen, so wird $V_3=M$ derjenige Flächenraum sein, den dieser bei der Bewegung umschreibt. Setzt man $lim\frac{V-V_1}{h_1^2}=\mu$, $lim\frac{V-V_2}{h_2^2}=\nu$, so wird, da $lim\frac{r^2}{h_3^2}=1$ ist, der Kegelschnitt durch

$$\mu p^2+\nu q^2+(V-M)=0$$

dargestellt sein, worin p und q nunmehr die Abstände von den Axen des Kegelschnitts bedeuten. Ist für $q=0$ $p=a$, so ist a eine Halbaxe des Kegelschnitts und es ergiebt sich

$$M-V=\mu a^2.$$

Hätte man für V einen andern endlichen Werth gewählt, so hätte sich $lim\frac{V-V_1}{h_1^2}=\mu$ nicht geändert, nur würde diesem eine andere Halbaxe des Kegelschnitts entsprechen. Bezeichnet man jenen andern Flächenwerth mit V', die ihm entsprechende Halbaxe aber mit a', so gilt auch

$$M-V'=\mu a'^2$$

und es folgt aus beiden

$$\frac{M-V'}{M-V}=\frac{a'^2}{a^2}.$$

Lässt man im Besondern a die Halbaxe desjenigen Kegelschnitts bedeuten, dessen Punkte Flächenräume vom Werthe Null umschreiben, so ist $\frac{M-V'}{M}=\left(\frac{a'}{a}\right)^2$. Ist endlich ϱ der Richtstrahl vom Mittelpunkte aus nach irgend einem Systempunkte und r die Strecke, die durch den Nullkegelschnitt auf ihm abgeschnitten wird, so erhält man, da $\frac{a'}{a}=\frac{\varrho}{r}$ ist, für die von einem Systempunkte umschriebene Fläche

$$V = M\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt die vollkommene Analogie mit der Formel in I dar, welche die Abhängigkeit der Flächenräume von der Lage der Systempunkte angiebt. Bedenkt man, dass einem endlichen Werthe von V nur im Endlichen gelegene Systempunkte entsprechen können, so lässt sich der Inhalt der vorstehenden Analyse, wie folgt, zusammenfassen:

In einem affin-veränderlichen System liegen diejenigen Punkte, welche bei der Bewegung desselben gleiche Flächenräume umschreiben, auf einer Ellipse. Den verschiedenen Werthen der Flächenräume entspricht eine Schaar ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen, der gemeinsame Mittelpunkt derselben aber umzieht eine Fläche M, welche je nach der Natur des Bewegungsvorganges ein Maximum oder Minimum ist. Bedeutet ϱ den Richtstrahl von diesem Punkte aus nach einem beliebigen Systempunkte, r aber die Strecke, welche diejenige Ellipse darauf abschneidet, deren Punkte Nullflächen umschreiben, so stellt sich die von dem Systempunkte umzogene Fläche in der einfachen Form dar

$$V = M\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Unternimmt man, für affin-veränderliche Gebilde ähnliche Gesetze, wie in II und III aufzusuchen, so gewinnt man für die Bogenlängen oder für die Flächenräume, welche eine Systemgerade umschreibt, Integrale, welche eine Befreiung von denjenigen Grössen nicht mehr zulassen, die die relative Lage der Geraden gegen die Elemente des beweglichen Systems bestimmen. Es existiren also Gesetze so einfacher Form, wie die in II und III angegebenen, für affin-veränderliche Gebilde nicht mehr.

IX.

Zur Integration der Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystalllinse der Fische.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Hierzu Taf. IV Fig. 1 u. 2.

Im 5. Hefte des XXIV. Jahrgangs dieser Zeitschrift sind von mir die Differentialgleichungen aufgestellt worden, welche für die Brennweiten, Hauptpunktsdistanzen und Hauptpunktsinterstitien eines centrirten Systems brechender sphärischer Flächen von continuirlich variabeler Dichtigkeit giltig sind, wenn dasselbe von zwei Medien begrenzt ist, welche mit der Trennungsfläche gleiche Brechungsvermögen besitzen. Es sind dies die folgenden vier Formeln:

$$1)\qquad \partial\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{\partial n}{r}-\frac{\alpha_2}{nf}\cdot\frac{\partial n}{r},$$

$$2)\qquad \frac{\partial\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\partial f}{nf+\alpha_2}=\frac{\partial f}{-\varphi+\alpha_2}=\frac{f\partial n}{nr},$$

$$3)\qquad \frac{\partial\alpha_2}{\alpha_2}=\frac{\partial\eta}{\alpha_2}-f\partial\left(\frac{1}{f}\right)+\frac{\partial n}{n}=\frac{\partial\eta}{\alpha_2}-\varphi\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right),$$

$$4)\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\alpha_2}=f\partial\left(\frac{1}{f}\right)-\frac{\partial n}{n}+\frac{f\partial n}{nr}.$$

Sind n und r als Functionen von η gegeben, so sind die vier Gleichungen offenbar bestimmt und man wird versuchen, die Gleichungen zu integriren. Es giebt nun einen speciellen Fall und, wie es scheint, nur den einen, in welchem sich die Variabeln f, φ, α_1, α_2 und ε in algebraischen Functionen von η darstellen lassen, nämlich dann, wenn

$$5)\qquad r=r_1\frac{b-\eta}{b},$$

$$6)\qquad n=1+\zeta\frac{2b\eta-\eta^2}{b^2}$$

angenommen wird. Hierin liegt an sich nichts Merkwürdiges; das Interessante aber ist und muss als ein äusserst glückliches Zusammentreffen gepriesen werden, dass gerade diese Relationen für die Krystalllinse aller Wirbelthiere gelten. Sie haben zwei wichtige Vortheile für die Dioptrik des Auges im Gefolge, einmal den, dass die Brechkraft der Linsensubstanz verdoppelt wird, und zweitens den, dass die Linse vollkommen aplanatisch ist, wie dies bereits früher von mir analytisch bewiesen worden ist.*

Die Integrale werden nun besonders einfach, wenn die Linsen kugelförmig sind, wie dies bei den Fischen durchweg der Fall ist, und wenn die Linse von zwei Medien begrenzt wird, welche ein gleiches Brechungsvermögen besitzen, was bekanntlich für die beiden Augenflüssigkeiten ebenfalls zutreffend ist. Was nun die Ableitung der Integrale selbst betrifft, so habe ich in der früheren Abhandlung nur ein indirectes, sehr umständliches Verfahren benutzen können. Im Folgenden werde ich eine Methode zur Anwendung bringen, welche die Integrale direct liefert. Ich beginne mit der Bestimmung der Brennweiten f und φ, also mit der Gleichung 1):

$$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial n}{r} - \frac{\alpha_2}{nf} \cdot \frac{\partial n}{r}.$$

Um die Differentialgleichung von φ zu erhalten, beachten wir, dass $\varphi = -nf$ ist. Demgemäss ist

$$\partial\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial n}{\varphi} - n\,\partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{(\alpha_2 - \varphi)}{\varphi}\,\frac{\partial n}{r},$$

folglich

$$7)\qquad \partial\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{\partial n}{n\varphi} + \frac{(\varphi - \alpha_2)}{n\varphi} \cdot \frac{\partial n}{r}.$$

Diese Gleichung lässt sich nun auf eine andere mit nur zwei Variabeln reduciren, wenn man die zweite Brennweite von der letzten Fläche abrechnet. Bezeichnet man diese mit φ_1, so ist

$$8)\qquad \varphi_1 = \varphi - \alpha_2.$$

Eliminirt man φ aus 7), so findet man leicht

$$\partial\varphi_1 + \partial\alpha_2 = (\varphi_1 + \alpha_2)\left(\frac{\partial n}{n} - \frac{\varphi_1\,\partial n}{nr}\right).$$

Mit Hilfe von 3) lässt sich hieraus α_2 fortbringen. Es ist nämlich

$$\partial\alpha_2 = \partial\eta - \alpha_2 f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) + \alpha_2\frac{\partial n}{n},$$

folglich

---

* Beiträge zur Theorie des Aplanatismus und der Periskopie der Krystalllinsen in den Augen der Fische. Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. XXI, 1880.

$$\partial \varphi_1 + \partial \eta - \alpha_2 f \partial \left(\frac{1}{f}\right) + \alpha_2 \frac{\partial n}{n} = \varphi_1 \frac{\partial n}{n} - \varphi_1^2 \frac{\partial n}{n r} + \alpha_2 \frac{\partial n}{n} - \alpha_2 \frac{\varphi_1 \partial n}{n r}.$$

Dividirt man durch φ_1^2, so erhält man

$$\partial \left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{\partial n}{n r} - \frac{\partial n}{n \varphi_1} + \frac{\partial \eta}{\varphi_1^2} - \alpha_2 \left\{ f \partial \left(\frac{1}{f}\right) - \frac{(\varphi - \alpha_2)\partial n}{n r} \right\}.$$

Gemäss 2) ist nun der Coefficient von α_2 gleich Null und man findet also

$$9) \qquad \partial \left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{\partial n}{n r} - \frac{\partial n}{n \varphi_1} + \frac{\partial \eta}{\varphi_1^2}.*$$

Für die Krystalllinsen der in Betracht gezogenen Art ist nun

$$10) \qquad r = r_1 - \eta, \quad n = 1 + \zeta \frac{2 r_1 \eta - \eta^2}{r_1^2},$$

wo r_1 den Krümmungsradius der Linse bezeichnet. Es ist alsdann

$$\frac{\partial n}{n r} = \frac{2 \zeta}{r_1^2 + \zeta(2 r_1 \eta - \eta^2)},$$

und weil die beiden anderen Glieder der Gleichung 9) klein gegen dasselbe sind, so erkennt man leicht, dass man setzen kann in steigenden Potenzen der immer beträchtlichen kleinen Grösse ζ die convergente Reihe

$$11) \qquad \frac{1}{\varphi_1} = a \zeta + b \zeta^2 + c \zeta^3.**$$

Die Differentialgleichung 9) verwandelt sich demgemäss in

$$12) \quad \zeta \frac{\partial a}{\partial \eta} + \zeta^2 \frac{\partial b}{\partial \eta} + \zeta^3 \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{2 \zeta (r_1 - \eta)}{r_1^2 \left[1 + \zeta \frac{2 r_1 \eta - \eta^2}{r_1^2}\right]} \left\{ \frac{1}{r_1 - \eta} - \frac{1}{\varphi_1} \right\} + \frac{1}{\varphi_1^2}.$$

Indem man nun auf der rechten Seite die Quotienten fortschafft, findet man

$$[r_1^2 + \zeta(2 r_1 \eta - \eta^2)] \left[\zeta \frac{\partial a}{\partial \eta} + \zeta^2 \frac{\partial b}{\partial \eta} + \zeta^3 \frac{\partial c}{\partial \eta}\right] = 2 \zeta - 2 \zeta (r_1 - \eta)(\zeta a + \zeta^2 b + \zeta^3 c)$$
$$+ [r_1^2 + \zeta(2 r_1 \eta - \eta^2)] \cdot (\zeta a + \zeta^2 b + \zeta^3 c)^2.$$

Dividirt man die Gleichung durch ζ und ordnet beiderseits die Glieder nach Potenzen von ζ, so resultirt

---

* Es ist dies dieselbe Gleichung, welche Lippich im 2. Hefte der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIII, hist.-lit. Abtheil. S. 63 aufgestellt hat und deren Richtigkeit von mir in Pflüger's Arch. f. Physiologie XIX, S. 487 mit Unrecht angezweifelt worden ist. Dagegen muss ich die von mir in meiner Dioptrik aufgestellte Näherungsformel $\partial \alpha = - D . \varphi . \partial \left(\frac{1}{\varphi}\right)$ Lippich's Zweifel gegenüber aufrecht halten, und zwar auf Grund der Gleichung 3).

** Die Substitution dieser linearen Function der drei neuen Variabeln a, b, c geschah auf den Rath meines geehrten Collegen, Herrn Professor Krause.

$$\begin{aligned}
& r_1^2\frac{\partial a}{\partial\eta} + r_1^2\zeta\frac{\partial b}{\partial\eta} + r_1^2\zeta^2\frac{\partial c}{\partial\eta} \\
& \quad + (2r_1\eta-\eta^2)\zeta\frac{\partial a}{\partial\eta} + (2r_1\eta-\eta^2)\zeta^2\frac{\partial b}{\partial\eta} + (2r_1\eta-\eta^2)\zeta^3\frac{\partial c}{\partial\eta} \\
= {} & 2 - 2a(r_1-\eta)\zeta - 2b(r_1-\eta)\zeta^2 - 2c(r_1-\eta)\zeta^3 \\
& + a^2 r_1^2\zeta + 2ab\,r_1^2\zeta^2 + (b^2 r_1^2 + 2ac\,r_1^2)\zeta^3 \\
& + 2bc\,r_1^2\zeta^4 + c^2 r_1^2\zeta^5 \\
& + a^2(2r_1\eta-\eta^2)\zeta^2 + 2ab(2r_1\eta-\eta^2)\zeta^3 \\
& + (b^2+2ac)(2r_1\eta-\eta^2)\zeta^4 + 2bc(2r_1\eta-\eta^2)\zeta^5 \\
& + c^2(2r_1\eta-\eta^2)\zeta^6.
\end{aligned}$$

Vereinigt man sämmtliche Coefficienten gleicher Potenzen von ζ und geht nur bis ζ^3, so wird die Gleichung bis zu diesem Grade der Annäherung erfüllt, indem man die Coefficienten der successiven Potenzen ζ gleich Null setzt.

Die Bestimmungsgleichungen für a, b, c sind demnach

$$\text{I)} \qquad r_1^2\frac{\partial a}{\partial\eta} = 2,$$

$$\text{II)} \quad r_1^2\frac{\partial b}{\partial\eta} + (2r_1\eta-\eta^2)\frac{\partial a}{\partial\eta} = -2a(r_1-\eta) + a^2 r_1^2,$$

$$\text{III)} \quad r_1^2\frac{\partial c}{\partial\eta} + (2r_1\eta-\eta^2)\frac{\partial b}{\partial\eta} = -2b(r_1-\eta) + 2ab\,r_1^2 + a^2(2r_1\eta-\eta^2).$$

Es sind also a, b, c ganze algebraische Functionen von η. Aus I) folgt durch Integration

$$a = \frac{2\eta}{r_1^2} + C.$$

Da $\frac{1}{\varphi_1} = 0$ wird für $a = b = c = 0$, so ist die Constante $C = 0$, mithin

$$\text{13)} \qquad a = \frac{2\eta}{r_1^2}.$$

Aus II) ergiebt sich weiter

$$r_1^2\frac{\partial b}{\partial\eta} = -\frac{2(2r_1\eta-\eta^2)}{r_1^2} - \frac{4\eta(r_1-\eta)}{r_1^2} + \frac{4\eta^2}{r_1^2}.$$

Entwickelt und ordnet man die Ausdrücke nach Potenzen von η, so entsteht

$$\frac{\partial b}{\partial\eta} = -\frac{8\eta}{r_1^3} + \frac{10\eta^2}{r_1^4};$$

folglich wird

$$\text{14)} \qquad b = -\frac{4\eta^2}{r_1^3} + \frac{10}{3}\frac{\eta^3}{r_1^4},$$

wobei die Integrationsconstante gleichfalls Null ist. Aus III) erhält man endlich

$$r_1^2\frac{\partial c}{\partial\eta} = 24\frac{\eta^2}{r_1^2} - 50\tfrac{2}{3}\frac{\eta^3}{r_1^3} + 26\frac{\eta^4}{r_1^4},$$

und durch Integration

15) $$c = 8\,\frac{\eta^3}{r_1^{\,4}} - 12\tfrac{2}{3}\,\frac{\eta^4}{r_1^{\,5}} + 5\tfrac{1}{5}\,\frac{\eta^5}{r_1^{\,6}}.$$

Demgemäss ist der reciproke Werth der Brennweite φ_1

16) $$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{2\eta\zeta}{r_1^{\,2}} - \left(\frac{4\eta^2}{r_1^{\,2}} - \frac{10}{3}\,\frac{\eta^3}{r_1^{\,4}}\right)\zeta^2 + \left(\frac{8\eta^3}{r_1^{\,4}} - 12\tfrac{2}{3}\,\frac{\eta^4}{r_1^{\,5}} + 5\tfrac{1}{5}\,\frac{\eta^5}{r_1^{\,6}}\right)\zeta^3.$$

Das Differential ist

17) $$\partial\left(\frac{1}{\varphi_1}\right) = 2\zeta\,\frac{\partial\eta}{r_1^{\,2}} - \zeta^2\left(\frac{8\eta\,\partial\eta}{r_1^{\,3}} - \frac{10\eta^2\,\partial\eta}{r_1^{\,4}}\right) + \zeta^3\left(24\,\frac{\eta^2\,\partial\eta}{r_1^{\,4}} - 50\tfrac{2}{3}\,\frac{\eta^3\,\partial\eta}{r_1^{\,5}} + 26\,\frac{\eta^4\,\partial\eta}{r_1^{\,6}}\right).$$

Für die Brennweite φ_1 erhält man den Werth

18) $$\varphi_1 = \frac{r_1^{\,2}}{2\zeta\eta}\left\{1 + \zeta\left(\frac{2\eta}{r_1} - \frac{5}{3}\,\frac{\eta^2}{r_1^{\,2}}\right) - \frac{1}{3}\zeta^2\left(\frac{\eta^3}{r_1^{\,3}} - \frac{8\eta^4}{15 r_1^{\,4}}\right)\right\}.$$

Für $\eta = 2r_1$ (Fischlinsen) geht diese Relation über in

19) $$\varphi_1 = \frac{r_1}{4\zeta}\left(1 - \tfrac{8}{3}\zeta + \tfrac{8}{45}\zeta^2\right),$$

und wenn man die Brennweite vom zweiten Hauptpunkte anrechnet, welcher für $\eta = 2r_1$ im Centrum der Krystalllinse gelegen sein muss, da $n = 1$ wird, so findet man für die zweite Hauptbrennweite

20) $$\varphi = \frac{r_1}{4\zeta}\left(1 + \tfrac{4}{3}\zeta + \tfrac{8}{45}\zeta^2\right).$$

Auf gleiche Weise lässt sich nun auch die zugehörige zweite Hauptpunktsdistanz α_2 finden. Nach 3) ist

$$\frac{\partial\eta - \partial\alpha_2}{\alpha_2} = f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) - \frac{\partial n}{n}.$$

Wegen der Relation $nf = -\varphi = -(\varphi_1 + \alpha_2)$ ist weiter

$$f\,\partial\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\partial n}{n} - \frac{\partial\varphi_1 + \partial\alpha_2}{\varphi_1 + \alpha_2},$$

folglich

$$\frac{\partial\eta - \partial\alpha_2}{\alpha_2} = -\,\frac{\partial\varphi_1 + \partial\alpha_2}{\varphi_1 + \alpha_2},$$

und wenn man beiderseits mit $\alpha_2(\varphi_1 + \alpha_2)$ multiplicirt,

$$\varphi_1\,\partial\eta - \varphi_1\,\partial\alpha_2 + \alpha_2\,\partial\eta - \alpha_2\,\partial\alpha_2 = -\,\alpha_2\,\partial\varphi_1 - \alpha_2\,\partial\alpha_2.$$

Dividirt man durch $\varphi_1\,\partial\eta$, so resultirt

21) $$\frac{\partial(\eta - \alpha_2)}{\partial\eta} = -\,\frac{\alpha_2}{\varphi_1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + 1\right),$$

wofür man auch schreiben kann

22) $$\frac{\partial(\eta - \alpha_2)}{\alpha_2} = -\,\frac{\partial(\varphi_1 + \eta)}{\varphi_1} \quad \text{(Lippich).}$$

Es lässt sich nun erweisen, dass für die Substitutionen 10) sich die zweite Hauptpunktsdistanz in folgender Form ausdrücken lässt:

23) $$\alpha_2 = a + b\zeta + c\zeta^2 + \ldots,$$

wo a, b, c algebraische Functionen von η bedeuten. Setzt man aus 16) und 17) die bezüglichen Functionen von φ_1 in 21) ein, so wird

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{2\zeta\eta}{r_1^2}\left\{1 - \left(\frac{2\eta}{r_1} - \frac{5}{3}\frac{\eta^2}{r_1^2}\right)\zeta + \left(4\frac{\eta^2}{r_1^2} - 6\tfrac{1}{3}\frac{\eta^3}{r_1^3} + 2\tfrac{3}{5}\frac{\eta^4}{r_1^4}\right)\zeta^2\right\}$$

und

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + 1 = -\frac{r_1^2}{2\zeta\eta^2} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\zeta\left(\frac{\eta}{r_1} - \frac{4}{5}\frac{\eta^2}{r_1^2}\right).$$

Demgemäss sind die Bestimmungsgleichungen für a, b, c enthalten in der Gleichung

24) $$1 - \frac{\partial a}{\partial\eta} - \zeta\frac{\partial b}{\partial\eta} - \zeta^2\frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{a}{\eta} + \zeta\left(\frac{b}{\eta} - \frac{2a}{r_1} + \frac{4}{3}\frac{\eta a}{r_1^2}\right)$$
$$+ \zeta^2\left(\frac{c}{\eta} - \frac{2b}{r_1} + \frac{4\eta a}{r_1^2} + \frac{4}{3}\frac{\eta b}{r_1^2} - 5\frac{\eta^2 a}{r_1^3} + \frac{68}{45}\frac{\eta^3 a}{r_1^4}\right).$$

Durch Gleichsetzung der beiderseitigen Coefficienten gleicher Potenzen von ζ findet man

I) $$-\frac{\partial a}{\partial\eta} = \frac{a}{\eta} - 1,$$

II) $$-\frac{\partial b}{\partial\eta} = \frac{b}{\eta} - \frac{2a}{r_1} + \frac{4}{3}\frac{\eta a}{r_1^2},$$

III) $$-\frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{c}{\eta} - \frac{2b}{r_1} + \frac{4}{3}\frac{\eta b}{r_1^2} + \frac{4\eta a}{r_1^2} - \frac{5\eta^2 a}{r_1^3} + \frac{68}{45}\frac{\eta^3 a}{r_1^4}.$$

Aus I) folgt

$$\eta\,\partial a + a\,\partial\eta = \eta\,\partial\eta, \quad a\eta = \tfrac{1}{2}\eta^2 + C.$$

Da die Constante verschwindet, indem $a=0$ werden muss für $\eta=0$, so ist

24) $$a = \tfrac{1}{2}\eta.$$

Aus II) folgt

$$\eta\,\partial b + b\,\partial\eta = \frac{\eta^2\,\partial\eta}{r_1} - \frac{2}{3}\frac{\eta^3\,\partial\eta}{r_1^2}$$

und somit

25) $$b = \tfrac{1}{3}\frac{\eta^2}{r_1} - \tfrac{1}{6}\frac{\eta^3}{r_1^2}.$$

Aus III) folgt endlich

$$\eta\,\partial c + c\,\partial\eta = -\frac{4}{3}\frac{\eta^3\,\partial\eta}{r_1^2} + \frac{31}{18}\frac{\eta^4\,\partial\eta}{r_1^3} - \frac{8}{15}\frac{\eta^5\,\partial\eta}{r_1^4},$$

26) $$c = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{\eta^3}{r_1^2} - \frac{31}{30}\frac{\eta^4}{r_1^3} + \frac{4}{15}\frac{\eta^5}{r_1^4}\right).$$

Die zweite Hauptpunktsdistanz einer brechenden Schicht von der Dicke η ist demgemäss

27) $$\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{1}{3}\zeta\left(\frac{\eta^2}{r_1} - \frac{1}{2}\frac{\eta^3}{r_1^2}\right) - \tfrac{1}{3}\zeta^2\left(\frac{\eta^3}{r_1^2} - \frac{31}{30}\frac{\eta^4}{r_1^3} + \frac{4}{15}\frac{\eta^5}{r_1^4}\right).$$

Mit Hilfe dieser Relation findet man auch die zweite Hauptbrennweite

$$28)\quad \varphi = \varphi_1 + \alpha_2 = \frac{r_1^2}{2\zeta\eta}\left\{1 + \zeta\left(\frac{2\eta}{r_1} - \frac{2}{3}\frac{\eta^2}{r_1^2}\right) + \frac{1}{3}\zeta^2\left(\frac{\eta^3}{r_1^3} - \frac{7}{15}\frac{\eta^4}{r_1^4}\right)\right\}.$$

Die Beziehung $\varphi = -nf$ lässt daraus auch die erste Hauptbrennweite f des Systems finden, nämlich

$$29)\quad f = -\frac{r_1^2}{2\zeta\eta}\left\{1 + \frac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{r_1^2} - \frac{1}{3}\zeta^2\left(\frac{\eta^3}{r_1^3} - \frac{1}{15}\frac{\eta^4}{r_1^4}\right)\right\}.$$

Um endlich α_1 zu finden, geht man aus von 2), also

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta} = -\frac{\alpha_2}{\varphi_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta},$$

wobei nach 29) wird

$$\frac{\partial f}{\partial\eta} = \frac{r_1^2}{2\zeta\eta^2}\left\{1 - \frac{1}{3}\zeta\frac{\eta^2}{r_1^2} + \frac{1}{3}\zeta^2\left(2\frac{\eta^3}{r_1^3} - \frac{1}{5}\frac{\eta^4}{r_1^4}\right)\right\}.$$

Macht man die lineare Substitution $\alpha_1 = a + b\zeta + c\zeta^2$, so findet man

$$30)\quad -\alpha_1 = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\zeta\left(\frac{\eta^2}{r_1} - \frac{1}{2}\frac{\eta^3}{r_1^2}\right) + \frac{1}{3}\zeta^2\left(\frac{\eta^3}{r_1^2} - \frac{31}{30}\frac{\eta^4}{r_1^3} + \frac{4}{15}\frac{\eta^5}{r_1^4}\right).$$

Da das Interstitium $\varepsilon = \eta + \alpha_1 - \alpha_2$ ist, so wird $\varepsilon = 0$; d. h. die beiden Hauptpunkte coincidiren mit der Mitte des brechenden Systems und liegen im Centrum der Kugelfläche, wenn $\eta = 2r_1$ wird.

Nachdem wir im Vorhergehenden die Gleichungen für die Orte der Cardinalpunkte von Axenstrahlen, welche eine geschichtete kugelförmige Linse durchdringen, abgeleitet haben, wollen wir das uns gestellte Problem dahin erweitern, dass wir versuchen, die Trajectorie eines beliebigen schief in die Linse einfallenden Lichtstrahles innerhalb derselben zu bestimmen. Die Lösung dieses verhältnissmässig schwierigeren Problems wird gleichbedeutend sein mit der Lösung der Frage, ob die Krystalllinsen der Fische vollkommen aplanatisch sind, wie wir theils wegen der eigenthümlichen Vertheilung der optischen Dichtigkeit innerhalb aller Krystalllinsen, theils wegen der in vielen Fällen ausserordentlichen Ausdehnung des Gesichtsfeldes bei diesen Thieren anzunehmen berechtigt sind. Die Analysis wird erweisen, dass diese Vollkommenheit in der That in einem überraschenden Masse vorhanden ist.

Wir setzen voraus, dass die betrachtete Linsenart in concentrischen Kugelschalen von unveränderlichem Brechungsvermögen um das Kerncentrum C (Fig. 1) geschichtet und von Augenflüssigkeit ($n_D = 1{,}3350$) umgeben sei. LO sei ein beliebiger in die Corticalis eintretender Strahl und L_1C die demselben parallele Centrale der Kugel; alsdann werden alle in gleichem Abstande von dieser Centrale parallel einfallende Strahlen sich in einem und demselben Punkte Φ der Centrale schneiden, d. h. Φ wird der zugehörige Brennpunkt, $C\Phi = \varphi$ die Vereinigungsweite dieser Strahlengattung sein. Ist die Linse aplanatisch, so werden sämmtliche die Kugel treffenden, parallel mit L_1C gerichteten Strahlen die gemeinsame Brennweite φ besitzen.

Wir bezeichnen den Einfallswinkel AOL mit τ_1 und den Brechungswinkel ROC in der äussersten Corticalschicht mit τ_0. Innerhalb der Linse beschreibe der Strahl LO die Trajectorie OPO_1 und nach dem Austritte in O_1 die Gerade $O_1\Phi$. Alsdann wird, wie klar ist, die Trajectorie in O_1 den Einfallswinkel τ_0 und den Brechungswinkel τ_1 bilden, also der Lichtstrahl vollständig symmetrisch gegen die Sehne OO_1 verlaufen, welche mit dem Radius OC den Winkel τ_2 bildet. Der Radius vector eines beliebigen Punktes der Trajectorie sei y, sein Complement zu r gleich η, wo r den Kugelradius bedeutet. Der Winkelabstand des Radius y von OC sei ϑ und der zugehörige Bogen gleich x.

Um nun zu einer allgemeinen Differentialgleichung der Trajectorie zu gelangen, wählen wir die Kreiscoordinaten x und y. Zuvor aber suchen wir die Differentialgleichungen der Geraden OR, also die Tangente der Trajectorie in O_1 in Kreiscoordinaten, da sie uns von Nutzen sein können, diejenige der Trajectorie zu finden und von dieser auf die Gerade zu recurriren, wenn der Brechungsindex der ganzen Kugel constant, d. h. ∂n gleich Null gesetzt wird. Die Gleichung der Geraden OR ist

$$31)\qquad y\sin(\tau_0+\vartheta) = y\left(\sin\tau_0 + \frac{x}{r}\right) = r\sin\tau_0 .$$

Differentiiren wir dieselbe, so wird

$$\cot\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right) = -\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}$$

oder

$$32)\qquad \operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right) = \tau_0 + \frac{x}{r}.$$

Differentiiren wir abermals, so verschwindet die Constante τ_0 und es resultirt

$$\frac{\partial\left(\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right)}{1+\left(\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right)^2} = \frac{\partial x}{r}.$$

Wenn wir jetzt statt ∂x das Bogendifferential $\partial\xi$ eines Punktes der Geraden einführen, so wird zu substituiren sein

$$33)\qquad \partial x = \frac{r}{y}\,\partial\xi.$$

Demgemäss ist

$$34)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2} = \frac{\partial\xi}{y}$$

und

$$35)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} = \frac{1}{y}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right].$$

Dieses ist also die Differentialgleichung zweiter Ordnung einer Geraden in Kreiscoordinaten. Daraus folgt noch

$$1+\frac{2\,\partial y\,\partial^2 y}{\partial\xi^2\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right]}=1+2\frac{\partial y}{y}$$

und

$$\frac{\sqrt{\partial\xi^2+\partial y_1^2}}{\sqrt{\partial\xi^2+\partial y^2}}=\frac{y+\partial y}{y},$$

wo ∂y_1 das auf ∂y folgende Differential des Radius vector darstellt. Setzt man nun

$$arc\,cot\left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)=e_1,$$

so ist infolge von 34)

$$\partial e_1=\frac{1}{y}\,\partial\xi. \tag{36}$$

Betrachten wir jetzt die Wirkung der Brechung für sich allein, so ist

$$sin\,e_2 : sin\,(e_2+\partial e_2)=(n+\partial n) : n$$

und

$$1-cot\,e_2\,\partial e_2=1+\frac{\partial n}{n}.$$

Wenn nun rücksichtlich dieser gesonderten Betrachtung

$$arc\,cot\left(-\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)=e_2$$

gesetzt wird, so hat man auch noch

$$\partial e_2=\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial y}\,\partial\xi. \tag{37}$$

Die beiden partiellen Differentiale des Krümmungswinkels der Trajectorie, ∂e_1 und ∂e_2, ergeben zusammen das totale Differential des Winkels e, welchen der Strahl oder die Trajectorie mit dem Radius vector y oder der Normale der Niveaufläche in dem betrachteten Punkte bildet; d. h. es ist

$$\frac{\partial e}{\partial\xi}=\frac{1}{y}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial y} \tag{38}$$

oder endlich

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{n}\,\frac{\partial n}{\partial y}\right)\partial\xi. \tag{39}$$

Dies ist demnach die gesuchte Differentialgleichung der Trajectorie des Strahles bei seinem Durchgange durch die geschichtete Krystalllinse.

Das nächste Geschäft wird sein, die Integrale aufsteigender Ordnung zu bilden. Es ist leicht, aus 39) eine Differentialgleichung erster Ordnung herzustellen, welche auf ein elliptisches Integral führt, wenn

n eine lineare Function von y oder y^2 ist. Setzt man nämlich $\frac{\partial y}{\partial \xi} = u$, so wird

$$\frac{u\,\partial u}{1+u^2} = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial n}{n}.$$

Durch Integration erhält man hieraus nach Bestimmung der Constante, wobei $u = cot\,\tau_0$ und $n = 1$ wird für $y = r$:

$$log\,nat \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}{1 + cot\,\tau_0{}^2} = 2\,log\,nat\,\frac{y}{r} + 2\,log\,nat\,n.$$

Nach Wiedereinführung von x an Stelle von ξ erhält man nunmehr

$$40)\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2}\left[\frac{y^2}{r^2\,sin\,\tau_0{}^2}\,n^2 - 1\right].$$

Für ebene Schichten ist $Lim\left(\frac{y}{r}\right) = 1$ und man hat dann in 40) das gewöhnliche Brechungsgesetz. Die Gleichung kann zunächst dazu dienen, das Minimum von y zu bestimmen, wenn n als Function von y gegeben ist. Nach vielen von mir ausgeführten Messungen ist nun bei allen Linsen sehr genau

$$41)\qquad n = 1 + \zeta\,\frac{r^2 - y^2}{r^2} = 1 + \zeta\,\frac{2\,r\,\eta - \eta^2}{r^2},$$

wenn der Brechungsindex einer beliebigen Schicht auf den der äussersten Corticalsubstanz bezogen wird, und der absolute Index

$$42)\qquad n = N\left(1 + \zeta\,\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right),$$

wenn N den Index der Corticalsubstanz ($N_D = 1{,}3830$), ausserdem ζ eine Constante bezeichnet, welche gegen die Einheit ziemlich klein, sonst aber bei allen Augenlinsen verschieden gross gefunden wird. Bei den Fischen, welche einen hornartigen Linsenkern besitzen, ist ζ am grössten, übersteigt jedoch selten den Werth 0,1. Die Trajectorie ist infolge dessen schwach concav gegen die Sehne $O\,O_1$ gekrümmt und muss für $\zeta = 0$ oder $\tau_0 = 0$ eine Gerade sein.

Es wird sich nun in der Folge zeigen, dass jenes Brechungsgesetz nahezu die Bedingungen des Aplanatismus erfüllt. Wir wollen aber zur Bestimmung des Minimums y_0 von y die Untersuchung allgemeiner führen und voraussetzen, es sei

$$n = 1 + \zeta\,\frac{r^m - y^m}{r^m},$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet. Setzen wir den Ausdruck in 40) ein, so wird für die Minima oder etwaige Maxima von y bei einem von Null verschiedenen Werthe von τ_0 sein

$$43)\qquad \frac{y^2}{r^2 \sin t_0^{\,2}}\left(1+\zeta\frac{r^m-y^m}{r^m}\right)^2-1=0.$$

Da nur positive Werthe von y in Betracht kommen, welche kleiner als r sind, so reducirt sich die Gleichung 43) auf die einfachere

$$\frac{y}{r \sin\tau_0}\left(1+\zeta\frac{r^m-y^m}{r^m}\right)=1$$

oder, nach Potenzen von y geordnet,

$$44)\qquad \left(\frac{y}{r}\right)^{m+1}-\frac{1+\zeta}{\zeta}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\sin\tau_0}{\zeta}=0.$$

Wir haben nur den kleinsten Wurzelwerth zu bestimmen. Da es genügt, die Brechungsindices bis zur vierten Decimale incl. in Rechnung zu ziehen, so genügt es auch für unsere Untersuchungen, hier die Glieder der Wurzel von der Ordnung der Kleinheit ζ^2 zu berücksichtigen. Man findet mit leichter Mühe

$$\frac{y_0}{r}=\sin\tau_0\left\{\frac{1}{1+\zeta}+\frac{\zeta\sin\tau_0^{\,m}}{(1+\zeta)^{m+2}}+(m+1)\frac{\zeta^2\sin\tau_0^{\,2m}}{(1+\zeta)^{2m+3}}\right\}$$

oder, nach Potenzen von ζ geordnet,

$$45)\qquad \frac{y_0}{r}=\sin\tau_0\{1-(1-\sin\tau_0^{\,m})\,\zeta+(1-\sin\tau_0^{\,m})(1-[m+1]\sin\tau_0^{\,m})\,\zeta^2\}.$$

Es handelt sich zunächst und hauptsächlich darum, den simultanen Werth x_0, also ϑ zu erhalten. Das Integral von 40) zu suchen, ist selbst für den Fall $m=2$ unzweckmässig und schliesslich, wenn man es gefunden hat, zu einer numerischen Rechnung wenig geeignet. Wir ziehen einen andern Weg vor, indem wir das Integral auf eine der Gleichung 31) ähnliche Form zu bringen suchen. Wir gehen deshalb aus von der Relation 39), indem wir gemäss 33) $\partial\xi=\frac{y}{r}\partial x$ setzen, und erhalten durch Integration

$$46)\qquad arc\cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right)=\int_0^x\partial\frac{x}{r}+\int_0^x\frac{y\,\partial n}{n\,\partial y}\partial\frac{x}{r}.$$

Wir beschränken uns hier auf den Fall $m=2$, wodurch das Integral übergeht in

$$arc\cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right)=\tau_0+\frac{x}{r}-2\zeta\int_0^x\frac{y^2\,\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{r^2\left(1+\zeta\frac{r^2-y^2}{r^2}\right)},$$

und wenn wir alle Glieder berücksichtigen, welche nur bis ζ^2 reichen,

$$47)\qquad arc\cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right)=\tau_0+\frac{x}{r}-2\zeta(1-\zeta)\int_0^x\frac{y^2}{r^2}\partial\left(\frac{x}{r}\right)-2\zeta^2\int_0^x\frac{y^4}{r^4}\partial\left(\frac{x}{r}\right).$$

Wir wollen uns bemühen, aus dieser Gleichung sowohl die Gleichung der Trajectorie, als auch die simultanen Werthe y_0, x_0 herzuleiten. Die erstere wird im Allgemeinen sein von der Form

$$\frac{y}{r} = F_0\left(\tau_0, \frac{x}{r}\right) + \zeta F_1\left(\tau_0, \frac{x}{r}\right) + \zeta^2 F_2\left(\tau_0, \frac{x}{r}\right) + \ldots$$

Wenn dies eine convergente Reihe ist, so wird man wegen der in allen concreten Fällen herrschenden Kleinheit von ζ nur bis ζ^2 incl. vorzugehen brauchen. Wir substituiren deshalb linear

$$48)\qquad \frac{y}{r} = a + b\zeta + c\zeta^2,$$

wo a, b, c näher zu bestimmende Functionen von x sind, von der Beschaffenheit, dass für $y = r$, $a = 1$, $b = c = \ldots = 0$ werden und auch die Differentiale dieser Functionen verschwinden. Durch Differenzirung wird

$$\frac{\partial\left(\frac{y}{r}\right)}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{\partial a}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)} + \zeta\frac{\partial b}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)} + \zeta^2\frac{\partial c}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)},$$

und für $x = 0$, $y = r$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cot\tau_0 = \frac{\partial a}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}, \quad \frac{\partial b}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{\partial c}{\partial\left(\frac{x}{r}\right)} = \ldots = 0.$$

Wir setzen der Kürze wegen im Folgenden

$$49)\qquad 2\zeta\int_0^x \frac{y^2}{r^2 n}\,\partial\frac{x}{r} = \omega, \quad \tau_0 + \frac{x}{r} = z.$$

Die vorgelegte Gleichung 47) wird nun durch Verwandlung der cyclometrischen Function in eine goniometrische

$$-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x} = \cot(z-\omega) = \cot z + \frac{\omega}{\sin z^2} + \frac{\omega^2 \cos z}{\sin z^3} + \ldots$$

In Berücksichtigung der Gleichung 48) erhält man durch Entwickelung der linken Seite nach Potenzen von ζ

$$50)\quad -\frac{\partial a + \zeta\partial b + \zeta^2\partial c}{(a + b\zeta + c\zeta^2)\,\partial z} = -\frac{\partial a}{a\,dz} - \zeta\frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial z} - \zeta^2\left[\frac{\partial\left(\frac{c}{a}\right)}{\partial z} - \frac{b}{a}\,\frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial z}\right].$$

Für die Entwickelung der Integrale bedarf es der Substitutionen

$$\frac{y^2}{r^2} = a^2 + 2ab\zeta, \quad \frac{y^4}{r^4} = a^4.$$

Daraus folgt

$$\omega = 2\zeta\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z + 2\zeta^2\int_{\tau_0}^{z}(a^4 - a^2 + 2ab)\,\partial z$$

und endlich

$$51)\quad \begin{aligned} cot(z-\omega) = cot\, z + \frac{2}{sin\, z^2}\Big\{\zeta\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z + \zeta^2\int_{\tau_0}^{z}(a^4 - a^2 + 2ab)\,\partial z\Big\} \\ + 4\frac{cos\, z^2}{sin\, z^3}\Big\{\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z\Big\}^2. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von ζ erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für a, b, c:

$$\text{I)}\qquad -\frac{\partial a}{a\,\partial z} = cot\, z,$$

$$\text{II)}\qquad -\frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial z} = \frac{2}{sin\, z^2}\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z,$$

$$\text{III)}\quad -\frac{\partial\left(\frac{c}{a}\right)}{\partial z} + \frac{\frac{b}{a}\,\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial z} = \frac{2}{sin\, z^2}\int_{\tau_0}^{z}(a^4 - a^2 + 2ab)\,\partial z + 4\frac{cos\, z}{sin\, z^3}\Big[\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z\Big]^2.$$

Diese Differentialgleichungen sind sämmtlich von τ_0 bis z zu integriren. Aus I) folgt demgemäss

$$-\int_1^{a}\frac{\partial a}{a} = \int_{\tau_0}^{z} cot\, z\,\partial z,$$

$$52)\qquad a = \frac{sin\,\tau_0}{sin\, z} = \frac{sin\,\tau_0}{sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}.$$

Die Gleichung II) ergiebt

$$-\int_0^{\frac{b}{a}}\partial\frac{b}{a} = \int_{\tau_0}^{z}\Big[\frac{2\,\partial z}{sin\, z^2}\int_{\tau_0}^{z} a^2\,\partial z\Big] = 2\int_{\tau_0}^{z}\frac{sin\,\tau_0^{\,2}}{sin\, z^2}(cot\, z - cot\,\tau_0]\,\partial z$$

und

$$53)\quad \frac{b}{a} = -\frac{sin\,\tau_0^{\,2}}{sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^2} + sin\, 2\tau_0\; cot\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right) + 1 - 2\, cos\,\tau_0^{\,2}.$$

In gleicher Weise integrirt man noch die Gleichung III). Man findet nach einer ziemlich mühsamen Rechnung

$$54)\quad \begin{aligned} \frac{c}{a} = \tfrac{5}{3}\frac{sin\,\tau_0^{\,4}}{sin\, z^4} - 3\,\frac{sin\, 2\tau_0\, sin\,\tau_0^{\,2}\, cos\, z}{sin\, z^3} + \frac{8\, sin\,\tau_0^{\,2} - 11\tfrac{1}{3}\, sin\,\tau_0^{\,4}}{sin\, z^2} \\ - \frac{(2\tfrac{1}{3} - 5\tfrac{1}{3}\, sin\,\tau_0^{\,2})\, sin\, 2\tau_0\, cos\, z}{sin\, z} + 1 - 10\, sin\,\tau_0^{\,2} + 10\tfrac{2}{3}\, sin\,\tau_0^{\,4}. \end{aligned}$$

Wir können indess auch mit Hilfe von 47) dazu gelangen, wie weiter unten gezeigt wird. Zunächst genügt aber der Werth von b zu einer

genauen Berechnung von x_0. Die Functionen a und b geben der Trajectorie in den beiden ersten Gliedern die Form

$$55)\quad \frac{y}{r} = \frac{\sin\tau_0}{\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)}\left\{1-\zeta\left[\frac{\sin\tau_0^2}{\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)^2} - \frac{\sin 2\tau_0\cos\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)}{\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)} - 1 + 2\cos\tau_0^2\right]\right\}.$$

Zur Einführung in 47) genügen folgende Werthe der Potenzen:

$$\frac{y^2}{r^2} = \frac{\sin\tau_0^2}{\sin z^2}\left\{1-2\zeta\left[\frac{\sin\tau_0^2}{\sin z^2} - \sin 2\tau_0\frac{\cos z}{\sin z} - 1 + 2\cos\tau_0^2\right]\right\},$$

$$\frac{y^4}{r^4} = \frac{\sin\tau_0^4}{\sin z^4}.$$

Infolge dessen geht 47) über in

$$arc\cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right) = \tau_0 + \frac{x}{r} - 2\zeta\int_{\tau_0}^{z}\frac{\sin\tau_0^2}{\sin z^2}\partial z$$

$$+ 2\zeta^2\int_{\tau_0}^{z}\left\{\frac{\sin\tau_0^4}{\sin z^4} - 2\frac{\sin\tau_0^2\sin 2\tau_0\cos z}{\sin z^3} - (1-4\cos\tau_0^2)\frac{\sin\tau_0^2}{\sin z^2}\right\}\partial z$$

$$56)\quad = \tau_0 + \frac{x}{r} - \zeta\left[\sin 2\tau_0 - 2\sin\tau_0^2\cot\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)\right]$$

$$+ 2\zeta^2\left[-\frac{\sin\tau_0^4\cos\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)}{3\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)^3} + \frac{\sin 2\tau_0\sin\tau_0^2}{\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(3\tfrac{1}{3}\sin\tau_0^4 - 3\sin\tau_0^2)\cos\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)}{\sin\left(\tau_0+\frac{x}{r}\right)} + \tfrac{1}{3}(2-5\sin\tau_0^2)\sin 2\tau_0\right].$$

Nun ist wiederum

$$\cot(z-\omega) = \cot z + \frac{\omega}{\sin z^2} + \frac{\omega^2\cos z}{\sin z^3}.$$

Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich deshalb in

$$-\frac{\partial y}{y} = \cot z\,\partial z - \zeta\left[\frac{\sin\tau_0^2\cos z}{\sin z^3} - \frac{\sin 2\tau_0}{\sin z^2}\right]\partial z$$

$$+ \zeta^2\left[\frac{4\sin\tau_0^4(1-\sin z^2)\cos z}{\sin z^5} - \frac{4\sin\tau_0^2\sin 2\tau_0(1-\sin z^2)}{\sin z^4} + \frac{(\sin 2\tau_0)^2\cos z}{\sin z^3}\right]\partial z$$

$$+ \zeta^2\left[\frac{2\sin\tau_0^4\cos z}{3\sin z^5} - \frac{2\sin\tau_0^2\sin 2\tau_0}{\sin z^4} - \frac{(6\tfrac{2}{3}\sin\tau_0^4 - 6\sin t_0^2)\cos z}{\sin z^3}\right.$$

$$\left. - \frac{2\sin 2\tau_0(2-5\sin\tau_0^2)}{3\sin z^2}\right]\partial z.$$

Durch Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen r und y, 0 und z resultirt hieraus

$$
57)\quad \begin{aligned}
-\log nat\left(\frac{y \sin z}{r \sin \tau_0}\right) &= \zeta\left[\frac{\sin \tau_0^2}{\sin z^2} - \frac{\sin 2\tau_0 \cos z}{\sin z} + 1 - 2 \sin \tau_0^2\right] \\
&+ \zeta^2\Big[-\tfrac{7}{6}\frac{\sin \tau_0^4}{\sin z^4} + \frac{2 \sin \tau_0^2 \sin 2\tau_0 \cos z}{\sin z^3} + \frac{7\frac{1}{3} \sin \tau_0^4 - 5 \sin \tau_0^2}{\sin z^2} \\
&+ \tfrac{1}{3}\frac{(4 \sin 2\tau_0 - 10 \sin 2\tau_0 \sin \tau_0^2)\cos z}{\sin z} \\
&- (\tfrac{1}{2} - 6 \sin \tau_0^2 + 6\tfrac{2}{3} \sin \tau_0^4)\Big]
\end{aligned}
$$

oder kurz

$$-\lg\left(\frac{y \sin z}{r \sin \tau_0}\right) = P\zeta + Q\zeta^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{y \sin z}{r \sin \tau_0} = e^{-P\zeta - Q\zeta^2} = 1 - P\zeta + (\tfrac{1}{2}P^2 - Q)\zeta^2$$

und somit die Gleichung der Trajectorie

$$
58)\quad \begin{aligned}
\frac{y}{r} = \frac{\sin \tau_0}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}\Bigg\{1 &- \zeta\left[\frac{\sin \tau_0^2}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^2} - \frac{\sin 2\tau_0 \cos\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)} + 1 - 2 \sin \tau_0^2\right] \\
&+ \zeta^2\Bigg[1\tfrac{2}{3}\frac{\sin \tau_0^4}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^4} - 3\frac{\sin 2\tau_0 \sin \tau_0^2 \cos\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^3} + \frac{8 \sin \tau_0^2 - 11\frac{2}{3} \sin \tau_0^4}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^2} \\
&- \frac{(2\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3} \sin \tau_0^2) \sin 2\tau_0 \cos\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}{\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)} + (1 - 10 \sin \tau_0^2 + 10\tfrac{2}{3} \sin \tau_0^4)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

und zwar völlig streng bis auf die mit ζ^3 und höheren Factoren behafteten Grössen. Um dies an einer Probe darzuthun, leiten wir daraus den Werth von y_0 ab, indem wir x_0 statt x setzen. Wir haben dabei die Werthe von $\sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)$ und $\cos\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)$ bis zu den Gliedern mit ζ^2 incl. zu berechnen. Dieselben ergeben sich aus 56), wovon man nur braucht den Theil

$$\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right) = \tau_0 + \frac{x}{r} - \zeta \sin 2\tau_0.$$

Für $x = x_0$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und

$$\frac{\pi}{2} = \tau_0 + \frac{x_0}{r} - \zeta \sin 2\tau_0.$$

Daraus folgt

$$\sin\left(\tau_0 + \frac{x_0}{r}\right) = 1 - 2\zeta^2 \sin \tau_0^2 (1 - \sin \tau_0^2), \quad \cos\left(\tau_0 + \frac{x_0}{r}\right) = -\zeta \sin 2\tau_0.$$

Der erstere Werth ist nur an die Stelle des Divisors vor der grossen Klammer zu setzen, der zweite an die Stelle von $cos\left(\tau_0+\frac{x_0}{r}\right)$ hinter ζ; an allen anderen Stellen ist 1 für $sin\left(\tau_0+\frac{x_0}{r}\right)$, 0 für $cos\left(\tau_0+\frac{x_0}{r}\right)$ zu setzen. Man erhält alsdann für das Minimum von y

$$\frac{y_0}{r}=sin\,\tau_0\,\frac{1-\zeta(1-sin\,\tau_0^2)-4\zeta^2\,sin\,\tau_0^2(1-sin\,\tau_0^2)+\zeta^2(1-sin\,\tau_0^2)^2}{1-2\zeta^2\,sin\,\tau_0^2(1-sin\,\tau_0^2)}$$
$$=sin\,\tau_0\{1-(1-sin\,\tau_0^2)\zeta+(1-sin\,\tau_0^2)(1-3\,sin\,\tau_0^2)\zeta^2\},$$

also genau denselben Werth, welchen wir in 45) auf directem Wege aus 40) abgeleitet haben.

Den simultanen Werth x_0 endlich erhalten wir aus 56), nämlich

$$59)\qquad \frac{\pi}{2}=\tau_0+\frac{x_0}{r}-\zeta(1+2\zeta-3\tfrac{1}{3}\,cos\,\tau_0^2\,\zeta)\,sin\,2\,\tau_0.$$

Diese Gleichung in x_0 führt uns zur Brennweite φ irgend eines Strahles. Es sei $O_1C\Phi=\psi$; dann ist

$$\psi=\pi-\left(\tau_1+\frac{2x_0}{r}\right)=2\tau_0-\tau_1-2\zeta(1+2\zeta-3\tfrac{1}{3}\,cos\,\tau_0^2\,\zeta)\,sin\,2\,\tau_0$$

und

$$60)\quad \varphi=\frac{r\,sin\,\tau_1}{sin(\tau_1-\psi)}=\frac{r\,sin\,\tau_1}{sin\{2(\tau_1-\tau_0)+2\zeta(1+2\zeta-3\tfrac{1}{3}\,cos\,\tau_0^2\,\zeta)\,sin\,2\,\tau_0\}},$$

worin

$$sin\,\tau_1=\frac{1{,}3830}{1{,}3350}\,sin\,\tau_0=1{,}03595\,sin\,\tau_0$$

zu setzen ist. Der Werth φ_0 für einen Axenstrahl wird gefunden, indem $\tau_0=0$ gesetzt wird, in welchem Falle man den Bogen für den Sinus zu zu nehmen hat. Es ergiebt sich daraus

$$61)\qquad \varphi_0=\frac{1{,}03595\,.\,r}{2\,.\,0{,}03595+4\zeta(1-\tfrac{4}{3}\zeta)}.$$

Die Brennweite φ_2 der Linse in Corticalsubstanz findet man, wenn man $\tau_1=\tau_0$ annimmt, also

$$62)\qquad \varphi_2=\frac{r}{4\zeta(1-\tfrac{4}{3}\zeta)}=\frac{r}{4\zeta}(1+\tfrac{4}{3}\zeta).$$

Die Totalindices bezüglich Corticalsubstanz für jeden beliebigen schief einfallenden Strahl sind bestimmt durch die Relation

$$63)\quad n_1=\frac{sin\,\tau_0}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x_0}{r}\right)}=\frac{sin\,\tau_0}{sin\{\tau_0-\zeta(1+2\zeta-3\tfrac{1}{3}\,cos\,\tau_0^2\,\zeta)\,sin\,2\,\tau_0\}}.$$

Für einen Axenstrahl ist $\tau_0=0$, also der Totalindex

$$64)\qquad n_1=\frac{1}{1-2\zeta(1-\tfrac{4}{3}\zeta)}=1+2\zeta+\tfrac{4}{3}\zeta^2.$$

Dieselben Werthe für n und φ_2 fanden wir auch schon früher.* Bei Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen ζ^2 wird

$$n_1 = \frac{1}{1 - 2\cos\tau_0{}^2\zeta} = 1 + 2\cos\tau_0{}^2\zeta$$

und, weil approximativ $\sin\tau_0 = \frac{y}{r}$ ist,

$$65) \qquad n_1 = 1 + 2\zeta\frac{r^2 - y^2}{r^2}.$$

Daraus folgt das schöne Theorem:**

Der totale Brechungsindex irgend eines von der Trajectorie beschriebenen Kanals übertrifft um ebensoviel den Brechungsindex der tiefsten getroffenen Schicht, als dieser den Index der Corticalis.

Dasselbe gilt in Rücksicht auf 64) natürlich auch vom Axenstrahle. Um aber jedem Zweifel an der Genauigkeit der eben aufgestellten dioptrischen Integrale 60) und 63) zu begegnen, will ich noch die aus denselben für $\tau_0 = 0$ sich ergebenden Formeln 61) und 64) mit denjenigen collationiren, welche für homogene Linsen gelten. Der relative Brechungsindex der Corticalis der in Luft oder irgend einem andern Medium befindlichen Linse sei N, so ist gemäss 61)

$$\varphi_0 = \frac{Nr}{2(N-1) + 4\zeta(1 - \frac{4}{3}\zeta)}$$

und der totale Index der Linse gemäss 64)

$$n_m = \frac{N}{1 - 2\zeta(1 - \frac{4}{3}\zeta)}.$$

Hieraus folgt

$$4\zeta(1 - \tfrac{4}{3}\zeta) = 2\frac{n_m - N}{n_m}.$$

Der Abstand des Hauptbrennpunktes vom Centrum der Linse ist demnach

$$66) \qquad \varphi_0 = \frac{Nr}{2(N-1) + 2\frac{n_m - N}{n_m}} = \frac{r\,n_m}{2(n_m - 1)},$$

also der Abstand von der hinteren Fläche

$$67) \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + r = \frac{r(2 - n_m)}{2(n_m - 1)}.$$

Ganz denselben Werth liefert auch die gewöhnliche Formel für eine homogene Kugellinse von dem gleichen Brechungsindex, nämlich***

---

* Man vergl.: Die Differentialgleichungen etc., Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. XIX, S. 499, 500.

** L. Matthiessen, Ueber die geometrische Gestalt der theoretischen Retina des periskopischen schematischen Auges. v. Graefe's Arch. f. Ophthalm. XXV, S. 261, 1879.

*** Vergl. Wüllner's Experimentalphysik II, S. 186.

68) $$\varphi_1 = \frac{\nu \varrho \left[d(n_m - 1) - n_m r\right]}{(\nu - 1)\left[d(n_m - 1) - n_m r\right] - (n_m - 1)\varrho},$$

worin $\varrho = -r$, $\nu = \frac{1}{n}$ und $d = 2r$ zu setzen sind.

Nun sind weiter für endliche Werthe von τ_0, also für schief einfallende Strahlen φ und n noch abhängig von m und es liegt der Gedanke nahe, den letzten Werth so zu wählen, dass φ für alle Strahlen möglichst genau gleich werde, d. h. die sphärische Längenabweichung verschwinde. Man darf jedoch nicht übersehen, dass auch die Hauptbrennweite der Axenstrahlen durch den Werth von m beeinflusst wird und dass dieselbe von Natur aus durch den Ort der Retina in jedem einzelnen Auge bestimmt ist. Wenn deswegen sich durch Annahme anderer Werthe von m der simultane Werth von φ_0 wesentlich ändern sollte, so würden wir auch in Betreff der Prüfung der sphärischen Längenabweichung von diesen Voraussetzungen Abstand nehmen müssen. Wir betrachten deshalb auch noch den Fall $m = 3$, wobei der Kürze wegen nur die Glieder von der Ordnung ζ in Berechnung gezogen werden sollen. Die Gleichung 46) wird in diesem Falle sein

$$arc\,cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right) = \tau_0 + \frac{x}{r} - 3\zeta \int_0^x \frac{y^2}{r^3}\,\partial\left(\frac{x}{r}\right)$$

und, indem wir nach 31) oder 58) die Relation $y\,sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right) = r\,sin\,\tau_0$ zur Elimination von y verwenden können,

$$arc\,cot\left(-\frac{r\,\partial y}{y\,\partial x}\right) = \tau_0 + \frac{x}{r} - 3\zeta\,sin\,\tau_0^3 \int_0^x \frac{\partial\left(\frac{x}{r}\right)}{sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^3}$$

69) $$= \tau_0 + \frac{x}{r} + \tfrac{3}{2}\zeta\left[\frac{sin\,\tau_0^3\,cos\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}{sin\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)^2} - sin\,\tau_0^3\,log\frac{tan\,\frac{1}{2}\left(\tau_0 + \frac{x}{r}\right)}{tan\,\frac{1}{2}\tau_0} - \tfrac{1}{2}\,sin\,2\tau_0\right].$$

Hieraus ergiebt sich der simultane Werth x_0 von y_0, wenn $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gesetzt wird, nämlich

70) $$\frac{\pi}{2} = \tau_0 + \frac{x_0}{r} - \tfrac{3}{4}\,sin\,2\tau_0 + \tfrac{3}{2}\zeta\,sin\,\tau_0^3\,lg\,tan\,\tfrac{1}{2}\tau_0.$$

Das letzte Glied ist eine verschwindend kleine Grösse, welche für $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$ in Null und für $\tau_0 = 0$ in $-\frac{1}{2}\zeta \sin 2\tau_0 \tan \tau_0^2$ übergeht. Die Brennweite ist demnach

$$71) \qquad \varphi = \frac{r \sin \tau_1}{\sin(\tau_1 - \psi)} = \frac{r \sin \tau_1}{\sin\{2(\tau_1 - \tau_0) + \frac{3}{2}\zeta \sin 2\tau_0\}}$$

und die Brennweite in Corticalsubstanz nebst dem Totalindex

$$72) \qquad \varphi_2 = \frac{r}{3\zeta}, \quad n_1 = 1 + \tfrac{3}{2}\zeta.$$

In diesem Falle würde demnach die Brennweite und der Centralabstand der Netzhaut um $\frac{1}{3}$ grösser sein müssen, als in demjenigen, wo $m = 2$ gesetzt ist.

Drücken wir den Näherungswerth von φ_2 allgemein in m aus, so wird bezüglich des Kammerwassers

$$\varphi_0 = \frac{r \,.\, 1{,}03595}{\frac{2m}{m-1}\zeta + 2 \,.\, 0{,}03595}.$$

Es stellt sich nun in der That bei der Prüfung der in den gemessenen Abständen der Retina vom Linsenkerncentrum mittelst der gemessenen Werthe von ζ heraus, dass der zugehörige Werth von m immer nahe bei 2 liegt, wie ich dies auch schon früher für das menschliche Auge und die Augen von verschiedenen Landwirbelthieren nachgewiesen habe. Indem wir die Abstände der Retina vom Linsencentrum an die Stelle von φ_0 setzen, erhalten wir die Gleichung

$$73) \qquad \frac{m}{m-1}\zeta + 0{,}03595 = \frac{1{,}03595\, r}{2\varphi_0}.$$

Stellen wir die aus den gemessenen Werthen von ζ, r, φ_0 berechneten Werthe m mit jenen zusammen:

Auge von:	ζ.	φ_0.	r.	m.
Mullus	0,0962	5,5 mm	2,5 mm	1,93
Cyprinus carpio .	0,0910	6,0 „	2,5 „	1,98
Abramis brama .	0,0810	12,0 „	4,5 „	2,05
Gadus callarias I	0,0810	11,75 „	4,25 „	2,15
„ „ II	0,0884	12,0 „	5,0 „	1,97
			Mittel	2,01

Wir bleiben also bei dem Werthe $m = 2$ stehen und es ist bereits am Eingange dieser Abhandlung hervorgehoben, von welcher Bedeutung

dieses Factum für den Calcul ist. Bevor wir aber dazu schreiten, die Brennweiten schief in die Linse einfallender Strahlen zu berechnen, müssen wir noch einen Umstand erwähnen, welcher für den Aplanatismus der Krystalllinse von der grössten Wichtigkeit zu sein scheint. Dieser Umstand, welcher den Aplanatismus nicht allein, sondern natürlicherweise auch die Periskopie begünstigt, besteht darin, dass die Krystalllinse von einem Medium umgeben ist, dessen Index ($n_D = 1{,}3350$) sich zu dem der Linsenkapsel ($n_D = 1{,}3750$) und dem der äussersten Rindenschicht ($n_D = 1{,}3830$) sprungweise erhebt. Es würde offenbar eine Krystalllinse, deren Corticalis ebenfalls mit dem Index 1,3350 anhebt, für die Brennweite der Centralstrahlen dasselbe leisten können, wenn ζ in demselben Verhältnisse grösser wäre Denn sei beispielsweise $\zeta = 0{,}0810$, $r = 4{,}25$ mm, so findet man für Axenstrahlen $\varphi_0 = 12{,}20$ mm (beobachtet 11,75 mm). Bezeichnet man den neuen Werth mit ζ_1, so würde sein

$$12{,}20 = \frac{4{,}25}{4\,\zeta_1(1 - \frac{4}{3}\,\zeta_1)}, \quad \zeta_1 = 0{,}1000.$$

Da für diese hypothetische Linse τ_1 in τ_0 übergeht, so erhält man für die peripherischen Strahlen gemäss 60)

$$\varphi = \frac{4{,}25\, sin\, \tau_0}{sin\,\{2\,\zeta\,(1 + 2\,\zeta - 3\tfrac{1}{3}\,\zeta\, cos\, \tau_0^{\,2})\, sin\, 2\,\tau_0\}}$$

und, da der Divisor immer sehr klein bleibt,

$$\varphi = \frac{4{,}25\, sin\, \tau_0}{4\,\zeta\,(1 + 2\,\zeta - 3\tfrac{1}{3}\,\zeta\, cos\, \tau_0^{\,2})\, sin\, \tau_0\, cos\, \tau_0}.$$

Dieser Ausdruck nimmt für $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$ den Werth ∞ an. Bei einer derartigen Einrichtung des Auges würde also die Brennweite der Randstrahlen unendlich gross werden und die Wirkung der Schichtung würde gerade die entgegengesetzte von derjenigen sein, welche uns bei homogenen Linsen bekannt ist. Der discontinuirlich geringere Brechungsindex der Augenflüssigkeiten gewinnt also an Bedeutung durch den Umstand, dass φ für $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$ nicht bis ins Unermessliche wächst.

Um den Einfluss der Schichtung auf die sphärische Längenabweichung numerisch zu prüfen, gehen wir aus von folgenden Constanten, die an den Augen zweier Exemplare des Dorsches (Gadus callarias) von mir in der sorgfältigsten Weise gemessen worden sind.*

---

* Man vergl.: Grundriss der Dioptrik etc., S. 217; Die Differentialgleichungen etc., S. 551 in Pflüger's Arch. f. Phys. XIX; S. 314 in Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXIV.

Medien.	Exempl. I.	Exempl. II. (Fig. 2.)
Krümmungsradius der beiden Linsenflächen	4,25 mm	5,0 mm
Axe der Krystalllinse	8,5 „	9,75 „
Krümmungsradius der concentrischen Retina . . .	11,75 „	12,0 „
Brechungsindex der Hornhaut	1,3770	—
„ des Hornhautepithels	1,3609	—
„ der Linsenkapsel von Cyprinus carpio	1,3658	—
„ „ äussersten Corticalschicht . . .	—	1,3852
„ des Kerncentrums	1,4950	1,5052
„ „ Glaskörpers	—	1,3353
„ „ destillirten Wassers	1,3330	—

Setzen wir den Index der beiden Augenflüssigkeiten gleich 1,3350 und, wie es gleichfalls durchschnittlich bei allen Augen der Fall ist, den der Corticalis gleich 1,3830, so wird für die Dorschlinse I $\zeta = 0{,}0810$ und der Totalindex der Krystalllinse gegen Luft gleich 1,6192. Wir untersuchen zunächst die sphärische Längenabweichung der homogenen Krystalllinse mit dem Totalindex 1,6192. Man erhält für Parallelstrahlen bei einem von 10^0 zu 10^0 wachsenden Winkel τ_0 folgende Werthe von φ:

τ_0.	τ_1.	φ.	Δ.
0⁰ 0′ 0″	0⁰ 0′ 0″	12,20 mm	—
10⁰ 0′ 0″	12⁰ 9′ 30″	11,94 „	− 0,26 mm
20⁰ 0′ 0″	24⁰ 30′ 30″	11,25 „	− 0,95 „
30⁰ 0′ 0″	37⁰ 20′ 0″	10,18 „	− 2,02 „
40⁰ 0′ 0″	51⁰ 13′ 30″	8,68 „	− 3,52 „
50⁰ 0′ 0″	68⁰ 18′ 0″	6,62 „	− 5,58 „
55⁰ 32′ 10″	90⁰ 0′ 0″	4,55 „	− 7,65 „

Da hier n von τ_0 unabhängig bleibt, so sind τ_1 und φ zu berechnen aus den Formeln

$$\sin\tau_1 = \frac{1{,}6192}{1{,}3350}\sin\tau_0, \quad \varphi = \frac{r\sin\tau_1}{\sin[2(\tau_1 - \tau_0)]}.$$

Für $\tau_0 = 0$ wird speciell

$$\varphi_0 = 4{,}25\,\frac{1{,}6192}{1{,}3350} : \left[2\left(\frac{1{,}6192}{1{,}3350} - 1\right)\right] = 12{,}20\,\text{mm} \quad (\text{beob. } 11{,}75\,\text{mm}).$$

Eine derartige Linse würde natürlich für die Fische absolut unbrauchbar sein, namentlich deshalb, weil bei manchen unter ihnen, z. B. beim Hecht und Karpfen, die Linse in ihrer ganzen Ausdehnung vom Lichte getroffen wird.

Wir gehen nunmehr bei der Berechnung der Brennweiten schief einfallender Strahlen aus von dem Dichtigkeitsgesetze

$$n = N\left(1 + \zeta\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)$$

und legen demgemäss hierbei die Formel 60)

$$\varphi = \frac{r \sin\tau_1}{\{\sin 2(\tau_1 - \tau_0) + 2\zeta(1 + 2\zeta - 3\tfrac{1}{3}\cos\tau_0{}^2\zeta)\sin 2\tau_0\}}$$

und der Berechnung der Totalindices die Formel 63) in Verbindung mit N

$$n_1 = \frac{1{,}3830 \sin\tau_0}{\sin\{\tau_0 - \zeta(1 + 2\zeta - 3\tfrac{1}{3}\cos\tau_0{}^2\zeta)\sin 2\tau_0\}}$$

zu Grunde. Für Parallelstrahlen ergeben sich daraus bei einem von 10^0 zu 10^0 wachsenden Winkel τ_0 folgende Werthe der Brennweiten, der totalen Brechungsindices und der Helligkeit der sphärischen Gürtel der Krystalllinse:

τ_0.	τ_1.	Helligkeit.	n_1.	φ.	Δ.
0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0,0151	1,6192	12,20 mm	—
10° 0′ 0″	10° 21′ 50″	0,0436	1,6107	12,22 „	+ 0,02 mm
20° 0′ 0″	20° 45′ 0″	0,0745	1,5956	12,34 „	0,14 „
30° 0′ 0″	31° 11′ 50″	0,0913	1,5694	12,54 „	0,34 „
40° 0′ 0″	41° 45′ 0″	0,0920	1,5341	12,89 „	0,69 „
50° 0′ 0″	52° 31′ 20″	0,0905	1,4932	13,34 „	1,14 „
60° 0′ 0″	63° 47′ 20″	0,0712	1,4516	13,52 „	1,32 „
70° 0′ 0″	76° 46′ 30″	0,0255	1,4158	11,93 „	− 0,27 „
74° 51′ 50″	90° 0′ 0″		1,4022	7,29 „	− 4,91 „

Aus dieser Tabelle geht mit Evidenz die Wirkung der Schichtung hervor und zugleich dass es nicht die Centralstrahlen, sondern um 45^0 seitlich gelegene Strahlen sind, welche die grösste Helligkeit des Bildes äusserer Objecte liefern.

Rostock, 30. Januar 1880.

Kleinere Mittheilungen.

XV. Ueber die Bestimmung des Ortes eines Gestirns durch den Durchschnitt zweier grösster Kugelkreise.

In der ersten Nummer des 26 Jahrganges dieser Zeitschrift S. 50 flgg. lenkt Herr Prof. Dr. S. Günther in einem interessanten Aufsatze die Aufmerksamkeit auf die wenig gekannte Methode von Mästlin, den Ort eines Gestirns durch den Durchschnitt der Verbindungslinien von zwei Sternpaaren zu ermitteln, „mit deren jedem das Gestirn in einer geraden Linie, eigentlich Bogen eines grössten Kreises“ erscheint, und giebt auch eine analytisch geometrische Lösung der Aufgabe. Da aber diese Methode der Ortsbestimmung eines Gestirns, wie der Herr Verfasser mit Recht bemerkt, auch heute noch von Dilettanten vielfach mit Vortheil angewendet werden könnte, benütze ich diesen Anlass, eine in mancher Beziehung einfachere Lösung des Problems, die mir vor einiger Zeit aufstiess, zu veröffentlichen.

Die Ortsbestimmung wird, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, im Allgemeinen am sichersten ausfallen, wenn die Sternpaare so gewählt werden, dass das unbekannte Gestirn im Innern des durch sie gebildeten Vierecks liegt, so dass sein Ort durch den Durchschnitt der Diagonalen dieses Vierecks bestimmt wird. Doch ist die Methode auch auf andere Sternpaare anwendbar; nur ist dann darauf zu achten, dass die beiden Kreise sich nahe rechtwinklig durchschneiden.

Seien nun die sphärischen Coordinaten des unbekannten Gestirns A und D; sei ferner die Lage des durch das Sternenpaar $\alpha_1 \delta_1$ und $\alpha_2 \delta_2$ gelegten grössten Kreises durch die Länge seines aufsteigenden Knotens Ω_1 und seine Neigung J_1 mit der Fundamentalebene gegeben, und werden die analogen Grössen für das zweite Sternpaar $\alpha_3 \delta_3$ und $\alpha_4 \delta_4$ mit Ω_2 und J_2 bezeichnet, so hat man, da A, D im Durchschnitte der beiden grössten Kreise, also auf beiden liegt,

$$\text{a)} \quad \begin{cases} tg\,\delta_1 = sin(\Omega_1 - \alpha_1)\, tg\,J_1, \\ tg\,\delta_2 = sin(\Omega_1 - \alpha_2)\, tg\,J_1, \\ tg\,D = sin(\Omega_1 - A)\, tg\,J_1, \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} tg\,\delta_3 = sin(\Omega_2 - \alpha_3)\, tg\,J_2, \\ tg\,\delta_4 = sin(\Omega_2 - \alpha_4)\, tg\,J_2, \\ tg\,D = sin(\Omega_2 - A)\, tg\,J_2. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen der Systeme a) und b) liefern $\Omega_1 J_1$ und $\Omega_2 J_2$, und sobald diese bekannt sind, ergiebt die dritte Gleichung sofort

$$sin(\Omega_1 - A)\, tg\, J_1 = sin(\Omega_2 - A)\, tg\, J_2,$$

d. h.

$$\text{c)} \qquad tg\, A = \frac{sin\, \Omega_1\, tg\, J_1 - sin\, \Omega_2\, tg\, J_2}{cos\, \Omega_1\, tg\, J_1 - cos\, \Omega_2\, tg\, J_2}$$

und dann eine der letzten Gleichungen D.

Um die Formel c) zur Berechnung von A geschmeidiger zu machen, zähle man die Rectascensionen (oder Längen) nicht vom Frühlingsnachtgleichenpunkte an, sondern von einem Punkte, welcher in der Fundamentalebene um den Bogen N in der Richtung der Zählung von ihm absteht, wodurch alle Rectascensionen (oder Längen) um den Winkel N verkleinert erscheinen. Die Gleichung c) lautet dann

$$tg(A - N) = \frac{sin(\Omega_1 - N)\, tg\, J_1 - sin(\Omega_2 - N)\, tg\, J_2}{cos(\Omega_1 - N)\, tg\, J_1 - cos(\Omega_2 - N)\, tg\, J_2}.$$

Ertheilt man nun dem willkürlichen Winkel N den Werth $N = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$, so werden die Gleichungen zur Berechnung von A und D

$$\text{c*)} \qquad \begin{cases} tg\left[A - \tfrac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2)\right] = \dfrac{sin(J_1 + J_2)}{sin(J_1 - J_2)}\, tg\, \dfrac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}, \\ tg\, D = sin(\Omega_1 - A)\, tg\, J_1. \end{cases}$$

Die soeben gegebene Lösung ist wohl die natürlichste, welche sich aus den Gleichungen a) und b) gleichsam von selbst ergiebt; sie kann aber noch in Etwas vereinfacht werden. Schreibt man nämlich die letzte Gleichung der beiden Systeme in der Form

$$sin(\Omega_1 - A)\, ctg\, D = ctg\, J_1,$$
$$sin(\Omega_2 - A)\, ctg\, D = ctg\, J_2,$$

so kann sie zur gleichzeitigen Berechnung von A und D leicht in die folgende transformirt werden:

$$sin(\Omega_1 - A)\, ctg\, D = ctg\, J_1,$$
$$cos(\Omega_1 - A)\, ctg\, D = \frac{ctg\, J_2 - cos(\Omega_2 - \Omega_1)\, ctg\, J_1}{sin(\Omega_2 - \Omega_1)}.$$

Nimmt man auch mit den beiden ersten Gleichungen a) und b) eine ähnliche Transformation vor, um sie zur Berechnung der Bestimmungsstücke der beiden grössten Kreise geeigneter zu machen, so gestalten sich die Formeln zur Ermittelung von A und D, übersichtlich zusammengestellt, folgendermassen:

$$\text{1)} \qquad \begin{cases} sin(\Omega_1 - \alpha_1)\, tg\, J_1 = tg\, \delta_1, \\ cos(\Omega_1 - \alpha_1)\, tg\, J_1 = \dfrac{tg\, \delta_2 - cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, tg\, \delta_1}{sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \sin(\Omega_2-\alpha_3)\,tg\,J_2 = tg\,\delta_3, \\ \cos(\Omega_2-\alpha_3)\,tg\,J_2 = \dfrac{tg\,\delta_4-\cos(\alpha_3-\alpha_4)\,tg\,\delta_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_4)}, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \sin(\Omega_1-A)\,ctg\,D = ctg\,J_1, \\ \cos(\Omega_1-A)\,ctg\,D = \dfrac{ctg\,J_2-\cos(\Omega_2-\Omega_1)\,ctg\,J_1}{\sin(\Omega_2-\Omega_1)}. \end{cases}$$

Bei dieser Berechnungsart gewährt noch der Umstand einen kleinen Vortheil, dass man die Winkel J_1 und J_2 gar nicht aufzuschlagen braucht, da man nur die Tangenten, resp. Cotangenten derselben benöthigt, die aus den Gleichungen 1) und 2) unmittelbar erhalten werden.

Nach den Beobachtungen von Mästlin stand der Tychonische Stern von 1572 in demselben grössten Kreise, einerseits mit δ Cassiopejae und ι Cephei, andererseits mit β Cassiopejae und λ Ursae maj.* Die Positionen dieser Sterne auf das mittlere Aequinoctium 1850,0 bezogen, sammt ihren säcularen Eigenbewegungen sind nach Mädler's Katalog der Bradley'schen Sterne:

	α 1850,0:	säc. EB.:	δ 1850,0:	säc. EB.:
δ Cassiopejae	19° 0′ 40,46″	+ 59,9″	+ 59° 27′ 12,57″	− 4,0″
ι Cephei . .	341 5 16,29	− 18,3	+ 65 24 43,17	− 13,7
β Cassiopejae	0 18 3,89	+ 105,1	+ 58 19 19,64	− 20,1
λ Ursae maj. .	152 0 28,36	− 24,9	+ 43 39 40,45	− 8,9

Darnach war die Position dieser Sterne am Anfang von 1573, bezogen auf das mittlere Aequinoctium von 1850,0:

δ Cassiopejae	18° 57′ 54″	+ 59° 27′ 24″
ι Cephei . .	341 6 7	+ 65 25 21
β Cassiopejae	0 13 13	+ 58 20 15
λ Ursae maj. .	152 1 37	+ 43 40 5

Aus diesen Daten ergiebt sich

$$\Omega_1 = 69' 45' 37'', \quad ctg\,J_1 = 9{,}660140,$$
$$\Omega_2 = 162\ 24\ 13 \quad ctg\,J_2 = 9{,}275760,$$
$$A = 4^0 25' 45'', \quad D = +63^0 17' 26''.$$

Argelander hat durch eine sorgfältige Discussion der Tychonischen Beobachtungen dieses Sternes für den wahrscheinlichsten Ort desselben (ebenfalls auf das Aequinoctium 1850,0 reducirt) gefunden (Astr. Nachr. LXII, 273):

$$A = 4^0 7' 37'', \quad D = +63^0 18' 56'',$$

was von dem obigen Orte im Bogen grössten Kreises nur 8,3′ abweicht. Dies Resultat ist wohl der beste Beweis für die Leistungsfähigkeit der

* In der oben angezogenen Abhandlung von Dr. Günther steht S. 51 aus Versehen: im Fusse des kleinen Bären. Auch folgt aus den dort angeführten Orten der Sterne für die Länge des Tychonischen Sternes $L = 37^0 2'$ statt $7^0 38'$.

Methode und zeigt auch, wie begründet Tycho's Ausspruch war, dass der Autor derselben, Mästlin, mit Nichts weiter, als einem Faden zur Feststellung des Alignements versehen, weit mehr geleistet habe, als Andere mit den besten Instrumenten.

Währing b. Wien, d. 23. Jan. 1881. Prof. Dr. EDMUND WEISS.

XVI. Ueber confocale Flächen.

Wenn man die Gleichung des Kegels vom zweiten Grade in der Form schreibt

$$1)\qquad \frac{\xi^2}{\lambda-\lambda'}+\frac{\eta^2}{\mu-\lambda'}+\frac{\zeta^2}{\nu-\lambda'}=0,$$

wo $\lambda > \mu > \nu$ constante Grössen sind, während λ' veränderlich ist, so stellt sie zugleich ein System von confocalen Kegeln vor, welche reell sind, so lange sich λ' innerhalb der Grenzen λ und ν bewegt, also $\lambda > \lambda' > \nu$ ist. Man erhält ferner

$$2)\qquad \text{für } \lambda'=\lambda \qquad \xi=0,\quad \eta=\pm i\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}}\,\zeta,\quad i=\sqrt{-1},$$

$$3)\qquad \text{„ } \lambda'=\mu \qquad \eta=0,\quad \zeta=\pm\sqrt{\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu}}\,\xi,$$

$$4)\qquad \text{„ } \lambda'=\nu \qquad \zeta=0,\quad \xi=\pm i\sqrt{\frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu}}\,\eta.$$

Die Gleichungen 3) entsprechen den Focallinien; da nun die beiden anderen Gleichungen 2) und 4) ebenso abgeleitet sind, wie 3), und sich nur dadurch unterscheiden, dass sie imaginäre Werthe liefern, so wird man überhaupt die den Relationen 2), 3), 4) entsprechenden Geraden Focallinien nennen und in diesem Sinne sagen können, dass ein Kegel zweiten Grades drei Paare von Focallinien hat, wovon eines reell ist, während die beiden anderen imaginär sind.

Setzt man in 2) $\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}=\varepsilon$, so erhält man aus 3) und 4) $\frac{\mu-\nu}{\mu-\lambda}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, $\frac{\nu-\lambda}{\nu-\mu}=\frac{1}{\varepsilon-1}$. Hieraus folgt, dass ein System von confocalen Kegeln bestimmt ist, wenn irgend ein Paar von Focallinien, ein reelles oder ein imaginäres, gegeben ist. Die letzteren werden in den Ebenen der $\eta\zeta$ oder $\xi\eta$ construirt, indem man in 2) und 4) die Grösse i weglässt.

$$5)\qquad \begin{aligned} &\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-\beta}+\frac{z^2}{\lambda-\gamma}=1,\\ &\frac{x^2}{\mu}+\frac{y^2}{\mu-\beta}+\frac{z^2}{\mu-\gamma}=1,\\ &\frac{x^2}{\nu}+\frac{y^2}{\nu-\beta}+\frac{z^2}{\nu-\gamma}=1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gehören einem System von confocalen Flächen an, welches mit $(\lambda\,\mu\,\nu)$ bezeichnet werden soll $(\lambda > \gamma > \mu > \beta > \nu)$, und die sich im Punkte S schneiden. Betrachtet man denselben als Spitze eines Kegels, welcher das zu demselben System gehörige confocale Ellipsoid (λ'), dessen Gleichung also $\frac{x^2}{\lambda'} + \frac{y^2}{\lambda' - \beta} + \frac{z^2}{\lambda' - \gamma} = 1$ ist, in der Ellipse E berührt, so ist 1) die Gleichung dieses Tangentialkegels, wenn die Coordinaten ξ, η, ζ auf die durch S gehenden Normalen von (λ), (μ), (ν), welche zugleich die Axen des Kegels sind, bezogen werden.

Mit jeder von diesen Normalen fallen zwei Hauptkrümmungshalbmesser zusammen; wir bezeichnen diejenigen des Ellipsoids (λ) mit L und L', des einmantligen Hyperboloids (μ) mit M und M', und des zweimantligen mit N und N', so ist

$$6)\qquad L = \frac{1}{\pi}(\lambda - \mu)^{3/2}(\lambda - \nu)^{1/2}, \quad L' = \frac{1}{\pi}(\lambda - \mu)^{1/2}(\lambda - \nu)^{3/2},$$

$$7)\qquad M = \frac{1}{\pi'}(\lambda - \mu)^{1/2}(\mu - \nu)^{3/2}, \quad M' = \frac{1}{\pi'}(\lambda - \mu)^{3/2}(\mu - \nu)^{1/2},$$

$$8)\qquad N = \frac{1}{\pi''}(\lambda - \nu)^{3/2}(\mu - \nu)^{1/2}, \quad N' = \frac{1}{\pi''}(\lambda - \nu)^{1/2}(\mu - \nu)^{3/2};$$

$$\pi = \sqrt{\lambda(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)}, \quad \pi' = \sqrt{\mu(\mu - \beta)(\gamma - \mu)}, \quad \pi'' = \sqrt{\nu(\beta - \nu)(\gamma - \nu)}.$$

Wenn man diese Werthe mit 2), 3), 4) combinirt, so findet man

$$9)\qquad \eta = \pm i\sqrt{\frac{L}{L'}}\,\xi,$$

$$10)\qquad \zeta = \pm \sqrt{\frac{M}{M'}}\,\xi,$$

$$11)\qquad \xi = \pm i\sqrt{\frac{N}{N'}}\,\eta.$$

Nun giebt die Gleichung 10) die Richtung der (reellen) Erzeugenden des Hyperboloids (μ) an; da aber die beiden anderen Gleichungen 9) und 11) auf analoge Weise abgeleitet sind, so werden sie ebenfalls die Richtungen von Erzeugenden vorstellen, und zwar von den imaginären des Ellipsoids (λ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν). Man überzeugt sich hiervon auch durch Betrachtung der Dupin'schen Indicatrice $\frac{x^2}{\varrho} + \frac{y^2}{\varrho'} = 1$, wo ϱ und ϱ' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser in irgend einem Punkte einer Fläche sind und die Coordinaten x und y sich auf die Tangenten der Krümmungslinien beziehen, welche durch diesen Punkt gehen. Ist die Indicatrice eine Hyperbel, so giebt das Axenverhältniss $\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho'}}$ die Richtung der reellen Erzeugenden und, wenn sie eine Ellipse ist, der imaginären Erzeugenden der Fläche an.

Somit kann man den Satz von Chasles-Jacobi durch Ausdehnung auf die imaginären Focallinien und Erzeugenden also erweitern:

Die Focallinien des Systems von Kegeln, welche aus einem beliebigen Punkte S den Flächen eines confocalen Systems umschrieben werden, sind die Erzeugenden der drei durch S gehenden confocalen Flächen; die reellen Focallinien gehören dem einmantligen Hyperboloid an, die imaginären dem Ellipsoid und dem zweimantligen Hyperboloid.

Es wurde oben angenommen, dass der Kegel S die Fläche (λ') berühre; man würde aber durch die Tangentialkegel von (μ') oder (ν') auf dieselben Resultate gekommen sein.

Wir betrachten nun die Ellipse E als Focalellipse eines zweiten Systems (lmn) von confocalen Flächen:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{l}+\frac{y^2}{l-b}+\frac{z^2}{l-c}=1, \\ 12)\qquad &\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-b}+\frac{z^2}{m-c}=1, \\ &\frac{x^2}{n}+\frac{y^2}{n-b}+\frac{z^2}{n-c}=1, \end{aligned}$$

$l>c>m>b>n$, und nehmen an, dass sich die Flächen (l), (m), (n) ebenfalls in S schneiden. Die Halbaxen von E sind also $\sqrt{c}$ und $\sqrt{c^2-b^2}$.

Da der oben betrachtete Kegel S durch die Focalellipse E geht, welche als specielle confocale Fläche dem zweiten System angehört, so kann er auch für dieses letztere als Tangentialkegel angesehen werden und wird insofern der Gleichung

$$13)\qquad \frac{\xi^2}{l-c}+\frac{\eta^2}{m-c}+\frac{\zeta^2}{n-c}=0$$

entsprechen, wo die Coordinaten ξ, η, ζ auf dieselben Axen, wie in 1) bezogen sind. Diese Gleichung folgt aus 1), denn l, m, n sind die Halbaxen in der Richtung der x-Axe von drei confocalen Flächen, welche durch die Spitze S des Kegels gehen, und c ist die Halbaxe in derselben Richtung von der confocalen Fläche, nämlich der Focalellipse E, die der Kegel berührt. Demnach sind die Focallinien des Kegels S auch die reellen und imaginären Erzeugenden der Flächen (l), (m), (n), und je eine Fläche des ersten Systems $(\lambda\mu\nu)$ wird von einer Fläche des zweiten Systems (lmn) berührt. Ferner werden die Gleichungen 9), 10), 11) auch dann gelten, wenn man anstatt der Hauptkrümmungshalbmesser von $(\lambda\mu\nu)$ diejenigen von (lmn) setzt, welche wir mit $L_0\, L'_0\, M_0 \ldots$ bezeichnen. Man hat also die Relationen

$$14)\qquad \frac{L}{L'}=\frac{L_0}{L'_0},\quad \frac{M}{M'}=\frac{M_0}{M'_0},\quad \frac{N}{N'}=\frac{N_0}{N'_0}.$$

Die Werthe von L_0, L'_0, M_0, ... findet man aus 6), 7), 8), indem man die Grössen λ, μ, ν, β, γ durch l, m, n, b, c ersetzt. Hieraus folgt der Satz:

Wenn ein System von confocalen Flächen gegeben ist und man legt durch einen Punkt S im Raume einen Tangentialkegel, welcher eine dieser Flächen, z. B. das Ellipsoid, in einer Ellipse E berührt, so ist durch E als Focalellipse ein zweites System von Confocalen bestimmt: die drei durch S gehenden Confocalen des zweiten Systems haben mit je einer Confocale des ersten in diesem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung insofern, als nicht blos die Tangenten der Krümmungslinien, sondern auch die reellen oder imaginären Erzeugenden von je zwei sich berührenden Flächen zusammenfallen.

Liegt der Punkt S auf der Focalhyperbel des ersten Systems, so wird der Kegel S ein Rotationskegel; ferner ist $L = L_1 = L_0 = L'_0$, d. h. S ist ein Kreispunkt des Ellipsoids vom zweiten System.

In der Ebene hat man statt der Flächen $(\lambda \mu \nu)$ confocale Ellipsen und Hyperbeln; die Focalellipse E wird zur Polare von S; betrachtet man die Durchschnittspunkte derselben mit der Ellipse (λ') als Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel, welche durch S gehen, so haben diese in S die gleichen Krümmungshalbmesser, wie die Confocalen des ersten Systems.

Reutlingen. Dr. O. Böklen.

XVII. Geometrischer Satz.

Von Dr. F. Hocevar in Innsbruck.

Bezeichnet man

mit E_1, E_2, E_3 drei Ebenen, welche sich in einer geraden Linie schneiden,

mit f_1 die Fläche, welche von irgend einer geschlossenen Curve auf E_1 begrenzt wird,

mit f_2 die Projection dieser Fläche auf E_2 in einer zu E_3 parallelen und sonst beliebigen Richtung,

mit f_3 die Projection derselben Fläche auf E_3 in einer zu E_2 parallelen und sonst beliebigen Richtung,

mit K_1, K_2, K_3 die Volumina dreier Kegel, welche f_1, f_2, f_3 als Grundflächen und einen irgendwo im Raume gelegenen Punkt als gemeinsame Spitze haben,

endlich mit ε_1, ε_2, ε_3 die positive oder negative Einheit,

so ist stets

$$\varepsilon_1 K_1 = \varepsilon_2 K_2 + \varepsilon_3 K_3.$$

Die Werthe der Grössen ε werden in der folgenden Weise bestimmt: Man nimmt in einem der beiden von den Ebenen E_2 und E_3 gebildeten Winkelräume einen fixen Punkt O an und setzt für jedes ε die negative oder positive Einheit, je nachdem die gemeinschaftliche Kegelspitze sich mit dem Punkte O auf der gleichen oder auf der entgegengesetzten Seite bezüglich jener Ebene E befindet, welche mit demselben Index bezeichnet ist, wie die eben betrachtete Grösse ε.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.)

XVIII. Ueber die Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat.

(Hierzu Taf. IV Fig. 3.)

Wenn in einem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 3) die Höhe BC mehr als die Hälfte der Grundlinie AB beträgt, so kann dasselbe auf folgende Weise in drei Stücke zerlegt werden, die sich zu einem Quadrate zusammensetzen lassen. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, nehme $BE = BC$, errichte in E eine Senkrechte bis zum Durchschnitte F mit dem Halbkreise und ziehe AF bis zum Durchschnitte G mit CD. Das Rechteck $ABCD$ ist nun in die drei Stücke ABF, $BCGF$ und GDA zertheilt, welche sich zu dem Quadrate $BFMN$ zusammensetzen lassen, wenn das Viereck $BCGF$ längs der Geraden GA verschoben wird, bis G auf A fällt, und wenn nachher das Dreieck GDA nach BLN gelegt wird.

Beträgt die Höhe BC weniger als $\frac{1}{2}AB$, so verwandle man das Rechteck $ABCD$ in ein anderes mit den Seiten $\frac{1}{2}AB$ und $2BC$ und betrachte $2BC$ als Basis; die vorige Construction ist dann wieder anwendbar.

Soest. P. Schönemann.

X.

Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials.

Von

THEODOR HORN

in Leipzig.

(Schluss.)

---

§ 4.

Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$.

Wir bezeichnen die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$ mit $\Delta(xy)$ und definiren sie durch die Relation

$$\Delta(xy) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}\right)_a;$$

dabei ist über die Punkte i und a dasselbe zu sagen, was auf Seite 149 hierüber ausgesprochen wurde. Zur Berechnung von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$ benützen wir die Gleichung 6), die wir jetzt in der folgenden Form anwenden:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \frac{1}{E} \frac{\partial t}{\partial a} d\omega - \int t \frac{\partial c}{\partial a} \frac{c-z}{E^3} d\omega - J.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation nach y

$$16) \qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} = \int \frac{\partial t}{\partial a} \frac{b-y}{E^3} d\omega - 3 \int t \frac{\partial c}{\partial a} \frac{(b-y)(c-z)}{E^5} d\omega - \frac{\partial J}{\partial y}.$$

So lange z (und damit E) endlich bleibt, ist diese Formel zur Berechnung von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$ anwendbar; verschwindet aber z, so wird der Ausdruck unter dem zweiten Integral rechter Hand unendlich und damit das Integral selbst scheinbar unbestimmt. Wir formen daher, ehe wir z unendlich klein werden lassen, dasselbe um durch eine partielle Integration. Zu dem Ende bilden wir die identische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{c-z}{E^3}\right)$$
$$= -3t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{(b-y)(c-z)}{E^5} + \frac{\partial c}{\partial a}\frac{\partial c}{\partial b}\frac{E^2-3(c-z)^2}{E^5} + \frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}.$$

Lösen wir dieselbe nach dem ersten Gliede rechter Hand auf und substituiren den gefundenen Werth in das zweite Integral von 16), so erhalten wir

$$16') \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x\, \partial y} &= \int \frac{\partial t}{\partial a}\frac{b-y}{E^3}\,d\omega - \int t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{\partial b}{\partial a}\frac{E^2-3(c-z)^2}{E^5}\,d\omega \\ &- \int \frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\,d\omega + \int \frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{c-z}{E^3}\right)d\omega - \frac{\partial J}{\partial y}, \end{aligned}$$

wo sämmtliche Integrale mit Ausnahme des letzten zu erstrecken sind über ω, das letzte dagegen über die Grenze σ von ω.

Das vorletzte Integral der Gleichung 16') können wir in derselben Weise, wie das Integral J (S. 151) behandeln. Bezeichnen wir das zu transformirende Integral mit J'' und ersetzen wir darin $d\omega$ durch $da\,db$, so erhalten wir

$$J'' = \int \frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{c-z}{E^3}\right)d\omega = \int_{-a_1}^{a_2}\left\{\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\frac{c-z}{E^3}\right)db\right\}da.$$

Dieses Integral ist also von der Form J [7)] und ist ebenso, wie J zu erstrecken über den kleinen Theil der xy-Ebene ω. Nur haben wir hier statt der Grenzen $-b_1$ und b_2 als entsprechende Grenzen $-a_1$ und a_2, und statt der Integration in J nach b haben wir in J'' eine solche nach a. a_1 und a_2 sind jetzt positiv. Wir können daher J'' in ganz derselben Weise wie J in ein Linienintegral umwandeln, nur haben wir die a-Richtung mit der b-Richtung und x mit y zu vertauschen. Wir erhalten hiernach

$$J'' = -\int t\frac{\partial c}{da}\frac{c-z}{E^3}\cos(n', y)\,d\sigma,$$

worin n' wieder die nach innen positiv gerechnete Normale der in der xy-Ebene liegenden kleinen Curve σ ist.

Wir bezeichnen nun in der Gleichung 16') die drei ersten Integrale der Reihe nach mit K_1, K_2, K_3. Verstehen wir, analog der früheren Bezeichnungsweise, unter $(K_1)_a^i$ die sprungweise Aenderung von K_1, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche von der negativen zur positiven Seite durchschreitet, so wird mit Rücksicht auf 16')

$$16'') \qquad \Delta(xy) = (K_1)_a^i - (K_2)_a^i - (K_3)_a^i + (J'')_a^i - \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)_a^i.$$

Das erste Integral der Gleichung 16')

$$K_1 = \int \frac{\partial t}{\partial a} \frac{b-y}{E^3} d\omega = \int \left(\frac{\partial t}{\partial a}\gamma\right) \frac{b-y}{E^3} do$$

können wir auffassen als den ersten Differentialquotienten nach y von einem Potential, welches von einer Massenbelegung herrührt, die mit einer Dichtigkeit $\left(\frac{\partial t}{\partial a}\gamma\right)$ über das kleine Flächenstück o ausgebreitet ist. Da nun in allen dem Punkte O unendlich nahe liegenden Stellen $\left(\frac{\partial t}{\partial a}\gamma\right)$ endlich und stetig und ferner die y-Axe eine in O an die gegebene Fläche gelegte Tangente ist, so folgt nach einem bekannten Satze über das Flächenpotential*, dass das Integral K_1 endlich und stetig bleibt, wenn der Punkt (x, y, z) in O die gegebene Fläche durchschreitet. Also ist

$$(K_1)_a^i = 0.$$

Das zweite Integral der Gleichung 16')

$$K_2 = \int t \frac{\partial c}{\partial a} \frac{\partial c}{\partial b} \frac{E^2 - 3(c-z)^2}{E^5} d\omega$$

können wir in der Form schreiben

$$K_2 = \int \mu \frac{do}{E},$$

wo jetzt

$$\mu = q\left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right) \frac{\partial c}{\partial a} \frac{\partial c}{\partial b} \frac{1}{E^2}$$

ist. Aus der Untersuchung des ähnlichen Integrals J_2 folgte, dass der Factor

$$q\left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right)$$

innerhalb des Integrationsgebiets endlich bleibt; ferner sahen wir (S. 154), dass $\frac{\partial c}{\partial a}\frac{1}{E}$ immer endlich ist, wenn der Punkt $P(x\,y\,z)$ die gegebene Fläche in O in einer Richtung durchdringt, die mit der Tangentialebene (ab) einen von Null verschiedenen Winkel bildet. Ganz dasselbe muss auch von dem Ausdrucke $\frac{\partial c}{\partial b}\frac{1}{E}$ gelten, weil die Richtungen a und b in unserer Betrachtung ganz äquivalent sind. Wir finden also, dass der Ausdruck μ unter den angeführten Bedingungen für alle Stellen des Integrationsgebiets endlich bleibt, woraus durch eine analoge Schlussweise, wie bei der Behandlung von J_2 folgt

$$(K_2)_a^i = 0.$$

* Gauss, Allgemeine Lehrs., Art. 17.

Das dritte Integral der Gleichung 16′)

$$K_3 = \int \frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\,d\omega = \int \gamma\,\frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\frac{c-z}{E^3}\,do$$

ist von der Form 13) und besitzt daher eine Unstetigkeit von der Grösse

$$-4\pi\left[\gamma\frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right)\right]_{\substack{a=0\\ b=0}},$$

vorausgesetzt, dass der in eckige Klammern geschlossene Ausdruck für Punkte (a, b), die O unendlich nahe liegen, sich stetig ändert. Nun ist

$$\gamma\frac{\partial}{\partial b}\left(t\frac{\partial c}{\partial a}\right) = q\frac{\partial^2 c}{\partial a\,\partial b} + \gamma\frac{\partial t}{\partial b}\frac{\partial c}{\partial a}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen aber ändern sich $\frac{\partial t}{\partial b}$ und sämmtliche übrigen, in der letzten Gleichung auftretende Grössen in der unmittelbaren Nähe von O stetig, also geht der in eckige Klammern geschlossene Ausdruck für verschwindende a und b in stetiger Weise in einen bestimmten Grenzwerth über. Da nun nach den Formeln 2′) für $a=0$, $b=0$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial a\,\partial b} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial a} = 0$$

ist, so besitzt dieser Grenzwerth den Werth Null, d. h. es ist

$$(K_3)_a^i = 0.$$

Es erübrigt noch, die beiden letzten Glieder der Gleichung 16′) zu untersuchen. Mit Rücksicht auf die Umwandlung der Integrale J'' und J in Randintegrale und die darüber auf Seite 155 gemachten Bemerkungen ergiebt sich daher

$$(J'')_a^i = 0, \quad \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)_a^i = 0.$$

Fassen wir das Resultat für die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial y}$ zusammen, so finden wir, da die sämmtlichen K stetig sind,

$$17)\qquad \varDelta(xy) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial y}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial y}\right)_a = 0.$$

Wir sind bei der Untersuchung der Stetigkeit von $\frac{\partial_2 V_1}{\partial x\,\partial y}$ ausgegangen von der Gleichung 6) für $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Offenbar hätten wir zu demselben Resultat auf dem analogen Wege gelangen müssen, wenn wir von einer der Gleichung 6) ähnlichen Formel für $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ ausgegangen wären, weil die Grössen a und b, x und y in E u. s. w. ganz symmetrisch vorkommen.

§ 5.

Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$.

Setzen wir über die Punkte i und a wieder dasselbe voraus, wie früher, so können wir die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$ definiren durch die Relation

$$\Delta(z^2) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_a.$$

Zur Berechnung von $\Delta(z^2)$ bieten sich zwei Wege dar. Entweder können wir die fragliche Discontinuität berechnen mit Hilfe der Laplace'schen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0$$

unter gleichzeitiger Benutzung der bereits für $\Delta(x^2)$, $\Delta(y^2)$ gefundenen Werthe, oder wir können einen analogen Weg einschlagen, wie er zur Berechnung von $\Delta(x^2)$ etc. angewandt wurde, nämlich die Methode der partiellen Integration. Wir werden nacheinander beide Methoden durchführen.

Die Laplace'sche Gleichung gilt bekanntlich für alle Stellen des Raumes, die ausserhalb der einwirkenden Massen liegen, also auch für die Punkte i und a. Für diese Stellen erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_i + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}\right)_i + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_i = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}\right)_a + \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_a = 0.$$

Subtrahiren wir die zweite Gleichung von der ersten, so ergiebt sich

$$\Delta(x^2) + \Delta(y^2) + \Delta(z^2) = 0.$$

Nun war nach den Formeln 14) und 15)

$$\Delta(x^2) = \frac{4\pi q_0}{r_1}, \quad \Delta(y^2) = \frac{4\pi q_0}{r_2}.$$

Also wird

$$\text{18)} \qquad \Delta(z^2) = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Selbstverständlich gilt die Formel 18) nur dann, wenn r_1 und r_2, sowie q und seine ersten Ableitungen diejenigen Bedingungen erfüllen, die bei der Berechnung von $\Delta(x^2)$ und $\Delta(y^2)$ gemacht wurden, also nur dann, wenn für alle Punkte, die O unendlich nahe liegen, die Krümmung der Fläche, sowie q und seine ersten Ableitungen nach den Tangenten der Fläche in O endlich und stetig sind.

Wir berechnen nun $\Delta(z^2)$ auf dem zweiten, directen Wege. Da die Berechnung der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials nur dann einen Sinn hat, wenn sich für verschwindende x, y, z dieselben

einem bestimmten endlichen Grenzwerthe nähern oder, was dasselbe ist, wenn sie sich stetig ändern bei beliebigen Verrückungen der Punkte i und a, ohne dass dabei die gegebene Fläche durchschritten wird, so können wir hier von vornherein $x = y = 0$ setzen, denn Differentiationen nach x und y treten bei der auszuführenden Berechnung nicht auf.

Wenn der Punkt (x, y, z) nicht in der mit Masse belegten Fläche selbst liegt, ist $\frac{\partial V_1}{\partial z}$ identisch mit der Z-Componente der von den auf dem kleinen Flächenstück o gelegenen Massen auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Wirkung, so dass

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \int q \frac{c - z}{E^3} \, do.$$

Ersetzen wir do durch $\frac{1}{\gamma} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta$, so können wir auch schreiben

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_1} t \frac{c - z}{E^3} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta, \tag{19}$$

worin ϱ_1 den Werth bedeutet, den ϱ für Punkte der kleinen, den Punkt O umschliessenden Curve σ annimmt. Dieses Integral wird für verschwindende x, y und z scheinbar unbestimmt, weshalb wir es, bevor wir es nochmals nach z differentiiren, durch eine partielle Integration umformen. Zu dem Ende bilden wir die identische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(t \frac{c - z}{E}\right) = \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{c - z}{E} + t \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{1}{E} - t \frac{c - z}{E^3}\left(\varrho + (c - z) \frac{\partial c}{\partial \varrho}\right),$$

woraus folgt

$$t \frac{c - z}{E^3} \varrho = \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{c - z}{E} - \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(t \frac{c - z}{E}\right) + t \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho^2}{E^3}.$$

Wir bilden ferner, um das letzte Glied dieser Gleichung weiter umzuformen, den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(t \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{E}\right) = \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{E} + \frac{t}{E}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varrho^2} \varrho + \frac{\partial c}{\partial \varrho}\right) - t \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho + (c - z) \frac{\partial c}{\partial \varrho}}{E^3} \varrho.$$

Lösen wir diese Gleichung nach dem Gliede $t \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho^2}{E^3}$ auf und substituiren diesen Werth in die vorhergehende Formel, so können wir mit Hilfe des so für $t \frac{c - z}{E^3} \varrho$ erhaltenen Ausdrucks die Gleichung 19) jetzt schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial z} = & \iint \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{c - z}{E} \, d\varrho \, d\vartheta + \iint \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{\partial c}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{E} \, d\varrho \, d\vartheta \\ & + \iint \frac{t}{E}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varrho^2} \varrho + \frac{\partial c}{\partial \varrho}\right) d\varrho \, d\vartheta - \iint t \left(\frac{\partial c}{\partial \varrho}\right)^2 \frac{c - z}{E^3} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \\ & - \iint \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{t}{E}\left((c - z) + \frac{\partial c}{\partial \varrho} \varrho\right)\right) d\varrho \, d\vartheta, \end{aligned} \tag{20}$$

worin sämmtliche Integrale über ϑ von 0 bis 2π und über ϱ von 0 bis ϱ_1 zu erstrecken sind.

Das letzte Integral dieser Formel, welches wir mit L bezeichnen, lässt sich theilweise ausführen; wir erhalten

$$L=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{t}{E}\left(c-z+\frac{\partial c}{\partial\varrho}\varrho\right)\right)d\varrho\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{t}{E}\left(c-z+\frac{\partial c}{\partial\varrho}\varrho\right)\right]_0^{\varrho_1}d\vartheta.$$

Für $\varrho=0$ geht t über in q_0 und E in $\pm(c-z)$, wo das Vorzeichen von $(c-z)$ so zu wählen ist, dass E positiv wird. Daher können wir schreiben

$$L=\int_0^{2\pi}\left[\frac{t}{E}\left(c-z+\frac{\partial c}{\partial\varrho}\varrho\right)\right]_{\varrho_1}d\vartheta\pm 2\pi q_0,$$

wo das positive oder negative Vorzeichen von $2\pi q_0$ gilt, je nachdem z einen unendlich kleinen positiven oder negativen Werth besitzt.

Um nun mit Hilfe der Formel 20) $\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$ zu bilden, haben wir dieselbe nochmals nach z zu differentiiren. Wir nehmen die Differentiation einzeln unter sämmtlichen Integralen dieser Formel vor (da sie nicht unbestimmt werden für verschwindende x, y und z). — Der Ausdruck unter dem Integral L kann, da ϱ_1 endlich ist, niemals unendlich werden. Wir können daher schreiben

$$21)\qquad \frac{\partial L}{\partial z}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\varrho^2+(c-z)\frac{\partial c}{\partial\varrho}\varrho\right)\frac{t}{E^3}\right]_{\varrho_1}d\vartheta.$$

Mit Rücksicht auf frühere, über Randintegrale gemachte Bemerkungen (S. 155) ist aber dieses Integral endlich und stetig, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet.

Wir untersuchen nun in analoger Weise diejenigen Integrale der Gleichung 20), die sich nicht in Randintegrale verwandeln lassen. Das erste Integral dieser Formel

$$L_1=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1}\frac{\partial t}{\partial\varrho}\,\frac{c-z}{E}\,d\varrho\,d\vartheta$$

bleibt endlich und bestimmt, weil $\frac{\partial t}{\partial\varrho}$ endlich und absolut genommen $\frac{c-z}{E}\leqq 1$ ist. Differentiiren wir dasselbe nochmals nach z, so erhalten wir

$$\frac{\partial L_1}{\partial z}=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1}\frac{\partial t}{\partial\varrho}\,\frac{\varrho^2}{E^3}\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Um nun zu untersuchen, ob dieses Integral endlich und stetig bleibt, wenn z verschwindet und sein Vorzeichen ändert, zerlegen wir es in der folgenden Weise:

$$-\frac{\partial L_1}{\partial z} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\delta} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,\frac{\varrho^2}{E^3}\,d\varrho\,d\vartheta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_{\delta}^{\varrho_1} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,\frac{\varrho^2}{E^3}\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Hierbei wählen wir δ so unendlich klein, dass es noch unendlich gross gegen z bleibt, und dass das zweite Integral der letzten Formel, welches über ϱ von δ bis ϱ_1 erstreckt ist, noch einen endlichen Werth erhält. Das Letztere ist immer möglich. Ist aber dieses Integral endlich, so bleibt es nach einer mehrfach angewandten Schlussweise auch stetig. Wir untersuchen daher nur

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\delta} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,\frac{\varrho^2}{E^3}\,d\varrho\,d\vartheta.$$

Wir substituiren hierin für $\frac{\varrho^2}{E^3}$ eine Reihenentwickelung. Setzen wir zur Abkürzung $\varrho^2 + z^2 = g^2$ und berücksichtigen wir, dass für unendlich kleine ϱ nach Formel 1')

$$c = \frac{\varrho^2}{2r}$$

gesetzt werden kann, so können wir schreiben

$$E^2 = \varrho^2 + (c - z)^2 = g^2\left(1 - \frac{(4rz - \varrho^2)\,\varrho^2}{4r^2 g^2}\right),$$

so dass wir folgende nach steigenden Potenzen des letzten Gliedes fortschreitende Reihenentwickelung aufstellen können:

$$21') \qquad \frac{\varrho^2}{E^3} = \frac{\varrho^2}{g^3} + \frac{3}{8}\,\frac{(4rz - \varrho^2)\,\varrho^4}{r^2 g^5} + \ldots = \frac{\varrho^2}{g^3} + R,$$

wo wir unter R die Summe sämmtlicher Glieder der Reihenentwickelung mit alleiniger Ausnahme des ersten verstehen. Das erste Glied dieser Reihe 21') wird für unendlich kleine ϱ und z unendlich gross; dagegen ist leicht zu sehen, dass das zweite Glied in diesem Falle endlich bleibt und die folgenden Glieder sogar unendlich klein werden, d. h. dass R immer endlich bleibt. Berücksichtigen wir ferner, dass auch $\frac{\partial t}{\partial \varrho}$ innerhalb des Integrationsgebiets endlich ist, so folgt, dass das letzte Integral der Formel

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\delta} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,\frac{\varrho^2}{E^3}\,d\varrho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\delta} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,\frac{\varrho^2}{g^3}\,d\varrho\,d\vartheta + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\delta} \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,R\,d\varrho\,d\vartheta$$

unendlich klein bleibt auch für unendlich kleine z, denn die Integration nach ϱ erstreckt sich blos von Null bis zu der unendlich kleinen Grösse δ

Wir haben daher nur das erste Integral rechter Hand weiter zu betrachten. Zu dem Ende bilden wir die Relation

$$\frac{\partial t}{\partial \varrho}=\frac{\partial t}{\partial a}\cos\vartheta+\frac{\partial t}{\partial b}\sin\vartheta,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 4')

$$\frac{\partial t}{\partial \varrho}=q_1\cos\vartheta+q_2\sin\vartheta+\psi(\varrho,\vartheta),$$

wo $\psi(\varrho, \vartheta)$ eine solche Function von ϱ und ϑ ist, die mit ϱ unendlich klein wird von der Ordnung ϱ. Das zu betrachtende Integral zerfällen wir nun in die folgenden zwei Integrale:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{\partial t}{\partial \varrho}\frac{\varrho^2}{g^3}\,d\varrho\,d\vartheta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}(q_1\cos\vartheta+q_2\sin\vartheta)\frac{\varrho^2}{g^3}\,d\varrho\,d\vartheta+\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\psi(\varrho,\vartheta)\frac{\varrho^2}{g^3}\,d\varrho\,d\vartheta,$$

von denen das letzte unendlich klein ist, weil $\psi(\varrho, \vartheta)$ von der Ordnung ϱ, also $\psi(\varrho, \vartheta)\frac{\varrho^2}{g^3}$ endlich ist und in Bezug auf ϱ nur über eine unendlich kleine Strecke integrirt wird. Das erste Integral (rechter Hand) der letzten Formel ist von der Form

$$\int_0^{2\pi}(A\cos\vartheta+B\sin\vartheta)\,d\vartheta,$$

wo A und B von ϑ unabhängig sind, denn q_1 und q_2 sind Constante. Ein solches Integral besitzt aber den Werth Null.

Fassen wir alles in Bezug auf $\frac{\partial L_1}{\partial z}$ Gesagte zusammen, so finden wir, dass dieser Ausdruck endlich und stetig bleibt, wenn der Punkt P die gegebene Fläche in O durchschreitet.

Das zweite Integral der Formel 20)

$$L_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1}\frac{\partial t}{\partial \varrho}\frac{\partial c}{\partial \varrho}\frac{\varrho\,d\varrho\,d\vartheta}{E}=\int\left(\gamma\frac{\partial t}{\partial \varrho}\frac{\partial c}{\partial \varrho}\right)\frac{do}{E}$$

können wir auffassen als das Potential einer Massenbelegung, die mit einer Dichtigkeit $\gamma\frac{\partial t}{\partial \varrho}\frac{\partial c}{\partial \varrho}$ auf dem kleinen Flächenstück o ausgebreitet ist. Nun sind γ und $\frac{\partial t}{\partial \varrho}$ endlich und stetig für alle Punkte der Fläche, die O unendlich nahe liegen; ferner ist $\frac{\partial c}{\partial \varrho}$ von der Ordnung ϱ. Mit

Rücksicht auf frühere Bemerkungen (S. 148) ist für unendlich kleine ϱ bis auf Unendlichkleines höherer Ordnung genau

$$2rc = a^2 + b^2 = \varrho^2;$$

daher muss in der unmittelbaren Umgebung von O

$$\frac{\partial c}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial \varrho^2} = \frac{1}{r} \tag{22}$$

werden, wo r den auf den Punkt O bezogenen Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes der gegebenen Fläche bezeichnet, der die Strecke ϱ enthält. Wir finden also, dass der Ausdruck $\gamma \frac{\partial t}{\partial \varrho} \frac{\partial c}{\partial \varrho}$ mit verschwindendem ϱ in stetiger Weise zu Null abnimmt. Nach bekannten Potentialsätzen* folgt dann, dass L_2, sowie $\frac{\partial L_2}{\partial z}$ endlich und stetig bleiben, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet.

Wir untersuchen nun das dritte Integral der Gleichung 20)

$$L_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1} \frac{t}{E}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varrho^2}\varrho + \frac{\partial c}{\partial \varrho}\right) d\varrho\, d\vartheta.$$

Nun nähert sich nach den Formeln 22) mit abnehmendem ϱ in stetiger Weise $\frac{\partial c}{\partial \varrho}$ dem Ausdrucke $\frac{\varrho}{r}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial \varrho^2}$ der Grösse $\frac{1}{r}$; wir können daher, wenn wir unter $\psi(\varrho, \vartheta)$ eine mit ϱ stetig verschwindende Function von ϑ und ϱ verstehen, jetzt schreiben

$$L_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1} \frac{t}{r}\,(2 + \psi(\varrho, \vartheta))\,\frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{E}.$$

Da $\frac{\varrho}{E} \leqq 1$ ist, so kann der Ausdruck unter dem Integral nicht unendlich und das Integral selbst nicht unbestimmt werden. Wir haben nun L_3 nochmals nach z zu differentiiren und erhalten hierdurch

$$\frac{\partial L_3}{\partial z} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1} \frac{t}{r}(2 + \psi(\varrho, \vartheta))\,\frac{c - z}{E^3}\,\varrho\, d\varrho\, d\vartheta$$

oder

$$\frac{\partial L_3}{\partial z} = 2\int \frac{q}{r}\,\frac{c - z}{E^3}\,do + \int \frac{q}{r}\,\psi(\varrho, \vartheta)\,\frac{c - z}{E^3}\,do, \tag{23}$$

wo beide Integrale auszudehnen sind über das kleine Flächenstück o. Da ferner beide Integrale von der Form 13) sind, so lassen sich ihre Unstetigkeiten nach bekannter Regel angeben. Im zweiten Integrale ver-

* Entsprechend den Formeln 11) und 13).

schwindet $\psi(\varrho, \vartheta)$ mit ϱ in stetiger Weise, q und r bleiben endlich, daher ist dasselbe endlich und stetig. Die Unstetigkeit des ersten Integrals der letzten Formel würde nach der allgemeinen Regel $-4\pi\left[\frac{2q}{r}\right]_{\varrho=0}$ betragen. Da aber hier r für $\varrho = 0$ noch Function von ϑ bleibt, also $\left[\frac{2q}{r}\right]_{\varrho=0}$ unendlich viele Werthe annehmen kann, so müssen wir zur Aufsuchung des resultirenden Mittelwerthes noch eine weitere Untersuchung anstellen.

Wir ersetzen $\frac{1}{r}$ im ersten Integral der letzten Formel nach 1) durch

$$\frac{\cos^2\vartheta}{r_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_2},$$

so dass

$$\int \frac{q}{r}\,\frac{c-z}{E^3}\,do = \int q\left(\frac{\cos^2\vartheta}{r_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_2}\right)\frac{c-z}{E^3}\,do$$

wird. Um diese über das kleine Flächenstück o zu erstreckende Integration auszuführen, denken wir uns um den Punkt $i(o, o, z)$ (Fig. 5) eine Hilfskugelfläche vom Radius Eins gelegt, so dass i der Mittelpunkt dieser Kugel wird. Wir denken uns ferner das kleine Flächenstück o so in Elemente do zerlegt, dass die senkrechte Projection auf die xy-Ebene eines solchen Elements begrenzt wird von je zwei einander unendlich nahen Curven $\varrho = Const.$ und $\vartheta = Const.$ Ein solches Flächenelement do werde nun aus der kleinen Fläche o ausgeschnitten durch eine unendlich dünne Pyramide, die ihre Spitze in i hat und die von der eingeführten Hilfskugelfläche das Element dv ausschneidet. Aus Fig. 5 ist dann unmittelbar ersichtlich, dass

$$\pm\, dv = \frac{do\, \cos(n, E)}{E^2}$$

sein muss. Wenn wir die Flächennormale n so positiv wählen, dass eine nach derselben Seite der Fläche im Punkte O errichtete Flächennormale gleichgerichtet ist mit der positiven z-Axe, so gilt das obere oder untere Vorzeichen von dv, je nachdem $\cos(n, E)$ positiv oder negativ ist.

Da es bei der Untersuchung der Unstetigkeit des betrachteten Integrals offenbar nur auf die Theile ankommt, die dem Punkte O unendlich naheliegenden Punkten entsprechen, so denken wir uns das Integral vorläufig* nur erstreckt über solche Elemente do, für welche $0 \leqq \varrho \leqq \delta$ ist, wo δ eine unendlich kleine Grösse bedeutet, die aber noch unendlich gross gegen z ist. Bei den über die Krümmung der gegebenen Fläche gemachten Voraussetzungen bildet die Normale n des Elements

* Lässt man nachträglich $\delta = \varrho_1$ werden, so ändert man zwar das betrachtete Integral um eine endliche Grösse, aber nicht die Unstetigkeit desselben.

do mit der z-Axe einen unendlich kleinen Winkel, es ist dann bis auf Unendlichkleines genau

$$cos(n, E) = cos(z, E);$$

da nun nach Fig. 5 ferner

$$cos(z, E) = \frac{c-z}{E},$$

so wird

$$\mp dv = \frac{c-z}{E^3} do,$$

wo für Elemente do, die dem Punkte O unendlich nahe liegen und für welche $abs\, c < abs\, z$ ist, das obere oder untere Vorzeichen von dv gilt, je nachdem z positiv oder negativ ist. Wir erhalten demnach

$$\int \frac{q}{r} \frac{c-z}{E^3} do = \mp \int q \left(\frac{cos^2 \vartheta}{r_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{r_2}\right) dv.$$

Endlich können wir in diesem Integral, welches nur über einen unendlich kleinen, den Punkt O unmittelbar umgebenden Theil der Fläche o zu erstrecken ist, statt q setzen q_0, denn q sollte sich an der betrachteten Stelle stetig ändern. Daher wird

$$\int \frac{q}{r} \frac{c-z}{E^3} do = \mp q_0 \int \left(\frac{cos^2 \vartheta}{r_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{r_2}\right) dv.$$

Wir summiren zunächst über ein unendlich schmales Dreieck der Hilfskugelfläche, welches ausgeschnitten wird von zwei Meridianebenen, die die Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ mit der x-Axe bilden. Bezeichnen wir die Poldistanz (in Bezug auf A, Fig. 5) des Elements dv mit σ, so ist über σ zu integriren von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, weil ϱ wächst von 0 bis δ und δ unendlich gross gegen c und z ist. Der Flächeninhalt dieses unendlich schmalen Dreiecks der Hilfskugelfläche beträgt daher, da der Radius derselben gleich Eins ist, $d\vartheta$. Wir können daher schreiben

$$\int \frac{q}{r} \frac{c-z}{E^3} do = \mp q_0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{cos^2 \vartheta}{r_1} + \frac{sin^2 \vartheta}{r_2}\right) d\vartheta,$$

d. i.

$$= \mp q_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \pi,$$

worin das obere Vorzeichen gilt, wenn z positiv, und das untere, wenn z negativ ist.

Da in Formel 23) ausser der gefundenen Unstetigkeit des ersten Integrals sich eine weitere Discontinuität nicht ergeben hat, so finden wir die Relation

$$24) \qquad \left(\frac{\partial L_3}{\partial z}\right)_i - \left(\frac{\partial L_3}{\partial z}\right)_a = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Endlich bleibt noch zu untersuchen in Gleichung 20) das Integral

$$L_4 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_1} t\left(\frac{\partial c}{\partial \varrho}\right)^2 \frac{c-z}{E^3}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Wir differentiiren (indem wir z vorläufig noch als endlich voraussetzen) dieses Integral nach z und erhalten

$$\frac{\partial L_4}{\partial z} = \int\int t\left(\frac{\partial c}{\partial \varrho}\right)^2 \left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right) \frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{E^2} = \int \mu \frac{do}{E},$$

wo

$$\mu = q\left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right)\left(\frac{\partial c}{\partial \varrho}\frac{1}{E}\right)^2$$

zu setzen ist. Nun wissen wir durch die Untersuchung des Integrals J_2 (S. 153), dass der Ausdruck

$$q\left(1 - 3\left(\frac{c-z}{E}\right)^2\right)$$

innerhalb des Integrationsgebietes immer endlich bleibt; μ kann daher nur mit

$$\frac{\partial c}{\partial \varrho}\frac{1}{E}$$

unendlich gross werden, also nur für unendlich kleine ϱ und z. Nun ist für unendlich kleine ϱ nach 1')

$$\frac{\partial c}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r};$$

daher bleibt

$$\frac{\partial c}{\partial \varrho}\frac{1}{E} = \frac{1}{r}\frac{\varrho}{E}$$

immer endlich, da $\varrho \leq E$, und r ein endlicher Krümmungsradius ist. Wir finden also, dass μ einen endlichen Werth besitzt in allen Punkten der Fläche, die O unendlich nahe liegen; daher folgt in bekannter Weise, dass sich das Integral

$$\frac{\partial L_4}{\partial z} = \int \mu \frac{do}{E}$$

stetig ändert, wenn der Punkt P die gegebene Fläche in O durchschreitet.

Fassen wir die Unstetigkeiten von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$ nach der Formel 20) zusammen, so ergiebt sich, da nur 24) eine Discontinuität liefert,

$$25)\qquad \Delta(z^2) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)_a = -4\pi q_0\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Wir sind somit zu demselben Resultat gelangt, das wir auf Seite 161 mit Hilfe der Laplace'schen Gleichung auf kürzerem Wege erhalten haben.

§ 6.

Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z}$.

Wir untersuchen zunächst die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$ und definiren sie durch die Relation

$$\Delta(xz) = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}\right)_a,$$

wo über die Lage der Punkte i und a wieder dasselbe vorauszusetzen ist, was Seite 149 darüber gesagt wurde. Wir gehen nun aus von dem Werthe $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, wie er sich aus 6) unter Benutzung von 8) ergiebt:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \frac{1}{E} \frac{\partial t}{\partial a} d\omega - \int t \frac{\partial c}{\partial a} \frac{c-z}{E^3} d\omega - J.$$

Hierin sind das erste und zweite Integral auszudehnen über die senkrechte Projection ω des kleinen Flächenstücks o auf die xy-Ebene, das dritte über die Grenzcurve σ der Fläche ω. Um nun $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$ zu bilden, differentiiren wir obige Gleichung nochmals nach z, wobei wir im ersten Gliede die Differentiation unter dem Integralzeichen vornehmen. Ersetzen wir ferner $d\omega$ durch $\gamma\, do$, so erhalten wir

$$26)\qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} = \int \left(\gamma \frac{\partial t}{\partial a}\right) \frac{c-z}{E^3} do - \frac{\partial}{\partial z} \int \left(q \frac{\partial c}{\partial a}\right) \frac{c-z}{E^3} do - \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Das erste Integral M_1 der Gleichung 26) ist von der Form 13) und besitzt daher die Unstetigkeit

$$-4\pi \left[\gamma \frac{\partial t}{\partial a}\right]_{\substack{a=0\\b=0}}.$$

Der Ausdruck $\left[\gamma \frac{\partial t}{\partial a}\right]$ nähert sich aber mit verschwindendem a und b [mit Rücksicht auf die Formeln 3) und 4')] der Grösse q_1 stetig, so dass wir erhalten

$$(M_1)_i - (M_1)_a = -4\pi q_1.$$

Das zweite Glied der Gleichung 26)

$$M_a = \frac{\partial}{\partial z} \int \left(q \frac{\partial c}{\partial a}\right) \frac{c-z}{E^3} do = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \left(q \frac{\partial c}{\partial a}\right) \frac{do}{E}$$

ist aufzufassen als der zweite Differentialquotient nach z von einem Potential, das herrührt von Massen, die auf dem kleinen Flächenstück o mit der Dichtigkeit $q \frac{\partial c}{\partial a}$ ausgebreitet sind. Da der Ausdruck $q \frac{\partial c}{\partial a}$ für Stellen, die dem Coordinatenanfangspunkte O unendlich nahe liegen, sowie seine ersten Ableitungen nach a und b endlich und stetig sind,

so erfüllt er alle die Voraussetzungen, unter denen die Formel 25) für $\Delta(z^2)$ gilt. M_2 erleidet daher, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche durchschreitet, eine sprungweise Aenderung

$$(M_2)_i - (M_2)_a = -4\pi \left[q \frac{\partial c}{\partial a} \right]_{\substack{a=0\\b=0}} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0,$$

denn $\frac{\partial c}{\partial a}$ wird für $a = 0$, $b = 0$ gleich Null und die übrigen in der letzten Formel auftretenden Grössen bleiben endlich.

Das letzte Glied der Gleichung 26) ist ein Randintegral und kann nach früher gemachten Bemerkungen nicht unstetig werden. Da in 26) nur M_1 eine Unstetigkeit erleidet, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet, so finden wir

27) $\Delta(xz) = -4\pi q_1$ und in analoger Weise $\Delta(yz) = -4\pi q_2$.

§ 7.

Discontinuität des nach beliebigen Richtungen genommenen zweiten Differentialquotienten.

Mit Hilfe der für specielle Richtungen gefundenen Discontinuitäten können wir leicht diejenigen sprungweisen Aenderungen bestimmen, welche die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \, \partial p_1}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$$

erleiden, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche im Punkte O durchschreitet, vorausgesetzt, dass wir unter p und p_1 zwei ganz beliebige Richtungen verstehen. Bezeichnen wir die Cosinus der Winkel, welche die Richtungen p und p_1 mit den Coordinatenaxen bilden, mit resp.

$$\lambda, \ \mu, \ \nu; \quad \lambda_1, \ \mu_1, \ \nu_1,$$

so wird

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \lambda, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \mu, \quad \frac{\partial z}{\partial p} = \nu,$$
$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = \lambda_1, \quad \frac{\partial y}{\partial p_1} = \mu_1, \quad \frac{\partial z}{\partial p_1} = \nu_1,$$

und wir können dann, so lange wir den Punkt (x, y, z) nicht in die mit Masse belegte Fläche fallen lassen, wegen der Stetigkeit von V und seiner Derivirten, die Relation bilden

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial x} \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} \mu + \frac{\partial V}{\partial z} \nu.$$

Diese Gleichung differentiiren wir nochmals, und zwar nach der beliebigen Richtung p_1, wobei λ, μ, ν als Constante zu betrachten sind, und erhalten

$$28)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\lambda\lambda_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\mu\mu_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\nu\nu_1 \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}(\mu\nu_1+\nu\mu_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}(\nu\lambda_1+\lambda\nu_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}(\lambda\mu_1+\mu\lambda_1). \end{aligned}$$

Ist nun

$$\varDelta(pp_1) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1}\right)_i - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1}\right)_a$$

und haben die Punkte i und a die auf Seite 149 angenommene Lage, so bedeutet $\varDelta(pp_1)$ die sprungweise Aenderung, welche $\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1}$ erleidet, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche im Punkte O von der negativen zur positiven Seite durchschreitet. Berücksichtigen wir, dass wir in unserem Falle in den Ausdrücken für $\varDelta(x^2)$, $\varDelta(xy)$, ... statt V_1 immer V setzen können, so erhalten wir jetzt aus 28)

$$28')\quad \begin{aligned} \varDelta(pp_1) &= \varDelta(x^2)\lambda\lambda_1 + \varDelta(y^2)\mu\mu_1 + \varDelta(z^2)\nu\nu_1 \\ &+ \varDelta(yz)(\mu\nu_1+\nu\mu_1) + \varDelta(zx)(\nu\lambda_1+\lambda\nu_1) + \varDelta(xy)(\lambda\mu_1+\mu\lambda_1) \end{aligned}$$

als den allgemeinsten Ausdruck für die Discontinuität des zweiten Differentialquotienten des betrachteten Oberflächenpotentials. Hierin ist nach den Formeln 14), 15), 17), 18), 27) zu setzen

$$\varDelta(x^2) = \frac{4\pi q_0}{r_1}, \qquad \varDelta(y^2) = \frac{4\pi q_0}{r_2}, \qquad \varDelta(z^2) = -4\pi q_0\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$
$$\varDelta(yz) = -4\pi q_2, \quad \varDelta(zx) = -4\pi q_1, \quad \varDelta(xy) = 0.$$

Wir gelangen somit zu dem folgenden **Resultat**:

„Ist eine beliebige Fläche gegeben, die mit einer endlichen Gesammtmasse belegt ist, und versteht man unter V das Potential dieser Belegung in Bezug auf einen beliebigen Raumpunkt, so ist für jede Stelle der Fläche, in welcher sowohl die Flächenkrümmung, als auch die Flächendichtigkeit, sowie deren erste Ableitungen nach den Tangenten der Fläche an dieser Stelle endlich und stetig sind, die sprungweise Aenderung von $\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1}$, wenn der Punkt, auf welchen V bezogen ist, die gegebene Fläche im Coordinatenanfangspunkte von der negativen zur positiven Seite durchschreitet, gegeben durch die Gleichung

$$29)\quad \varDelta(pp_1) = 4\pi\left\{q_0\left(\frac{\lambda\lambda_1-\nu\nu_1}{r_1}+\frac{\mu\mu_1-\nu\nu_1}{r_2}\right) - q_1(\lambda\nu_1+\nu\lambda_1) - q_2(\mu\nu_1+\nu\mu_1)\right\}.$$

Hierin bedeuten p und p_1 zwei beliebige Richtungen mit den resp. Richtungscosinus λ, μ, ν; λ_1, μ_1, ν_1, q_0 die Flächendichtigkeit und q_1 und q_2 die ersten Ableitungen derselben nach den Tangenten der beiden Krümmungslinien, bezogen auf den Coordinatenanfangspunkt; endlich r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der gegebenen Fläche an der Durchgangsstelle. Dabei sind r_1 und r_2 positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des betreffenden Hauptschnittes

der Fläche auf der positiven oder negativen Seite der gegebenen Fläche liegt."

Von Wichtigkeit sind die beiden Fälle, dass die Richtungen p und p_1 zusammenfallen oder senkrecht auf einander stehen. Im ersteren Falle erhalten wir die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$, nämlich

$$29')\qquad \varDelta(p^2) = 4\pi\left\{q_0\left(\frac{\lambda^2-\nu^2}{r_1}+\frac{\mu^2-\nu^2}{r_2}\right)-2\nu(\lambda q_1+\mu q_2)\right\}.$$

Wir können den Ausdrücken 29) und 29') noch eine etwas einfachere Gestalt geben, wenn wir alle Grössen auf eine durch die Flächennormale an der Durchgangsstelle und die Richtung p gelegte Ebene beziehen. Wir denken uns also von der Durchgangsstelle O aus einen Strahl p ausgehend, legen durch denselben und die Flächennormale in O eine Ebene E und bezeichnen den Schnitt derselben mit der in O an die gegebene Fläche gelegten Tangentialebene mit t. Dann ergiebt sich zunächst die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, die wir $\varDelta(t^2)$ nennen wollen, aus 29'), wenn wir darin $\nu = 0$ setzen. Wir erhalten also

$$30)\qquad \varDelta(t^2) = 4\pi q_0\left(\frac{\lambda^2}{r_1}+\frac{\mu^2}{r_2}\right) = 4\pi q_0\frac{1}{r},$$

wo r den Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes in O bezeichnet, welcher t zur Tangente hat. Wir finden demnach für $\varDelta(t^2)$ ein ganz analoges Resultat, wie für $\varDelta(x^2)$ und $\varDelta(y^2)$. — Ferner bestimmen wir die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}$, die wir mit $\varDelta(zt)$ bezeichnen, und zwar mit Hilfe der Gleichung 29), indem wir darin

$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu = 1;\quad \nu_1 = 0$$

setzen. Wir erhalten dann

$$31)\qquad \varDelta(zt) = -4\pi(q_1\lambda_1+q_2\mu_1) = -4\pi q',$$

wo unter q' der Werth zu verstehen ist, den $\frac{\partial q}{\partial t}$ im Punkte O besitzt. Wir erhalten somit für $\varDelta(zt)$ ein ganz analoges Resultat, wie für $\varDelta(zx)$ und $\varDelta(zy)$.

Bezeichnen wir den Cosinus des Winkels, den die Richtung p mit der in derselben Normalebene der gegebenen Fläche liegenden Tangente t bildet, mit τ, so erhalten wir auf demselben Wege, wie er zur Ableitung der Formel 28') in Anwendung gebracht wurde, den Ausdruck

$$\varDelta(p^2) = \varDelta(z^2)\nu^2 + 2\varDelta(zt)\nu\tau + \varDelta(t^2)\tau^2.$$

Nun ist $\varDelta(z^2) = -4\pi q_0\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) = -4\pi q_0 k$, wo $k = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ eine der Durchgangsstelle eigenthümliche Constante ist. Setzen wir noch für

$\Delta(zt)$ und $\Delta(t^2)$ die oben gefundenen Werthe in die Formel für $\Delta(p^2)$ ein, so erhalten wir

$$32)\qquad \Delta(p^2) = 4\pi \left\{ q_0 \left(\frac{\tau^2}{r} - k\nu^2 \right) - 2q'\nu\tau \right\},$$

oder wenn wir den Winkel, den p mit der z-Axe bildet, φ nennen, so wird

$$32')\qquad \Delta(p^2) = 4\pi \left\{ q_0 \left(\frac{\sin^2\varphi}{r} - k\cos^2\varphi \right) - q'\sin 2\varphi \right\}.$$

Einen ähnlichen Ausdruck finden wir für $\Delta(pp_1)$, wenn die Richtungen p und p_1 senkrecht auf einander stehen und beide in ein und derselben Normalebene E gelegen sind. Bezeichnen wir den Cosinus des Winkels (p_1, t) mit τ_1, so wird

$$\Delta(pp_1) = \Delta(z^2)\nu\nu_1 + \Delta(t^2)\tau\tau_1 + \Delta(zt)(\nu\tau_1 + \nu_1\tau).$$

Setzen wir die Werthe für $\Delta(z^2)$, $\Delta(t^2)$ und $\Delta(zt)$ ein und berücksichtigen wir, dass jetzt, wenn der Winkel $(p, z) = \varphi$ ist,

$$\nu = \cos\varphi, \quad \nu_1 = \sin\varphi; \quad \tau = \sin\varphi, \quad \tau_1 = -\cos\varphi$$

wird, so erhalten wir schliesslich

$$33)\qquad \Delta(pp_1) = -2\pi \left\{ q_0 \left(k + \frac{1}{r} \right) \sin 2\varphi - 2q'\cos 2\varphi \right\}.$$

§ 8.

Weitere Eigenschaften der gefundenen Discontinuitäten.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welcher Weise sich die Discontinuitäten des betrachteten Oberflächenpotentials ändern, wenn man die Richtungen ändert, nach denen differentiirt worden ist, und zu fragen, ob es solche Richtungen giebt, nach denen genommen der zweite Differentialquotient k e i n e sprungweise Aenderung erleidet, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet Wir werden zunächst die Aenderung von $\Delta(p^2)$ betrachten.

Denken wir uns die Richtung p dargestellt durch eine von O ausgehende Gerade (Fig. 6), so können wir den geometrischen Ort aller der Richtungen p suchen, für welche die Discontinuitäten $\Delta(p^2)$ denselben Werth besitzen. Im Allgemeinen wird dieser geometrische Ort durch eine gewisse Kegelfläche dargestellt sein, deren Spitze in O liegt. Um die Beschaffenheit dieser Kegelfläche näher zu untersuchen, denken wir uns unter Beibehaltung des früher eingeführten Coordinatensystems eine Ebene E parallel zur xy-Ebene, etwa die Ebene $z = 1$ construirt und untersuchen nun diejenigen Curven (Niveaulinien), in denen die constantem $\Delta(p^2)$ entsprechenden Kegelflächen die Ebene E schneiden. (Fig. 6.)

Zu dem Ende führen wir für diese Niveaulinien die rechtwinkligen Coordinaten $(x, y, z = 1)$ ein und haben dann, wenn wir die vom Punkte

O bis zum Punkte $(x, y, z=1)$ gerechnete Länge des Strahles p mit l bezeichnen,

$$\lambda = \frac{x}{l}, \quad \mu = \frac{y}{l}, \quad \nu = \frac{1}{l}, \quad l^2 = x^2 + y^2 + 1.$$

Die Gleichung 29') für $\varDelta(p^2)$ erhält dann die folgende Gestalt:

$$l^2 \varDelta(p^2) = 4\pi \left\{ q_0 \left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} - k \right) - 2(q_1 x + q_2 y) \right\}$$

oder

$$34)\quad \left(\frac{4\pi q_0}{r_1} - \varDelta(p^2) \right) x^2 + \left(\frac{4\pi q_0}{r_2} - \varDelta(p^2) \right) y^2 - 8\pi(q_1 x + q_2 y) - (4\pi q_0 k + \varDelta(p^2)) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Curven constanter Discontinuitäten Kegelschnitte sind, deren Hauptaxen parallel zur x- und y-Axe liegen. Sind q_1 und q_2 gleich Null, so haben diese Kegelschnitte einen gemeinsamen Mittelpunkt, der in der z-Axe liegt. Eliminirt man aus den Mittelpunktscoordinaten der constanten $\varDelta(p^2)$ entsprechenden Kegelschnitte

$$\alpha = \frac{4\pi q_1}{\dfrac{4\pi q_0}{r_1} - \varDelta(p^2)}, \quad \beta = \frac{4\pi q_2}{\dfrac{4\pi q_0}{r_2} - \varDelta(p^2)}$$

$\varDelta(p^2)$, so erhält man als den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die durch 34) dargestellt sind, eine gleichseitige Hyperbel, welche so gelegen ist, dass die Asymptoten des einen Astes gleichgerichtet sind mit der positiven y- aber negativen x-Axe (Fig. 6). Dieser Ast geht gleichzeitig in O' durch die z-Axe.

Zur weiteren Untersuchung der Art der Kegelschnitte, die durch 34) dargestellt sind, und der extremen Werthe von $\varDelta(p^2)$ bilden wir die Discriminante der Gleichung 34)

$$35)\quad \varDelta = -(a+b+\delta)(a-\delta)(b-\delta) - 16\pi^2(q_2^2(a-\delta) + q_1^2(b-\delta)),$$

wo zur Abkürzung

$$a = \frac{4\pi q_0}{r_1}, \quad b = \frac{4\pi q_0}{r_2}, \quad 4\pi q_0 k = a+b, \quad \delta = \varDelta(p^2)$$

gesetzt worden ist. Setzen wir nun voraus, dass $a < b$ sei, was keine wesentliche Beschränkung ist, und lassen wir δ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so wird die Discriminante $\varDelta$ (auch wenn a oder a und b negativ sind) immer das folgende Verhalten zeigen. Im Intervall

$$\begin{array}{lll} -\infty < \delta < a & \text{ist resp.} & \varDelta = +,\ 0,\ -, \\ a < \delta < b & \text{,,}\quad\text{,,} & \varDelta = -,\ 0,\ +, \\ b < \delta < +\infty & \text{,,}\quad\text{,,} & \varDelta = +,\ 0,\ -. \end{array}$$

Der Werth von δ, für welchen im ersten Intervall die Discriminante einen Zeichenwechsel erleidet, sei bezeichnet mit δ_0, und der entsprechende im letzten Intervall mit δ_1. Dann sieht man mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Coefficienten von x^2 und y^2 in 34) und der Discri-

minante Δ, dass die Gleichung 34) in den folgenden Intervallen die nachstehenden Curven repräsentirt:

Für $-\infty < \delta < \delta_0$ ist die Curve 34) imaginär,
„ $\delta_0 < \delta < a$ „ „ „ „ eine Ellipse,
„ $a < \delta < b$ „ „ „ „ „ Hyperbel,
„ $b < \delta < \delta_1$ „ „ „ „ „ Ellipse,
„ $\delta_1 < \delta < +\infty$ „ „ „ „ imaginär,

δ_0 und δ_1 sind somit der Minimal- resp. Maximalwerth der Discontinuität $\delta = \Delta(p^2)$. Diesen extremen Werthen von $\Delta(p^2)$ entsprechen in der Ebene E zwei Punkte $m_0(x_0, y_0)$ und $m_1(x_1, y_1)$, welche die entsprechenden Richtungen p_0 und p_1 von p bestimmen. Man findet die Coordinaten dieser Punkte als die Mittelpunktscoordinaten der unendlich kleinen Ellipsen, welche die Gleichung 34) darstellt, wenn man darin für $\Delta(p^2)$ die extremen Werthe δ_0 und δ_1 substituirt. Es ist demnach

$$36) \qquad x_0 = \frac{4\pi q_1}{a - \delta_0}, \quad y_0 = \frac{4\pi q_2}{b - \delta_0}; \quad x_1 = \frac{4\pi q_1}{a - \delta_1}, \quad y_1 = \frac{4\pi q_2}{b - \delta_1}.$$

Wir erhalten somit zur Bestimmung der grössten und kleinsten Discontinuität von $\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}$ und der denselben entsprechenden Richtungen p_1 und p_0 die folgende **Regel**:

„Um den Maximalwerth δ_1 und den Minimalwerth δ_0 der Discontinuität $\Delta(p^2)$ zu finden, transformire man den Ausdruck 29′) für $\Delta(p^2)$ durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten $(x, y, 1)$ in die Form 34). Bezeichnet man dann die Discriminante der Gleichung 34) mit Δ, so findet man die extremen Werthe δ_1 und δ_0 der Discontinuität $\Delta(p^2)$ als die grösste und kleinste Wurzel der in Bezug auf $\Delta(p^2)$ cubischen Gleichung $\Delta = 0$. Die dem Maximalwerthe δ_1 und dem Minimalwerthe δ_0 entsprechenden Richtungen p_1 und p_0 sind dann, wenn man mit Hilfe der Relationen 36) die Punkte $m_1(x_1 y_1 1)$ und $m_0(x_0 y_0 1)$ bestimmt hat, dargestellt durch die Geraden $(O m_1)$ und $(O m_0)$.“

Für $\Delta(p^2) = 0$ stellt die Gleichung 34), wenn r_1 und r_2 gleiches Vorzeichen haben, eine Ellipse, und wenn nicht, eine Hyperbel vor. Die Discriminante Δ lehrt, dass die Ellipse für $\Delta(p^2) = 0$ immer reell ist. Wir gelangen daher zu dem Resultat, dass immer ein System von Richtungen existirt, nach denen genommen der zweite Differentialquotient des Flächenpotentials stetig ist, wenn der Punkt (x, y, z) die gegebene Fläche in O durchschreitet. Gleichzeitig geht daraus hervor, dass das Minimum der Discontinuität immer negativ, das Maximum immer positiv ist.

Um eine weitere Eigenschaft dieser Kegelschnitte zu erhalten, schreiben wir die Gleichung 34) in der folgenden Form:

$$a x^2 + b y^2 - 8\pi(q_1 x + q_2 y) - (a + b) = \delta(x^2 + y^2 + 1).$$

Setzen wir nun hierin

$$x^2+y^2+1=0$$

und daher auch

$$ax^2+by^2-8\pi(q_1x+q_2y)-(a+b)=0,$$

so kommt in diesen beiden Gleichungen der Parameter δ nicht mehr vor und dieselben bestimmen die Coordinaten von vier Punkten, die sämmtlichen durch die Gleichung 34) dargestellten Kegelschnitten gemeinsam sind. Aus der ersten dieser beiden Relationen geht überdies sofort hervor, dass diese vier Punkte imaginär sind.

Es sei noch bemerkt, dass für $r_1=r_2$ die durch 34) dargestellten Kegelschnitte übergehen in ein System Kreise, deren Mittelpunkte auf einer durch die z-Axe gehenden Geraden liegen. Diese Gerade ist dann parallel derjenigen Tangente t an die gegebene Fläche, für welche im Punkte O $\frac{\partial q}{\partial t}$ den grössten Werth besitzt; und zwar liegen für $r_1=r_2>0$ der Minimalpunkt m_0 und die Mittelpunkte der denselben umschliessenden Kreise auf demjenigen von O' ausgehenden Strahl, welcher mit der positiven t-Richtung gleichgerichtet ist. — Ferner findet man leicht mit Hilfe der Gleichung 32'), dass für jede durch die z-Axe gelegte Ebene E, auch wenn r_1 und r_2 verschieden von einander sind, diejenigen zwei der in E gelegenen Richtungen p, für welche $\Delta(p^2)$ den relativ grössten und kleinsten Werth besitzt, senkrecht auf einander stehen. Ist also $r_1=r_2$, so müssen auch p_0 und p_1 senkrecht auf einander stehen.

Sind p, p', p'' drei senkrecht auf einander stehende Richtungen, so muss gemäss der Laplace'schen Relation die Gleichung

$$\Delta(p^2)+\Delta(p'^2)+\Delta(p''^2)=0 \tag{37}$$

bestehen. Ist man nun im Stande, zwei senkrecht auf einander stehende Richtungen, etwa p und p', auf derselben oder auf verschiedenen Niveaulinien, etwa p auf $\Delta(p^2)=c$, p' auf $\Delta(p'^2)=c'$ gleiten zu lassen, so muss gemäss der Relation 37) eine im gemeinsamen Scheitel O auf p und p' errichtete Normale p'' ebenfalls auf einer Niveaulinie gleiten, nämlich auf $\Delta(p^2)=-(c+c')$. Im Besondern muss, wenn p und p' auf dem Kegelschnitt $\Delta(p^2)=0$ gleiten, auch p'' sich auf demselben Kegelschnitte fortbewegen. (Dieser Fall ist in Fig. 6 angedeutet.)

Nachdem wir $\Delta(p^2)$ untersucht haben, wäre nun noch die Discontinuität von $\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial p_1}$ zu betrachten. Aber selbst in dem speciellen Falle, dass die Richtungen p und p_1 senkrecht auf einander stehen und mit der z-Axe in ein und derselben Ebene liegen, welcher Fall bestimmt ist durch die Gleichung 33), erhält man in der Ebene E für die Curven, auf denen $\Delta(pp_1)$ constant ist, im Allgemeinen keine Curven zweiten Grades.

Nachschrift. Die vorliegende Abhandlung ist eine Umarbeitung der mit dem Preise gekrönten Lösung einer im Jahre 1878 von der philosophischen Facultät der Universität Leipzig gestellten Preisaufgabe:

„Für das Flächenpotential sind die Discontinuitäten der ersten Differentialquotienten bereits von Green und Gauss untersucht worden; es wird verlangt eine Untersuchung der Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten."

Für die mir bei dieser Umarbeitung von Herrn Prof. Neumann bereitwilligst gewährte Unterstützung erlaube ich mir, demselben auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen.

XI.

Ueber Isothermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conform veränderliche Systeme, die mit den Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}$ zusammenhängen.

Von

Dr. G. Holzmüller,

Director der königl. Gewerbeschule in Hagen.

Hierzu Taf. V Fig. 1 u. 2.

Vorbemerkungen.

Im 83. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals behandelte Verfasser die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$, welche auf den Begriff der lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung führte. Es zeigte sich dabei die Möglichkeit, nicht nur die Geometrie der Lage, sondern in gewissem Umfange auch die des Maasses in die lemniscatische Geometrie n^{ter} Ordnung zu übertragen, und gleichzeitig wurden Andeutungen über die eindeutige Verwandtschaft der Kegelflächen gegeben. Dass durch die gefundenen Isothermensysteme eine Reihe von Problemen der Wärmetheorie, der Elektrostatik etc. gelöst werden, war selbstverständlich.

In einem Referate des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik IX, S. 590, wurden einige Sätze jener Abhandlung als interessante Beispiele zu gewissen von Darboux aufgestellten Theoremen bezeichnet (Mém. de Bordeaux VIII, IX, „Sur une classe remarquable de courbes etc.“). Dem Verfasser waren die letzteren nicht zugänglich, jedoch ist es ihm gelungen, die angewandte Methode auf die Abbildung mittels ganzer und gebrochener rationaler Functionen auszudehnen, worüber eine besondere Abhandlung berichten wird.* Nach einem früheren Referate des genannten Jahrbuchs scheint die Darboux'sche Arbeit nur gewisse Fundamentaleigenschaften jener Curven

---

* Dies ist bereits im Oster-Programm 1880 der königl. Gewerbeschule zu Hagen geschehen, dem eine Abhandlung „Ueber die conforme Abbildung mittels ganzer und gebrochener rationaler Functionen“ beigegeben ist. Eine ergänzende Arbeit erscheint soeben im 18. Bande der Mathematischen Annalen.

zu entwickeln, auf das Gebiet der conformen Abbildung und der isogonalen Verwandtschaften aber nicht weiter einzugehen.

In Folgendem soll das im Anfang bezeichnete Gebiet eine speciellere Bearbeitung erfahren. Abgesehen von der Bedeutung der behandelten Curvensysteme für einzelne Bereiche der mathematischen Forschung, kam es besonders darauf an, zu zeigen, dass gewisse mehrdeutige Verwandtschaften in der That der vollständigen Durchführung fähig sind, obwohl Herr Burmester in einer Abhandlung „Ueber das bifocal veränderliche System“ (Math. Annalen XVI, S. 89 etc.) kürzlich die Bemerkung machte, dass nicht-eindeutige Beziehungen ebener Systeme bis jetzt fast ohne Beachtung geblieben wären.

Um das Verständniss der Arbeit auch Solchen zu ermöglichen, die mit den Riemann'schen Ideen weniger vertraut sind, ist dem Ganzen ein einleitender Abschnitt über den allgemeinen Charakter der Abbildung $z=\sqrt[n]{Z}$ vorangeschickt, der Bekanntes in möglichst anschaulicher Form darstellen soll.

Betreffs der Literatur und einiger Figuren sei schon jetzt auf eine frühere Abhandlung „Ueber lemniscatische Geometrie etc.“ im 21. Bande dieser Zeitschrift verwiesen.

---

§ 1. Allgemeiner Charakter der Abbildung $z=\sqrt[n]{Z}$ für n reell, ganz und positiv.

Zwischen beiden Ebenen besteht die Beziehung

$$x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$$

oder

$$r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt[n]{R\,(\cos\Phi+i\sin\Phi)}=R^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\Phi+2\varkappa\pi}{n}+i\sin\frac{\Phi+2\varkappa\pi}{n}\right),$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet, die auf die Werthe von 0 bis $n-1$ beschränkt werden kann. Dem einen Punkte $R\,(\cos\Phi+i\sin\Phi)$ entsprechen also n Punkte auf dem Kreise mit Radius $R^{\frac{1}{n}}$ um den Nullpunkt, die ein regelmässiges Polygon bilden. Ihre Construction ist nur in den Fällen mit elementaren Mitteln zu erreichen, für welche Kreistheilung und Wurzelconstruction mit Zirkel und Lineal durchführbar sind.

Dem n-fach den Nullpunkt umlaufenden Kreise $R=c$ entspricht der einfache Kreis $r^n=c$ oder $r=\sqrt[n]{c}$, der Geraden $\Phi=\gamma$ durch den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen n Gerade durch den Nullpunkt der z-Ebene, deren Abweichungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ sich aus der Gleichung $n\varphi=\gamma+2\varkappa\pi$ ergeben.

Der Differentialquotient der abbildenden Function

$$z' = \frac{d\sqrt[n]{Z}}{dZ}$$

$$= \frac{1}{n} Z^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{n}-1} \left[\cos\left(\frac{1}{n}-1\right)(\Phi + 2\varkappa\pi) + i \sin\left(\frac{1}{n}-1\right)(\Phi + 2\varkappa\pi) \right]$$

ist, abgesehen von der Vieldeutigkeit der Abweichung, für jeden Werth des Arguments einheitlich bestimmt, was nur denkbar ist, wenn derselbe unabhängig von dem Richtungssinne ist, in dem das complexe Argument sich ändert. Einem unendlich kleinen Kreise um einen Punkt der Z-Ebene entsprechen also unendlich kleine Kreise um die n Punkte der andern Ebene, und hieraus folgt, wie bei jeder Function complexen Arguments, dass die Abbildung dem Original im Allgemeinen in den kleinsten Theilen ähnlich ist.

Aus Obigem ergiebt sich aber, dass der Nullpunkt eine Ausnahme macht, denn jeder Winkel Φ wird dort n-mal als Winkel $\frac{\Phi}{n}$ dargestellt. Dass die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen auch im unendlich fernen Bereiche aufhört und dass beide Punkte noch in anderen Beziehungen eine Sonderstellung einnehmen, wird sich später zeigen.

Um die Untersuchungen zu vereinfachen, muss man versuchen, die n-Deutigkeit der Function $\sqrt[n]{Z}$ in eine Eindeutigkeit des Ortes zu verwandeln. Zu diesem Zwecke denke man sich nach Riemann die Z-Ebene aus n übereinander liegenden Blättern bestehend, von denen sich jedes als Sector von 360^0 mit dem Nullpunkte als Centrum betrachten lässt. Jedes derselben entspricht einem Sector von $\frac{360^0}{n}$ der z-Ebene. Ueberschreitet man eine Grenzlinie des letzteren, so gelangt man in den benachbarten Sector. Daher denkt man sich, dass die Ueberschreitung der Grenze eines Blattes der Z-Ebene in das darunter oder darüber liegende Blatt führt. Man nimmt also an, dass vom Nullpunkte der Z-Ebene eine Linie ausgeht, längs deren die einzelnen Blätter sich durchkreuzen, und zwar so, dass man, den Nullpunkt im Sinne der rückwärts gehenden Uhr umwandernd, aus dem obersten Blatte beim ersten Ueberschreiten des Schnittes in das zweite, nach einem neuen Umgange in das dritte u. s. w. und nach dem n^{ten} Umgange in das erste zurück gelangt. Dies entspricht naturgemäss der Wanderung um den Nullpunkt der z-Ebene durch alle n Sectoren derselben.

Fig. 1 und 2 stellen Dasjenige, was in der Nähe des Nullpunktes beider Ebenen geschieht, durch ein Modell für den Fall $n = 3$ dar. Jedem Blatte der Z-Ebene entspricht ein Sector von 120^0 in der z-Ebene. Die Art, wie die Blätter der ersteren sich durchkreuzen, ist durch Pfeile

dargestellt. Die Durchkreuzung ist willkürlich in die positive reelle Axe verlegt.

Die einzelnen Blätter legen sich wie Schraubenflächen von der Steigung Null um einen Cylinder vom Durchmesser Null, es liegt also nahe, den Nullpunkt mit Riemann als „Windungspunkt“ zu bezeichnen, und da es sich um n Blätter handelt, wird man ihn einen „Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung“ nennen. Die Figur veranschaulicht die Windungsfläche zweiter Ordnung.

Die Linie, längs welcher sich die Blätter der Z-Ebene durchkreuzen, heisst „Verzweigungsschnitt“. Derselbe ist, wie schon gesagt, hier ganz willkürlich von 0 nach ∞ zu legen, nur darf er sich selbst nicht wieder schneiden. In seinem Anfangspunkte, dem Nullpunkte, hat man sich alle Blätter zusammenhängend zu denken, wodurch der Umstand versinnlicht wird, dass $\sqrt[n]{Z}$ für $Z=0$ nur den einen Werth Null hat. Geht man nun in der Z-Ebene bis zum Nullpunkte, um denselben zu überschreiten, so hat man dort die Wahl, in n Blättern weiterzugehen. Entsprechend verzweigt sich in der z-Ebene der Weg vom Nullpunkte aus nach n Richtungen, die unter dem Winkel $\frac{360}{n}$ Grad auf einander folgen. Aus diesem Grunde nennt man den Nullpunkt der Z-Ebene einen Verzweigungspunkt. Durch ihn kann man stetig aus jedem Blatte direct in jedes andere übergehen, was an den anderen Stellen nur durch ein mehrfaches Umkreisen des Nullpunktes oder durch einen Sprung möglich ist.

Aehnliches muss in dem Punkte geschehen, wo der Verzweigungsschnitt endigt, denn da in diesem Punkte das gegenseitige Durchkreuzen der Ebenen aufhört, müssen dieselben in ihm zusammenhängen. Nun hat aber, abgesehen vom Nullpunkte, die Function $\sqrt[n]{Z}$ in jedem Punkte n Werthe. Der Endpunkt des Schnittes kann also nur im unendlich fernen Bereiche liegen, d. h. auch für $Z=\infty$ ist die Function als eindeutig aufzufassen, man hat sich also zu denken, dass nur ein unendlicher Punkt existire, in dem die Blätter der Z-Ebene ebenso, wie im Nullpunkte zusammenhängen. Auch er ist ein Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. — Man hätte dies auch dadurch beweisen können, dass $\sqrt[n]{\frac{1}{Z}}$ für $Z=0$ eindeutig ist.

Jene Vorstellung des unendlich fernen Bereichs der Z-Ebene wird sofort klar und plastisch, wenn man sich letztere als Kugel mit unendlich grossem Radius denkt, so dass der Mittelpunkt der Antipode des unendlichen Punktes ist. Beide werden am bequemsten durch einen geraden Schnitt (Bogen eines grössten Kreises) verbunden, der mit der positiven reellen Axe zusammenfällt.

Das Aufhören der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen für diese beiden Punkte hängt auch mit folgender Eigenthümlichkeit zusammen:

Nach Siebeck giebt der absolute Betrag des Differentialquotienten, hier $\frac{1}{n} R^{\frac{1}{n}-1}$, für jede Stelle den entsprechenden Vergrösserungsfactor der Abbildung an. Derselbe ist also constant für jeden Kreis mit dem Nullpunkte als Centrum. Da aber $n > 1$ ist, so ist dieser Betrag für den Nullpunkt unendlich gross, für den unendlichen Punkt gleich Null. Also: Der Bereich des Nullpunktes der Z-Ebene wird unendlichfach vergrössert, der des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt.

Entsprechen ferner einem unendlich kleinen Kreise n solche um die correspondirenden Punkte der z-Ebene, so zeigt die Abweichung des Differentialquotienten, $\left(\frac{1}{n}-1\right)(\Phi+2\varkappa\pi)$, an, um welchen Winkel ein Durchmesser eines solchen Kreises gegen den des Originalkreises verdreht ist. Dabei stimmt die Zahl $\varkappa$ mit dem Index des Sectors überein. Diese Verdrehung ist constant für alle Punkte einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden.

Sehr anschaulich ergeben sich diese Verhältnisse aus Fig. 2 der citirten Abhandlung im 21. Bande dieser Zeitschrift, welche gleichwerthige Quadrate in allen Bereichen der z-Ebene für $n=2$ darstellt. Dieselben verkleinern sich nach dem unendlichen Punkte hin bis zu verschwindenden Dimensionen, sie vergrössern sich nach dem Nullpunkte hin und degeneriren dort, indem sie einen Winkel von 45^0 annehmen.

§ 2. Entwickelung der Curve, welche der von $a+bi$ in der Richtung γ ausgehenden Geraden entspricht.

Ist die abbildende Function eine solche, bei der einer stetigen Folge reeller Werthe des Arguments eine stetige Folge reeller Werthe der Function entspricht, so ist die Abbildung jeder Curve im Wesentlichen erledigt, sobald es nur gelingt, ihre Gleichung so zu schreiben, dass sie die Variabelen X und Y nur noch in den Formen $X+Yi$ und $X-Yi$ enthält. Dann ist nur noch die inverse Function in die Gleichung einzuführen und das Imaginäre zu entfernen. Hierzu bietet unsere Aufgabe ein instructives Beispiel.

Die Gleichung der Geraden, die von $a+bi$ in der Richtung γ ausgeht,

$$\frac{Y-b}{X-a} = tan\,\gamma,$$

lässt sich schreiben

$$\gamma = \arctan \frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i} lg \frac{X-a+i(Y-b)}{X-a-i(Y-b)} = \frac{1}{2i} lg \frac{(X+Yi)-(a+bi)}{(X-Yi)-(a-bi)}.$$

Durch die Abbildung $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$ geht sie über in

$$1)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{2i} lg \frac{(x+yi)^n-(a+bi)}{(x-yi)^n-(a-bi)} \\ &= \frac{1}{2i}\{lg[(x+yi)^n-(a+bi)] - lg[(x-yi)^n-(a-bi)]\} = \gamma. \end{aligned}$$

Jeder der Ausdrücke $(x \pm yi)^n - (a \pm bi)$ lässt sich bei ganzen, positiven, reellem n in ein Product von n Factoren von der Form $x \pm yi - \sqrt[n]{a \pm bi_\varkappa}$ zerlegen, wobei bekanntlich

$$\sqrt[n]{a \pm bi_\varkappa} = \sqrt[2n]{a^2+b^2}\left[\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n} \pm i \sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}\right].$$

Der Bruch in Gleichung 1) zerlegt sich also in ein Product von n Brüchen, deren Zähler und Nenner bei geeigneter Anordnung conjugirt sind, so dass man, indem zugleich statt des Logarithmus des Products die Summe der Logarithmen gesetzt wird, Folgendes erhält:

$$\begin{aligned} &\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \frac{1}{2i} lg \frac{x+yi-\sqrt[n]{a+bi_\varkappa}}{x-yi-\sqrt[n]{a-bi_\varkappa}} \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} \arctan \frac{\frac{1}{i}[x+yi-\sqrt[n]{a+bi_\varkappa}-(x-yi-\sqrt[n]{a-bi_\varkappa})]}{x+yi-\sqrt[n]{a+bi_\varkappa}+x-yi-\sqrt[n]{a-bi_\varkappa}} = \gamma \end{aligned}$$

oder endlich

$$2)\quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} \arctan \frac{y-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\,.\,\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}}{x-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\,.\,\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}} = \gamma.$$

Diese Gleichung lässt sich in überraschend einfacher Weise geometrisch deuten. Verbindet man nämlich irgend einen Punkt $x+yi$ mit den n durch $\sqrt[n]{a+bi}$ repräsentirten Punkten, so bilden die Verbindungslinien mit der reellen Axe Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, für welche

$$\tan\varphi_\varkappa = \frac{y-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\,.\,\sin\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}}{x-\sqrt[2n]{a^2+b^2}\,.\,\cos\frac{\arctan\frac{b}{a}+2\varkappa\pi}{n}},$$

so dass man statt Gleichung 2) auch schreiben kann

$$3) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \cdot \cdot + \varphi_n = \gamma.$$

Das Resultat ist also folgendes:

Die durch den Punkt $a + bi$ gehende Gerade, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel γ bildet, geht durch die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$, wo n positiv, ganz und reell ist, in die Curve $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \gamma$ über, wobei die φ die Winkel sind, welche die von den Punkten $\sqrt[n]{a + bi}$ ausgehenden Radii vectores jedes Curvenpunktes mit der positiven reellen Axe bilden.

Die so definirten Curven nannte ich in der an erster Stelle citirten Arbeit aus geometrischen Gründen, besonders der asymptotischen Eigenschaften halber, „Hyperbeln n^{ter} Ordnung". Für $n = 2$ gehen sie in der That in gleichseitige Hyperbeln über.

Die Gleichungen 1) und 2) sind vollständig identisch. Die linke Seite von Gleichung 2) ist also der von i befreite imaginäre Theil der Function complexen Arguments

$$f(x + yi) = lg\left[(x + yi)^n - (a + bi)\right]$$

und muss als solcher der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen.

Uebrigens lässt sich statt der Gleichung 2) noch eine andere substituiren, aus der allerdings die geometrische Eigenschaft 3) nicht erkannt werden kann. Die Gleichung der behandelten Geraden lautet nämlich in Polarcoordinaten

$$\frac{R \sin \Phi - b}{R \cos \Phi - a} = \tan \gamma,$$

sie geht also durch unsere Transformation über in

$$4) \qquad \frac{r^n \sin n\varphi - b}{r^n \cos n\varphi - a} = \tan \gamma.$$

Dies ist die Gleichung der Hyperbeln n^{ter} Ordnung in Polarcoordinaten. In der Gestalt

$$5) \qquad \arctan \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} . \sin\left(n \arctan \dfrac{y}{x}\right) - b}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} . \cos\left(n \arctan \dfrac{y}{x}\right) - a} = \gamma$$

ist sie identisch mit Gleichung 2) und ihre linke Seite muss also gleichfalls der partiellen Differentialgleichung genügen.

Ist demnach γ ein variabeler Parameter, der immer reell bleibt, so stellen die Gleichungen 2) und 5) ein isothermisches Curvensystem

in dem von Lamé definirten Sinne dar, welches durch die Abbildung

$$X + Yi = lg[(x+yi)^n - (a+bi)]$$

in ein System von Geraden $Y = \gamma$ übergeht.

§ 3. Ableitung der Curve, die dem Kreise $\varrho = c$ um den Punkt $a + bi$ entspricht.

Der Kreis $\varrho = c$ um $a + bi$ hat die Gleichung
$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = c^2$ oder $[X + Yi - (a+bi)].[X - Yi - (a-bi)] = c^2$.
Letztere geht durch die Abbildung $x + yi = \sqrt[n]{X + Yi}$ über in

$$1) \qquad [(x+yi)^n - (a+bi)].[(x-yi)^n - (a-bi)] = c^2$$

oder, wenn jede Klammer in ihre Factoren zerlegt wird,

$$2) \qquad \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} [(x+yi) - \sqrt[n]{a+bi_\varkappa}].[(x-yi) - \sqrt[n]{a-bi_\varkappa}] = c^2,$$

wo die Wurzelausdrücke die frühere Gestalt haben und zu zweien conjugirt sind, so dass man n reelle Factoren zweiten Grades erhält, nämlich

$$3) \qquad \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left[\left(x - \sqrt[2n]{a^2+b^2}.\cos\frac{\arctan\frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sqrt[2n]{a^2+b^2}.\sin\frac{\arctan\frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n}\right)^2\right] = c^2.$$

Wiederum zeigt sich eine interessante geometrische Deutung, indem jeder der Factoren das Quadrat der Entfernung jedes Punktes $x + yi$ von einem der durch $\sqrt[n]{a+bi}$ repräsentirten Punkte darstellt. Bezeichnet man diese Entfernungen mit $p_1, p_2, \dots p_n$, so erhält man als Gleichung der Curve nach Ausziehung der Wurzeln:

$$4) \qquad p_1 . p_2 \dots p_n = c.$$

Also: Die vorliegende Abbildung verwandelt den Kreis $\varrho = c$ um $a + bi$ in die Curve $p_1 . p_2 \dots p_n = c$, deren Radii vectores von den Punkten $\sqrt[n]{a+bi}$ ausgehen.

Da diese Curven für $n = 2$ Lemniscaten (Cassini'sche Linien) sind, so liegt es nahe, sie nach Vorgang der citirten Abhandlung als „Lemniscaten n^{ter} Ordnung" und die Punkte $\sqrt[n]{a+bi}$ als ihre Brennpunkte zu bezeichnen.

Nicht in der Form 3), sondern in der aus 1) sich ergebenden

$$5) \qquad \tfrac{1}{2}\{lg[(x+yi)^n - (a+bi)] + lg[(x-yi)^n - (a-bi)]\} = c_1,$$

also reell geschrieben

$$6)\quad \tfrac{1}{2}\, lg \prod_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left[\left(x - \sqrt[2n]{a^2+b^2} \, . \, cos \frac{arctan \frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n} \right)^2 + \left(y - \sqrt[2n]{a^2+b^2} \, . \, sin \frac{arctan \frac{b}{a} + 2\varkappa\pi}{n} \right)^2 \right] = c_1,$$

wo $c_1 = lg c$ ist, genügt die linke Seite der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, da sie als reeller Theil der Function $f(x+yi) = lg\,[(x+yi)^n - (a+bi)]$ zu betrachten ist.

Wiederum handelt es sich also um ein isothermisches Curvensystem, welches durch die Abbildung $X + Yi = lg\,[(x+yi)^n - (a+bi)]$ in ein System paralleler Geraden $X = c_1$ verwandelt werden kann und demnach die Orthogonalschaar zu dem im vorigen Abschnitt behandelten System bildet.

Auch die Gleichung dieses Systems lässt sich in einfacherer Gestalt schreiben, indem man Polarcoordinaten anwendet. Die Kreisgleichung lautet dann:

$$R^2 - 2R\,[a \cos \Phi - b \sin \Phi] + a^2 + b^2 = c^2$$

und geht durch die Abbildung über in die Curvengleichung

$$7)\quad r^{2n} - 2r^n\,[a \cos(n\varphi) - b \sin(n\varphi)] + a^2 + b^2 = c^2.$$

Schreibt man diese wieder in der Form

$$8)\quad \tfrac{1}{2}\, lg \left[(x^2+y^2)^n - 2\,(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} . \left\{ a \cos\left(n\, arctan \frac{y}{x}\right) + b \sin\left(n\, arctan \frac{y}{x}\right) \right\} + a^2 + b^2 \right] = c_1,$$

so ist sie mit Gleichung 6) identisch und genügt wieder der Differentialgleichung $\Delta U = 0$.

§ 4. Folgerungen.

1. Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten, die sich auf einen Punkt $(a+bi)$ und die reelle Axe als Richtungslinie beziehen, $f(\varrho, \vartheta) = 0$, so entsteht durch die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ eine Curve, deren Gleichung, bezogen auf die Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi}$, die Form

$$f\,[(p_1 . p_2 \ldots p_n),\ (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)] = 0$$

hat.

2. Ist eine Curvengleichung in lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung in Bezug auf die Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi}$ gegeben, so geht sie durch die Transformation $z = \sqrt[m]{Z}$ in eine solche über, die in Coordinaten $m.n^{ter}$ Ordnung auf die Punkte $\sqrt[m.n]{a+bi}$ bezogen ist. — Beziehen sich die Coordinaten der ersten Curve auf die Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi} - (c+di)$, d. h. fällt das Centrum des Brennpunktpolygons nicht in den

Nullpunkt, so ist die Uebertragung gleichfalls leicht zu deuten, nur wird die Ausdrucksweise complicirter.

3. Die Curvengleichung $f(R, \Phi)=0$ in Polarcoordinaten auf den Nullpunkt bezogen, geht über in die Gleichung der transformirten Curve $f(r^n, n\varphi)=0$, wobei es sich wieder um solche Polarcoordinaten handelt.

4. Alles Wesentliche, was Lamé im 13. Capitel der „Leçons sur les coordonnées curvilignes" über das lemniscatisch-hyperbolische System für $n=2$ sagt, lässt sich mit den entsprechenden physikalischen Folgerungen auf jedes ganze, positive, reelle n ausdehnen.

§ 5. Wichtigere Eigenschaften der Hyperbeln n^{ter} Ordnung; die orthogonalen Hyperbelschaaren n^{ter} Ordnung.

1. Entspricht die Hyperbel n^{ter} Ordnung der Geraden $X=a$ oder $R\cos\Phi=a$, oder der Linie $\gamma=\frac{\pi}{2}$ durch den Punkt a, so lautet ihre Gleichung

a) $$r^n \cos n\varphi = a$$

oder

b) $$\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n=\frac{\pi}{2},$$

wobei die Radii vectores von den Punkten $\sqrt[n]{a}$ ausgehen.

2. Für $r=\infty$ ist $\cos n\varphi=0$, also $\varphi=\frac{90^0+2\varkappa\pi}{n}$. Dies giebt die Neigungswinkel der Asymptoten für die n congruenten Curvenarme. Es sind n durch das Centrum (den Nullpunkt) gehende Symmetrie-Axen vorhanden, die unter gleichen Winkeln auf einander folgen und bei ungeradem n sämmtlich, bei geradem n zur Hälfte durch die Scheitelpunkte der Curve gehen.

3. Für $\varphi=\frac{2\varkappa\pi}{n}$ ergiebt sich $r=\sqrt[n]{a}$, wodurch die Entfernung der Scheitelpunkte vom Centrum bestimmt ist.

4. $R\cos(\Phi-\alpha)=a$ ist die Polargleichung der allgemeinen Geraden, wobei a ihre Entfernung vom Nullpunkte bedeutet. Die entsprechende Hyperbel n^{ter} Ordnung hat die Gleichung

c) $$r^n \cos n\left(\varphi-\frac{\alpha}{n}\right)=a.$$

Sie ist gegen die Hyperbel a) um den Winkel $\frac{\alpha}{n}$ gedreht und mit ihr offenbar congruent. Variirt hingegen der Parameter a, so werden die Curven ähnlich.

5. Wie sich die Gerade als Kreis betrachten lässt, dessen Centrum im Unendlichen liegt, so lässt sich die Hyperbel n^{ter} Ordnung als Lemniscate n^{ter} Ordnung betrachten, deren Brennpunkte im Unendlichen liegen.

6. Gehen p und q von zwei festen Punkten $a+bi$ und a_1+b_1i aus, so ist der durch $p=q$ dargestellte geometrische Ort eine Gerade. Folglich: Die Gleichung

d) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n,$$

wo die p von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi}$, die q von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a_1+b_1i}$ ausgehen, stellt eine Hyperbel n^{ter} Ordnung dar. In Worten:

Verbindet man einen Punkt mit den Eckpunkten zweier concentrischer regelmässiger Polygone gleicher Seitenzahl, die beliebig gegen einander verdreht sind, und bewegt er sich so, dass das Product der einen Strahlengruppe stets gleich dem der andern ist, so beschreibt er eine Hyperbel n^{ter} Ordnung.

7. Ist dabei der Punkt $a+bi$ der Nullpunkt, so geht die Gleichung über in

e) $$p^n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n,$$

was ebenfalls leicht geometrisch zu deuten ist und für $n=2$ eine bekannte Brennpunkteigenschaft der gleichseitigen Hyperbel giebt. Da sich aber jede Gerade in solcher Weise schreiben lässt, so lässt sich jede Hyperbel n^{ter} Ordnung durch eine Gleichung von der Form e) darstellen, wo die p vom Nullpunkte, die q von den Punkten $\sqrt[n]{a_1+b_1i}$ ausgehen.

8. Hierbei ist nun a_1+b_1i der Spiegelpunkt des Nullpunkts gegen die Gerade. Deshalb sollen die entsprechenden Punkte $\sqrt[n]{a_1+b_1i}$ die Brennpunkte der Hyperbel n^{ter} Ordnung genannt werden. Die Geraden vom Centrum nach den Scheitelpunkten gehen demnach durch die Brennpunkte. Für $n=2$ stimmt die Definition mit der gewöhnlichen Brennpunktdefinition überein, woraus sich interessante Analogien mit den gleichseitigen Hyperbeln ergeben.

9. Die Brennpunkte der Hyperbel n^{ter} Ordn. $r^n \cos n\varphi = a$ werden dargestellt durch $\sqrt[n]{2a}$.

10. Eine gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten $\sqrt{a}$ werde der Transformation $z=\sqrt[n]{Z}$ unterworfen. Dadurch geht sie über in eine Hyperbel $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit den durch $\sqrt[2n]{a}$ dargestellten Brennpunkten, die abwechselnd den beiden Brennpunkten der ersten Curve entsprechen. Die Focalgleichung der ersteren ist aber

$$p-q=c,$$

wobei $c=\sqrt{a}(2-\sqrt{2})$ ist. Folglich:

Die Hyperbel $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[2n]{a}$ hat die Focaleigenschaft

f) $$p_1 \cdot p_2 \ldots p_n - q_1 \cdot q_2 \ldots q_n = \sqrt{a}(2-\sqrt{2}),$$

wobei die p und q Radii vectores sind, die von den Brennpunkten ausgehen und abwechselnd auf einander folgen.

11. Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so bewegt sich das Spiegelbild des Nullpunktes auf einem Kreise um jenen Punkt und durch den Nullpunkt. Folglich:

Die Brennpunkte aller durch eine Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi}$ gehenden Hyperbeln n^{ter} Ordnung liegen auf einer Lemniscate n^{ter} Ordnung, deren Arme sich im Nullpunkte treffen.

12. Schneiden sich zwei Gerade unter dem Winkel α, so gilt dasselbe von den durch den Nullpunkt gehenden Normalen. Folglich:

Schneiden sich zwei Hyperbeln n^{ter} Ordnung desselben Centrums einmal unter dem Winkel α, so schneiden sie sich im Ganzen n-mal unter demselben Winkel, und die Systeme ihrer Hauptaxen sind um den Winkel $\frac{\alpha}{n}$ gegen einander gedreht.

13. Dem System paralleler Geraden $X=a$ entspricht ein System von Hyperbeln n^{ter} Ordnung $r^n \cos n\varphi = a$, die einander nicht schneiden und deren Asymptoten zusammenfallen. Dasselbe gilt vom System $r^n \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$. Eine solche Curvengruppe soll als „Schaar der Hyperbeln n^{ter} Ordnung" bezeichnet werden, wogegen die durch Gleichung 3) und 5) des § 2 charakterisirte Gruppe „Büschel der Hyperbeln n^{ter} Ordnung" heissen soll.

14. Die gleichwinkligen isogonalen Trajectorien der Parallelenschaar, z. B. ihre Orthogonalen, sind wiederum eine Parallelenschaar. Folglich: Die gleichwinkligen isogonalen Trajectorien der Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung bilden wiederum eine solche Schaar. Ist die Gleichung der einen Gruppe $r^n \cos n\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$, so hat z. B. die Orthogonalschaar die Gleichung $r^n \sin n\left(\varphi - \frac{\alpha}{n}\right) = a$.

15. Folgen die Parameter jeder der beiden letzten Schaaren in arithmetischer Reihe auf einander, so wird die Ebene in ein System rechtwinkliger Flächenräume eingetheilt, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Ist die constante Differenz in beiden Reihen dieselbe, so entspricht dies der Eintheilung in „Quadrate", die Eckpunkte eines solchen Netzes liegen auf zwei Schaaren von Hyperbeln n^{ter} Ordnung.

16. Die Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung

$$r^n \cos n\varphi = a$$

lässt sich auch schreiben

g) $$(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left[n . \operatorname{arctan} \frac{y}{x}\right]=a$$

oder, wie man mit Hilfe der Polarcoordinaten leicht zeigen kann,

h) $$\frac{(x+yi)^n+(x-yi)^n}{2}=a.$$

Die linke Seite der Gleichung g) ist also der reelle Theil der Function complexen Arguments $f(x+yi)=(x+yi)^n$ und muss als solcher der Differentialgleichung $\Delta u=0$ genügen. Es handelt sich demnach um ein Isothermensystem, welches, wie selbstverständlich war, durch die Abbildung $X+Yi=(x+yi)^n$ in das System der Geraden $X=a$ übergeht.

17. Denkt man sich also in wärmeleitender Ebene zwei Hyperbeln n^{ter} Ordnung derselben Schaar auf constanten Temperaturen erhalten, so sind nach dem Eintreten des stationären Zustandes die Linien constanter Temperatur sämmtlich Hyperbeln n^{ter} Ordnung derselben Schaar. Eine der ersten Curven kann man in den unendlichen Bereich verlegen, wodurch Nichts geändert wird. Geht dann noch die andere durch den Nullpunkt, so dass sie in zwei sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ schneidende Gerade übergeht, so ist das isothermische Problem für den Raum zwischen den Schenkeln dieses Winkels gelöst. Also auch hier bilden die Isothermen eine Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung.

§ 6. Die Eigenschaften der Lemniscaten n^{ter} Ordnung und der aus ihnen hervorgehenden Isothermenschaaren.

1. Der Kreis $\varrho=c$ um den Punkt a der reellen Axe hat die Gleichung

$$R^2-2aR\cos\Phi+a^2=c^2,$$

die entsprechende Lemniscate n^{ter} Ordnung also, deren Brennpunkte durch $\sqrt[n]{a}$, deren constantes Product durch c dargestellt ist, hat die Gleichung

a) $$r^{2n}-2ar^n\cos n\varphi+a^2=c^2.$$

2. Ist $c<a$, so liegt der Nullpunkt ausserhalb des Kreises, ist $c=a$, so liegt er auf dem Kreise, ist $c>a$, so liegt er innerhalb desselben. Entsprechend besteht die Lemniscate im ersten Falle aus n getrennten Ovalen, im zweiten Falle aus solchen, die sich im Nullpunkte unter Winkeln $\frac{\pi}{n}$ treffen, im dritten Falle aus einem einzigen, den Nullpunkt umschliessenden Linienzuge. Stets sind n Symmetrieaxen vorhanden, ebenso n Brennpunkte, dagegen $2n$ Scheitelpunkte.

3. Die Scheitelpunkte des Kreises liegen für $c < a$ beide auf der Linie $\Phi = 0$, bei der entsprechenden Lemniscate liegen sie paarweise auf den Brennpunktradien, d. h. auf den Linien $\varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n}$.

Für $c > a$ liegt der eine Scheitelpunkt des Kreises auf der Linie $\Phi = 0$, der andere auf der Linie $\Phi = 180^0$, bei der entsprechenden Lemniscate also liegen n Scheitelpunkte auf den Linien $\varphi = \frac{2\varkappa\pi}{n}$, die andern auf den Linien $\varphi = \frac{(2\varkappa+1)\pi}{n}$. Letzteres sind die Winkelhalbirenden der Brennpunktradien.

4. Für $c < a$ findet man die beiden Werthe der Scheitelradien r, indem man in a) $\varphi = 0$ setzt, aus der Gleichung

$$r^n - a = \pm c,$$

für $c > a$ findet man die beiden Werthe aus den Gleichungen

$$r^n - a = +c, \quad r^n + a = c,$$

indem man einmal $\varphi = 0^0$, das andere Mal $\varphi = 180^0$ setzt und im ersten Falle berücksichtigt, dass r^n grösser ist, als a.

5. Setzt man nun nach Obigem statt a die n^{te} Potenz des Brennpunktradius, etwa r_1^n, für c das constante Product $p_1 . p_2 \dots p_n$, so hat man für $c < a$

b) $$p_1 . p_2 \dots p_n = \pm (r^n - r_1^n),$$

für $c > a$

c) $$p_1 . p_2 \dots p_n = r^n \mp r_1^n.$$

In Worten: Bei den aus getrennten Ovalen bestehenden Lemniscaten n^{ter} Ordnung ist das constante Product gleich der Differenz zwischen den n^{ten} Potenzen der Scheitel- und Brennpunktradien; bei den aus einem Zuge bestehenden ist das constante Product gleich derselben Differenz für die Brennpunktscheitelgruppe, aber gleich der Summe jener Potenzen für die andere Scheitelgruppe.

Hierin liegt eine neue Fassung des Cotesischen Theorems, die weniger umständlich ist, als die in den Lehrbüchern gebräuchliche.

6. Schon oben war gezeigt, dass die confocalen Lemniscaten $p_1 . p_2 \dots$ $\dots p_n = c$ und ihre Orthogonalen $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n = \gamma$, sobald alle Radii vectores von der Punktgruppe $\sqrt[n]{a+bi}$ ausgehen, isothermische Curvensysteme bilden. Folgen die Parameter der Hyperbeln in arithmetischer Reihenfolge aufeinander, 0, α, 2α, ..., die der Lemniscaten in geometrischer, e^0, e^β, $e^{2\beta}$, ..., so erhält man die Eintheilung der Ebene in rechtwinklige Flächenräume, die der Aehnlichkeit zustreben; ist aber $\alpha = \beta$, so ergiebt sich die quadratische Eintheilung. Für $n = 2$ erhält man das bekannte System der Interferenzlemniscaten und Polarisationshyperbeln optisch zweiaxiger Krystalle.

7. Die Gleichung der isogonalen Trajectorien concentrischer Kreise,

$$\varrho = c\varkappa^{\vartheta},$$

bezogen auf das Centrum, stellt logarithmische Spiralen dar. Die isogonalen Trajectorien der Confocalschaar der Lemniscaten n^{ter} Ordnung und ebenso die des Hyperbelbüschels n^{ter} Ordnung haben demnach die Gleichung

d) $$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = c \cdot \varkappa^{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n}.$$

Sie haben die Eigenschaft, dass das Product der Radii vectores geometrisch zunimmt, wenn die Winkelsumme arithmetisch wächst. Die Eckpunkte des besprochenen Netzes liegen auf solchen Curven. Ihre Eigenschaften lassen sich aus denen der logarithmischen Spiralen oder direct aus denen der geraden ableiten, und zwar nach der Methode, die der Verfasser in mehreren Abhandlungen dieser Zeitschrift angewendet hat. Logarithmirt man die Gleichung und setzt man für den Logarithmus des Productes den aus § 3, Gleichung 6) oder 8), folgenden Ausdruck, für die Winkelsumme den aus § 2, Gleichung 2) oder 5), folgenden in geeigneter Weise ein, so lässt sie sich auf die isothermische Form bringen, in der sie der Gleichung $\Delta U = 0$ genügt.

8. Das Kreisbüschel durch zwei Punkte $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ hat seine Mittelpunkte auf einer geraden Linie, die orthogonale Kreisschaar gleichfalls. Aus der entsprechenden Figur ergiebt sich Folgendes:

Durch die Punkte $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1 i}$ lässt sich ein Lemniscatenbüschel n^{ter} Ordnung legen, welches seine Brennpunkte stets auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung hat. Die Orthogonalschaar besteht aus Lemniscaten n^{ter} Ordnung, deren Brennpunkte gleichfalls auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung liegen. Jede der genannten Hyperbeln gehört zur andern Schaar. Beide Schaaren sind isothermische Curvensysteme.

9. Das genannte Kreisbüschel hat die Gleichung $\varphi - \chi = \gamma$, die orthogonale Kreisschaar die Gleichung $\frac{p}{q} = c$. Folglich:

Die Gleichungen

e) $$(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) - (\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n) = \gamma,$$

f) $$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = c,$$

wobei die Radii vectores von den Punktgruppen $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1 i}$ ausgehen, stellen ein Lemniscatenbüschel und die Orthogonalschaar von Lemniscaten n^{ter} Ordnung dar. In Worten:

Verbindet man die Ecken zweier concentrischer regelmässiger Polygone gleicher Seitenzahl, die beliebig gegen einander verdreht sind, mit einem beweglichen Punkte und

bewegt sich derselbe so, dass das Product der einen Strahlengruppe, dividirt durch das der andern, einen constanten Werth giebt, so bewegt er sich auf einem Individuum der Lemniscatenschaar n^{ter} Ordnung. Bewegt er sich aber so, dass die Winkelsumme der einen Strahlengruppe, vermindert um die der andern, Constantes giebt, so beschreibt er ein Individuum des Lemniscatenbüschels n^{ter} Ordnung.

10. Concentrirt sich die eine Punktgruppe in den Nullpunkt, ist also z. B. $a+bi=0$, so lauten die Gleichungen:

g) $$n.\varphi-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)=\gamma,$$

h) $$\frac{p^n}{q_1\cdot q_2\cdots q_n}=c.$$

Auch diese sind leicht in Worte zu kleiden.

11. Die isogonalen Trajectorien der Curven e) und f) haben die Gleichung

i) $$\frac{p_1\cdot p_2\cdots p_n}{q_1\cdot q_2\cdots q_n}=c\,.\,\varkappa^{(\varphi_1\cdot\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)}.$$

12. Die isogonalen Trajectorien der Curven g) und h) haben die Gleichung

k) $$\frac{p^n}{q_1\cdot q_2\cdots q_n}=c\,.\,\varkappa^{n\varphi-(\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n)}.$$

13. Transformation mittels reciproker Radii vectores vom Nullpunkte aus (isothermische Spiegelung gegen einen Kreis $r=c$ um den Nullpunkt) verwandelt jedes Kreisbüschel durch zwei Punkte wiederum in ein solches, die Orthogonalschaar des ersteren in die des zweiten. Folglich:

Dieselbe Transformation verwandelt ein Büschel von Lemniscaten n^{ter} Ordnung durch die Punktgruppen $\sqrt[n]{a+bi}$ und $\sqrt[n]{a_1+b_1i}$ wiederum in ein solches durch die reciproken Punkte $\frac{c^2}{\sqrt[n]{a+bi}}$ und $\frac{c^2}{\sqrt[n]{a_1+b_1i}}$, die Orthogonalschaar der ersten Schaar geht dabei in die der zweiten über. Ist einer der Punkte, z. B. $a+bi$, der Nullpunkt, so erhält man durch diese Transformation ein Büschel von Hyperbeln n^{ter} Ordnung und die Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten. Die isogonalen Trajectorien behalten gleichfalls ihren Charakter stets bei.

14. Ohne Schwierigkeit lässt sich, wie oben, auch hier stets die Function ermitteln, welche die genannten Curvenschaaren in ein System paralleler Geraden $X=c$ verwandelt. Daraus ergiebt sich die Gleichung jeder Schaar in rechtwinkligen Coordinaten so, dass ihre linke Seite der Gleichung $\Delta u=0$ genügt. Ueberall handelt es sich also um Isothermenschaaren.

15. Unter den gelösten Wärmeaufgaben seien folgende genannt:

Werden in der Ebene zwei Individua der Schaar f) auf constanten Temperaturen erhalten, so sind nach dem Eintreten des stationären Zustandes die dazwischen liegenden Curven derselben Schaar Isothermen. Legt man den Punkt $a+bi$ ins Unendliche, so hat man die Lösung des Problems für confocale Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Eine von denselben kann man, indem man das Product gleich Null setzt, in die n Eckpunkte eines regulären Polygons verwandeln, die andere, indem man das Product gleich ∞ setzt, in den unendlichen Bereich verlegen. Auch dieser letzte Fall ist leicht zu deuten. Endlich ist noch der Fall gelöst, wo die Eckpunkte eines regulären Polygons auf constanter Temperatur gehalten werden, während die eines regulären Polygons gleicher Seitenzahl, welches gegen das erste verdreht, aber mit ihm concentrisch ist, eine andere constante Temperatur beibehalten.

§ 7. Andeutungen über weitere Consequenzen für die Geometrie der Ebene.

Wie aus der Geometrie der Geraden und des Kreises die lemniscatische Geometrie abzuleiten ist, darüber vergleiche man die Abhandlung im 21. Bande dieser Zeitschrift, wo stets an Stelle des Falles $n=2$ der allgemeinere vorliegende zu setzen ist. Gleichen Strecken entsprechen correspondirende Hyperbelbogen, congruenten Gebilden correspondirende, ähnlichen Gebilden solche, die sich aus correspondirenden nach dem Theilungsprincip der lemniscatischen Geometrie ableiten lassen. Auch die neuere Geometrie findet ihre Uebertragung, so erhalten z. B. die Doppelverhältnisse $\frac{r-p}{r-q}\cdot\frac{s-q}{s-p}$ und $\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)}\cdot\frac{\sin(\delta-\beta)}{\sin(\delta-\alpha)}$ die analogen Formen

$$\frac{r_1.r_2\ldots r_n-p_1.p_2\ldots p_n}{r_1.r_2\ldots r_n-q_1.q_2\ldots q_n}\cdot\frac{s_1.s_2\ldots s_n-q_1.q_2\ldots q_n}{s_1.s_2\ldots s_n-p_1.p_2\ldots p_n}$$

resp.

$$\frac{\sin[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)]}{\sin[\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)]}\times\frac{\sin[\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)]}{\sin[\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)]}.$$

Sämmtliche Sätze der Kreisverwandtschaft gehen in die entsprechenden der lemniscatischen Verwandtschaft n^{ter} Ordnung über, welche sich stets durch eine Function von der Form

$$z=\sqrt[n]{\frac{aZ^n+b}{cZ^n+d}}$$

vermitteln lässt, was bei der Kreisverwandtschaft durch $z=\frac{aZ+b}{cZ+d}$ geleistet wird. Wie sich ferner jede Kreisverwandtschaft durch

eine Transformation mittels reciproker Radii vectores gegen einen bestimmten Kreis ersetzen lässt, so reducirt sich die lemniscatische Verwandtschaft n^{ter} Ordnung auf die isothermische Spiegelung gegen eine bestimmte Lemniscate mit dem Nullpunkte als Centrum.

Diese Verwandtschaft ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, da zwei Ebenen auch so auf einander bezogen werden können, dass jeder Lemniscate n^{ter} Ordnung der einen mit einem bestimmten Punkte als Centrum eine solche m^{ter} Ordnung der andern mit einem bestimmten Punkte als Centrum entspricht. Diese Beziehung wird vermittelt durch die Function

$$z = \varkappa + \sqrt[m]{\frac{aZ^n + b}{cZ^n + d}}.$$

Durch dieselbe wird z. B. auch das Innere einer Lemniscate n^{ter} Ordnung so auf das Innere oder Aeussere einer solchen Curve m^{ter} Ordnung conform abgebildet, dass die Brennpunkte der einen einem willkürlichen Punktsystem $\sqrt[n]{\alpha + \beta i}$ innerhalb, resp. ausserhalb der andern entsprechen.

Zahlreiche Abbildungsaufgaben lassen sich sofort synthetisch lösen. Z. B. wird die Aufgabe, den von zwei Lemniscaten n^{ter} Ordnung des Büschels und zweien der Orthogonalschaar begrenzten Flächenraum auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, durch eine Function von folgender Form gelöst:

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{\varkappa}\,.\,\sin am\left[g + lg\dfrac{az^n + b}{cz^n + d}\right]}{i + \sqrt{\varkappa}\,.\,\sin am\left[g + lg\dfrac{az^n + b}{cz^n + d}\right]} \quad mod\,\varkappa.$$

Nicht ohne Interesse sind die Uebertragungen der Steiner'schen Schliessungsprobleme, von denen eines auf eine Fläche führt, welche die Dupin'sche Cyclide als Specialfall enthält. —

Um auch die Abbildung $x + yi = (X + Yi)^{-\frac{1}{n}}$ für n ganz, positiv und reell zu erledigen, hat man nur die Bemerkung nöthig, dass die Transformation mittels reciproker Radii vectores Kreise in Kreise, folglich jedes zum Nullpunkt gehörige Lemniscatensystem gleichfalls in ein solches verwandelt, und zwar geht das Büschel durch $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ über in das durch $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a + bi}}$ und $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1 + b_1 i}}$ gehende, wenn 1 der Radius des spiegelnden Kreises ist. Da die Kreisverwandtschaft vollständig durchführbar ist, so ist es auch die Verwandtschaft $x + yi = (X + Yi)^{-\frac{1}{n}}$ für ganzes, positives, reelles n.

Die Abbildung $z = Z^n$ für ganzes, positives und reelles n verwandelt Gerade und Kreise in Curven, deren Polargleichungen sich von denen

der Lemniscaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung nur dadurch unterscheiden, dass $\frac{1}{n}$ an Stelle von n zu setzen ist. Sie sind von geringerem Interesse, da die Focaleigenschaften nicht erhalten bleiben und da sie im Allgemeinen mehrerer Riemann'scher Blätter bedürfen. Der Fall $n=2$ verwandelt bekanntlich orthogonale Parallelenschaaren in orthogonale Schaaren von Parabeln mit dem Nullpunkte als Brennpunkt und gewisse gleichseitige Hyperbeln in Gerade.

Mit Hilfe dieser Bemerkungen ist man im Stande, die Gleichung jeder Curve in lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung mit beliebigen Brennpunkten $\sqrt[n]{a+bi}$ darzustellen. Beispielshalber soll dies mit der Geraden $X=a$ für $n=2$ und die Brennpunkte $\sqrt[n]{e}$ (e reell) durchgeführt werden.

Die Gleichung geht durch die Abbildung $z=Z^2$ über in die der Parabel $\sqrt{r}\,.\cos\frac{\varphi}{2}=a$ oder $r(1+\cos\varphi)=2a^2$, oder, wenn der Coordinatenanfang nach e verlegt wird, in

$$\varrho\cos\vartheta+e+\sqrt{\varrho^2+2e\varrho\cos\vartheta+e^2}=2a^2.$$

Diese Gleichung geht durch die Abbildung $z=\sqrt{Z}$, die auf den alten Nullpunkt zu beziehen ist, wieder über in die Gleichung der Geraden, jedoch in den verlangten lemniscatischen Coordinaten, so dass die Form ist

$$p\,.\,p_1\cos(\vartheta+\vartheta_1)+e+\sqrt{p^2\,.\,p_1{}^2+2pp_1e\cos(\vartheta+\vartheta_1)+e^2}=2a^2.$$

Auch die Abbildung $z=\sqrt[\frac{n}{m}]{Z}=Z^{\frac{m}{n}}$ bietet nichts wesentlich Neues. Der Sector $\frac{360^0}{m}$ geht über in den Sector $\frac{360^0}{n}$, die n-fache Ebene in die m-fache verwandelt. Ist $\frac{n}{m}>1$, so wird die Umgebung des Nullpunktes unendlichfach vergrössert, die des unendlichen Punktes unendlichfach verkleinert dargestellt. Für $\frac{n}{m}<1$ ist's umgekehrt. Lemniscaten und Hyperbeln m^{ter} Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[m]{a+bi}$ gehen in solche n^{ter} Ordnung mit den Brennpunkten $\sqrt[n]{a+bi}$ über, Kreise und Gerade hingegen in Lemniscaten und Hyperbeln $\frac{n}{m}{}^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Polargleichungen von den früheren nur darin differiren, dass $\frac{n}{m}$ an Stelle von n zu setzen ist. Die n Brennpunkte liegen dabei in m Blättern. Die Focaleigenschaften fallen selbstverständlich bei den letzteren Curven fort.

Die Verwandtschaft lässt sich aber trotzdem vollständig durchführen, da die Relationen des Systems m^{ter} Ordnung in die des Systems n^{ter} Ordnung übergehen.

Anders ist dies bei der Abbildung $z=\sqrt[n]{Z}$ mit irrationalem Exponenten, da in diesem Falle die Anzahl der Brennpunkte unendlich gross wird. Die Einfachheit der Uebertragung der Entfernung $r=c$ in die lemniscatische Entfernung $p_1 . p_2 \ldots p_n = c$, ebenso die des Winkels $\vartheta=\gamma$ in die Relation $\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n=\gamma$ hört hier auf. Demnach stösst die Uebersetzung der Sätze der Geometrie des Maasses in diesem Falle auf Schwierigkeiten, während zahlreiche Sätze der Geometrie der Lage leicht übertragen werden können.

Auf die Betrachtung imaginärer Wurzelexponenten soll hier verzichtet werden.

Die vollständige Durchführbarkeit der Verwandtschaft $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$ ist also nachgewiesen für jedes reelle und rationale n.

§ 8. Folgerungen für die Theorie der allgemeinen Kegelfläche.

Die Geometrie der allgemeinen Kegelfläche gründete sich bisher auf das Coordinatensystem der Geraden durch die Spitze und ihre Orthogonalschaar, dessen Abwickelung in die Ebene auf Gerade und concentrische Kreise führt. Von den übrigen Isothermenschaaren hatten nur noch die isogonalen Trajectorien jener Linien, die sich zu logarithmischen Spiralen abwickeln, Beachtung gefunden. So beschränkte sich auch die Abbildung der Ebene und Kugelfläche auf die Oberfläche des Kegels, welche J. H. Lambert in den „Anmerkungen und Zusätzen zur Entwerfung der Erd- und Himmelskarten" im 3. Theile der „Beiträge zum Gebrauche und der Anwendung der Mathematik" (1772) gab, auf den Specialfall, wo die orthogonalen Kreisschaaren der Kugel dem obengenannten System entsprechen.

Die allgemeine Abbildung von Ebene und Kugel auf dem Kegel ist zwar nichts Neues, jedoch sind die geometrischen Consequenzen noch nicht gezogen und die der Abbildung entspringenden isothermischen Coordinatensysteme noch nicht behandelt worden.

Von einem gewissen Abschlusse der Geometrie einer Fläche kann offenbar nur dann die Rede sein, wenn die Grundpunkte der verschiedenen Coordinatensysteme von der Bedingung einer speciellen Lage befreit sind, wie dies z. B. für die Kugelfläche der Fall ist, auf der man den Schnittpunkten der Kreisbüschel oder zwei Brennpunkten eines Systems sphärischer Kegelschnitte beliebige Lagen geben kann. Für das dreiaxige Ellipsoid ist man (bei dem System der Krümmungslinien) auf die Nabelpunkte als Fundamentalpunkte des Coordinatensystems beschränkt,

bei dem Kegel musste eben die Spitze zum Ausgangspunkte genommen werden.

Die kürzesten Linien auf der Kegelfläche, deren Abwickelung Gerade giebt, sind zum Coordinatensystem, besonders zum isothermischen, für den einschichtigen Kegel unbrauchbar, da sie sich selbst schneiden. Dasselbe gilt von den Curven, die sich in der Abwickelung als Kreise darstellen.

Aus den oben gegebenen Sätzen aber kann man die Verallgemeinerung der Geometrie der Kegelfläche leicht ableiten.

Der einschichtige Kegel lässt sich zum Sector $\frac{360^0}{n}$ abwickeln, wo n reell und >1 ist. Auf diesen Sector kann man die ganze Ebene mittels der Abbildung $z=\sqrt[n]{Z}$ conform übertragen, wobei Gerade durch einen beliebigen Punkt $a+bi$ in Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch den Sectorpunkt $\sqrt[n]{a+bi}$, Kreise um $a+bi$ in confocale Lemniscaten n^{ter} Ordnung um den Punkt $\sqrt[n]{a+bi}$ übergehen, während der Nullpunkt und der unendliche Punkt der Ebene dem Mittelpunkte und unendlichen Punkte des Sectors entsprechen. Man kann nun den Sector in einen Kegel verwandeln oder, um bei der Riemann'schen Vorstellungsweise zu bleiben, man kann die z-Ebene so zum Kegel mit dem Nullpunkte als Spitze zusammenrollen, dass jeder Sector eine Schicht des Kegels giebt. Dann fallen die Zeichnungen der einzelnen Sectoren, d. h. die verschiedenen Arme der Lemniscaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung genau auf einander, so dass geometrisch jede der Curven aus einem einzigen Zuge mit nur einem Brennpunkte besteht.

Beiläufig sei bemerkt, dass die scheinbare Wichtigkeit des Nullpunktes der z-Ebene, der vorher als Mittelpunkt des Polygons der Brennpunkte auftrat und die Isothermenschaaren zu specialisiren schien, hier vollständig aufgehoben ist. Die Spitze des Kegels behält nur die in der Natur desselben begründete Sonderstellung, dass er jeder die erstere durchschneidenden Curve dort einen Eckpunkt giebt, wodurch die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen mit der Originalebene gestört erscheint, und wobei zugleich das Vergrösserungsverhältniss gegen letztere unendlich gross wird.

Behält man nun für die in Rede stehenden Kegelcurven die Namen Hyperbeln und Lemniscaten n^{ter} Ordnung bei — wobei darauf zu achten ist, dass für den Fall $n=2$ die gewöhnlichen ebenen Hyperbeln mit den vorliegenden nicht verwechselt werden dürfen —, so lässt sich im Allgemeinen jeder Satz der ebenen Geometrie der Lage auf die Kegelfläche übertragen. Die Uebertragung von Maassrelationen mittels der Focaleigenschaften der Lemniscaten

und Hyperbeln n^{ter} Ordnung ist aber auf den Fall zu beschränken, wo n eine ganze Zahl ist.

In diesem Falle erhalten die Kegelcurven folgende Bedeutung:

Man verbinde einen beliebigen Punkt des Kegels mi einem beweglichen Punkte desselben durch n kürzeste Linien (von denen die eine die Spitze nicht umschlingt, während die anderen es ein resp. mehrere Male thun). Soll dann der zweite Punkt sich so bewegen, dass das Product der kürzesten Linien constant bleibt, so ist sein geometrischer Ort eine Curve, die sich, in die Ebene abgewickelt, als Lemniscate n^{ter} Ordnung darstellt. Soll hingegen die Summe der Richtungswinkel der kürzesten Linien, gegen eine beliebige Tangente durch den ersten Punkt gemessen, constant bleiben, so entsteht eine Hyperbel n^{ter} Ordnung.

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen Focalsätze übertragen.

Eine Vorstellung von den verschiedenen Coordinatensystemen des Kegels für jedes reelle n erhält man z. B., wenn man die der Abhandlung über lemniscatische Geometrie im 21. Bande dieser Zeitschrift beigegebenen Figuren durch einen den Nullpunkt treffenden geradlinigen Schnitt halbirt und eine Hälfte zum Kegel zusammenrollt. In derselben Weise, wie dort, wird jeder Kegel durch solche Curvenschaaren in kleine „Quadrate" eingetheilt.

Das allgemeinste der hier zu behandelnden Systeme ist das Lemniscatenbüschel n^{ter} Ordnung durch zwei beliebige Punkte der Kegelfläche. Man erhält dieses und die orthogonale Lemniscatenschaar, indem man z. B. den Globus mit dem Netze der geographischen Linien so auf dem Kegel conform und eindeutig abbildet, dass die Pole zwei beliebigen Punkten der Kegelfläche entsprechen.

Ist der eine dieser Punkte der unendliche, so entsteht das System der Hyperbeln n^{ter} Ordnung durch einen beliebigen Punkt der Kegelfläche und die Orthogonalschaar confocaler Lemniscaten. Fällt der Punkt hingegen in die Spitze, so erhält man das Büschel der Schleifenlemniscaten.

Liegt ein Punkt in der Spitze, einer im Unendlichen, so entsteht das System der Geraden durch die Spitze und die Orthogonalschaar, deren Abwickelung auf Kreise führt. Dieser Fall giebt die gewöhnliche Uebertragung.

Eine besondere Betrachtung verdient ein anderer Fall, wo beide Büschelpunkte im Unendlichen liegen und wobei man die beiden Orthogonalschaaren von Hyperbeln n^{ter} Ordnung erhält. Durch diese Abbildung erhält man gleichzeitig die Uebertragung der Mercator-Karte auf den Kegel. Die Kugelfläche wird aber hier

unendlich oft und zwar periodisch auf der Kegelfläche abgebildet, so dass es sich um eine andere Function handelt. Diese Function, welche die stereographische Projection des Ptolemäus mit dem Nullpunkte als Pol unendlich oft auf die Ebene, dann auf den Sector $\frac{360}{n}$ derselben und den entsprechenden Kegel überträgt, ist

$$z = \sqrt[n]{lg Z}.$$

In der Nähe der Spitze erscheint das Ganze sehr verschoben, mit der Entfernung von der Spitze nähert sich aber die Darstellung mehr und mehr der des Mercator. Man vergl. hier die Abhandlung über „logarithmische Abbildung“ im 16. Bande dieser Zeitschrift. In diesem Falle gehen übrigens die Loxodromen der Kugel in „Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ auf der Kegelfläche über.

Dass auch die Schaaren der Lemniscaten $2n^{ter}$, $3n^{ter}$ Ordnung etc. auf der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ als Isothermen zu betrachten sind, ist selbstverständlich.

Unter gewissen physikalischen Voraussetzungen entspricht jedem isothermischen Probleme, welches für die Ebene gelöst ist, ein solches auf dem Kegel. Es handelt sich dabei um einen stationären Wärmezustand, dem eine solche Fläche unter gegebenen Bedingungen zustrebt. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Wärme sich nur auf der Fläche selbst, nicht aber mittels Strahlung durch den Hohlraum des Kegels verbreitet.

Besonders instructiv ist folgendes Beispiel: Ein beliebiger Punkt der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ werde auf constanter Temperatur gehalten, der unendliche Bereich (oder statt dessen eine lemniscatische Curve n^{ter} Ordnung, die den Punkt in oben besprochener Weise zum Brennpunkt hat) auf einer andern constanten Temperatur. Welches sind Isothermen? Nach Obigem sind die isothermischen Curven die zugehörigen Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Die Curven, deren Abwickelung auf Kreise führt, spielen hierbei durchaus keine Rolle, da die Erwärmung rings um den Kegel wandert, was besonders in der Nähe der Spitze von Einfluss ist. Je kleiner die Ovale und je weiter sie von der Spitze entfernt sind, um so mehr ähneln sie Kreisen, sie degeneriren mit der Annäherung an die Spitze; ist dieselbe aber überschritten, so tritt die Annäherung an die Kreisgestalt wieder in wachsendem Grade ein.

Wird ein Kegel längs der beiden Geraden eines Hauptschnittes auf constanter Temperatur erhalten, und geschieht dasselbe mit dem unendlichen Bereiche, so erledigt sich das Problem durch die Hyperbelschaar n^{ter} Ordnung.

Weitere Beispiele folgen aus § 6.

Sollen zwei Kegel von $\frac{360^0}{m}$ und $\frac{360^0}{n}$ eindeutig und conform so auf einander abgebildet werden, dass drei willkürlichen Punkten des einen drei willkürliche des andern entsprechen und der Innenraum der durch die drei ersten gelegten Lemniscate m^{ter} Ordnung auf das Innere oder Aeussere der durch die drei anderen gehenden Lemniscaten n^{ter} Ordnung übertragen wird (wodurch die Willkür erschöpft ist), so geschieht dies durch die Function

$$z = \sqrt[m]{\frac{a Z^m + b}{c Z^m + d}}.$$

Wie also die Kreisverwandtschaft alle eindeutigen conformen Uebertragungen von Kugel auf Kugel oder von Ebene auf Ebene vermittelt, so entspricht die lemniscatische Transformation $z = \sqrt[n]{\frac{a Z^m + b}{c Z^m + d}}$ allen eindeutigen Verwandtschaften der Kegelflächen verschiedenen Sectorenwinkels unter einander.

Die lemniscatische Verwandtschaft ist aber in demselben Maasse umfassender, als die Kreisverwandtschaft, wie die genannte Function allgemeiner ist, als $z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$.

Wie die Sätze der Kreisverwandtschaft auf die eindeutige Verwandtschaft der Kegelflächen übertragen werden, ergiebt sich aus Obigem. — Die gesammte ebene Geometrie ist schliesslich nur ein specieller Fall der behandelten Geometrie der Kegelfläche.

§ 9. Die Kinematik des lemniscatisch-veränderlichen Systems n^{ter} Ordnung und der Kegelfläche.

1. Die Bewegung eines Punktes der Z-Ebene auf beliebiger Curve mit der constanten Geschwindigkeit $V = c$ verwandelt sich durch die Abbildung $z = \sqrt[n]{Z}$ in die der entsprechenden Punkte der z-Ebene resp. der Kegelfläche auf den entsprechenden Curvenarmen, deren Geschwindigkeit ist

$$v = \frac{c}{n} R^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{c}{n} r^{1-n}.$$

Hier ist $\frac{1}{n} R^{n-1}$ der absolute Betrag des Differentialquotienten der abbildenden Function, r hingegen die Entfernung des abhängigen Punktes vom Nullpunkte, resp. der Kegelspitze. Von dieser allein ist die Geschwindigkeit abhängig.

Für $n > 1$ wächst sie mit der Annäherung an den Nullpunkt und ist in letzterem unendlich gross; nach dem unendlichen Bereiche hin nähert sie sich hingegen der Null. Für $n > 1$ ist's umgekehrt.

Soll die Geschwindigkeit auch hier constant sein, so muss r constant sein, beide sich entsprechende Bewegungen müssen also in einem Kreise um den Nullpunkt erfolgen.

2. Ist die Bewegung des ersten Punktes gleichmässig beschleunigt, also $V = gt$, so ist die des abhängigen Punktes

$$v = \frac{gt}{n} R^{\frac{1}{n}-1} = \frac{gt}{n} r^{1-n},$$

also von zwei Variabeln abhängig. Soll auch die des letzteren Punktes gleichförmig beschleunigt sein, so muss wiederum Kreisbewegung um Null stattfinden.

3. Multiplicirt man die allgemeine Geschwindigkeit $V = \frac{ds}{dt}$ mit $\frac{1}{n} R^{\frac{1}{n}-1}$ resp. $\frac{1}{n} r^{1-n}$, so erhält man ebenfalls die des abhängigen Punktes.

4. Der Richtungsunterschied beider Bewegungen ergiebt sich, wie oben besprochen, aus der Abweichung des Differentialquotienten der ableitenden Function als $(1-n)\varphi$.

5. Bewegt sich der erste Punkt auf Gerader oder Kreis, so wandert der zweite nach Massgabe des oben Gesagten auf Hyperbel oder Lemniscate n^{ter} Ordnung, und zwar bei constanter Geschwindigkeit der ersteren so, dass in gleichen Zeiträumen correspondirende Bogen zurückgelegt werden.

6. Ist z. B. die Bewegung des ersten Punktes eine geradlinige mit constanter Geschwindigkeit, so ändert sich seine Entfernung ϱ von einem Punkte $a + bi$ der Geraden gleichmässig. Für ganzes positives n folgt daraus, dass bei der entsprechenden Hyperbelbewegung sich das Product $p_1 . p_2 \ldots p_n$, bezogen auf $\sqrt[n]{a+bi}$, gleichmässig ändert.

7. Geschieht die Bewegung des ersten Punktes auf einem Kreise mit constanter Geschwindigkeit, so ist die Abweichung ϑ des Kreisradius einer gleichmässigen Aenderung unterworfen. Bei der entsprechenden Lemniscatenbewegung nimmt die Summe $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ gleichmässig zu oder ab, sobald nur n ganz, positiv und reell ist. Aehnliches gilt von der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

8. Das Gesagte reicht hin, die Kinematik des Punktes in die lemniscatische Kinematik n^{ter} Ordnung und in die der Kegelfläche zu übertragen.

9. Das starre ebene Gebilde geht durch die Transformation $z = \sqrt[n]{Z}$ in das lemniscatisch-veränderliche n^{ter} Ordnung über. Während in

ersterem alle geradlinigen Entfernungen constant bleiben, ist dies im andern nicht der Fall, sondern Hyperbeln n^{ter} Ordnung verbleiben Curven dieses Charakters, erleiden aber Gestaltveränderungen, bei denen jedoch die oben betrachteten Maassbeziehungen und ebenso alle Winkel erhalten bleiben.

10. Wird die gesammte Z-Ebene geradlinig und parallel zu sich selbst verschoben, so wandern entsprechend in der z-Ebene oder der Kegelfläche $\frac{360^0}{n}$ alle Punkte auf Hyperbeln n^{ter} Ordnung, und wie dort eine gewisse Parallelenschaar in sich selbst gleitet, so geschieht dies hier mit einer bestimmten Hyperbelschaar. Jede der anderen Hyperbeln degenerirt beim Passiren des Nullpunktes in n Gerade.

11. Dreht sich die Z-Ebene um einen ihrer Punkte, so bewegen sich die Punkte der abhängigen Fläche auf confocalen Lemniscaten n^{ter} Ordnung. Alle Curven dieser Art, ebenso die Hyperbeln n^{ter} Ordnung, behalten ihren Charakter bei, eine bestimmte Schaar confocaler Lemniscaten n^{ter} Ordnung gleitet in sich selbst. Für $n=2$ wird dadurch die bekannte optische Erscheinung an Salpeterkrystallen dargestellt.

12. Eine gewisse Bewegung in der Z-Ebene wird durch die Wellenkreise versinnlicht, die auf der Wasserfläche durch einen Steinwurf entstehen. Die entsprechende Bewegung in der z-Ebene ist derartig, dass jeder Punkt sich auf einer Hyperbel n^{ter} Ordnung bewegt und dass die orthogonalen confocalen Lemniscaten gesetzmässig anschwellen.

13. Combinirt man in der Z-Ebene constante Rotation und Anschwellen der Kreise nach dem Gesetz der geometrischen Reihe, so bewegt sich jeder Punkt auf logarithmischer Spirale, während in der z-Ebene isogonale Trajectorien von der Gleichung

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = c\,\varkappa^{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n}$$

zurückgelegt werden, die gleichzeitig in sich selbst gleitende Curven sind.

Auch der Bewegungszustand des kreisverwandt-veränderlichen Systems ist leicht zu übertragen. Im Uebrigen vergleiche man die Andeutungen, welche in § 7 der citirten Abhandlung im 21. Bande dieser Zeitschrift gegeben sind.

Hagen, im Januar 1880.

XII.

Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven.

Von

Dr. CHR. WIENER,

Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule in Karlsruhe.

Hierzu Taf. V Fig. 3 u. 4.

1. Dass die gemeine Epi- und Hypocykloide auf zwei Weisen, nämlich durch das Rollen zweier verschiedener Kreise auf ein und dem selben festen Kreise entstehen können, ist längst bekannt. Dass aber auch die geschweiften und verschlungenen Arten dieser Curven auf zwei Weisen entstehen können, scheint noch nicht bemerkt worden zu sein. Im Gegentheil behauptet Weissenborn* ausdrücklich die Verschiedenheit der auf verschiedene Weisen entstehenden Curven, und begründet dadurch die Nothwendigkeit des von ihm neu eingeführten Namens „Pericykloide“, vergleicht freilich dabei nur die sogenannte verlängerte und verkürzte Pericykloide bezw. mit der verlängerten und verkürzten Hypocykloide, welche allerdings verschieden sind. Es wird sich aber herausstellen, dass die sogenannte verlängerte und verkürzte Epicykloide bezw. mit einer verkürzten und verlängerten Pericykloide übereinstimmt, und

* Weissenborn, Die cyklischen Curven, 1856, S. 3 (Anm). — Jetzt, da ich im Begriffe bin, diesen Aufsatz abzusenden, kommt mir ein Buch von Proctor: „A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves, London 1878“ in die Hand, worin ich S. 154—157 bewiesen finde, dass jede epicyklische Curve (welche von einem Punkte beschrieben wird, der sich gleichförmig auf einem Kreise bewegt, dessen Mittelpunkt gleichförmig auf einem festen Kreise derselben Ebene fortschreitet) eine Epitrochoide oder eine Hypotrochoide ist, sowie ferner, dass eine solche Uebereinstimmung in doppelter Weise, d. h. mit zweierlei festem und wälzendem Kreise stattfindet. Dieser Satz ist wesentlich der hier behandelte. Da jedoch jener Beweis auf die vorher erörterten Eigenschaften der epicyklischen Curven gegründet ist, der hier gegebene dagegen unmittelbar die Beziehungen der beiden Entstehungsweisen aufsucht und sie vollständiger darstellt, als es dort geschieht, so dürfte die Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit gerechtfertigt und dazu zeitgemäss erscheinen, da sie einige der gebräuchlichen Bezeichnungen und Begriffsbestimmungen als unbegründet nachweist.

ebenso die verlängerte Hypocykloide mit einer verkürzten Hypocykloide, so dass sich der Name „Pericykloide" als überflüssig und die Bezeichnungen „verlängert" und „verkürzt" als im Widerspruche mit sich selbst ergeben werden.

Erklären wir zuerst die im Folgenden gebrauchten Benennungen. Eine cyklische Curve oder Radlinie ist eine Curve, welche von einem Punkte beschrieben wird, der fest mit einem Kreise w verbunden ist, während dieser auf einem in derselben Ebene liegenden festen Kreise f ohne Gleiten hinrollt oder hinwälzt. Unter diesen Kreisen ist auch die gerade Linie eingeschlossen. Eine cyklische Curve heisst eine Cykloide, wenn f eine Gerade und w ein Kreis, eine Kreisevolvente, wenn f ein Kreis und w eine Gerade ist, eine Epicykloide, wenn f und w Kreise sind und dabei w ausserhalb f liegt, eine Hypocykloide, wenn f und w Kreise sind und dabei w innerhalb f liegt. Ferner unterscheidet man nach der Lage des beschreibenden Punktes. Liegt derselbe auf w, so heisst die cyklische Curve gemein oder gewöhnlich; liegt er aber ausserhalb w, so heisst die Curve geschweift oder verschlungen, je nachdem der beschreibende Punkt mit dem Mittelpunkte M des f auf entgegengesetzter oder auf übereinstimmender Seite von w liegt. Es sind daher 4.3 oder 12 Arten unterschieden.

Noch sei erwähnt, dass die geschweiften und verschlungenen Curven auch Trochoiden, Epitrochoiden und Hypotrochoiden genannt werden.

Der vorhin erwähnte Name „Pericykloide" wird von Weissenborn* einer cyklischen Curve beigelegt, wenn w ausserhalb f, aber f innerhalb w liegt; dieser Schriftsteller und andere nennen eine der Curven verlängert oder verkürzt, je nachdem der beschreibende Punkt ausserhalb oder innerhalb w liegt, während Eytelwein** u. A. gerade umgekehrt die Namen „verkürzt" und „verlängert oder gedehnt" anwenden, wodurch aber jedesmal, wie schon angeführt, ein und derselben Curve widersprechende Namen zugeschrieben sind.

2. Die aufzusuchende doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verlängerten Epi- und Hypocykloiden ist eine Verallgemeinerung derjenigen der gemeinen Curven, welche durch folgenden bekannten Satz ausgesprochen wird: „Theilt man den Durchmesser AB eines festen Kreises durch einen Punkt C in zwei Theile AC und BC, beschreibt über jedem Theile als Durchmesser einen Kreis, betrachtet jeden derselben als wälzenden Kreis und C als beschreibenden Punkt, so entstehen zusammenfallende cyklische Curven, und zwar eine Epi- oder eine Hypocykloide, je nachdem C ein äusserer oder ein innerer Theilungspunkt

* a. a. O. S. 2.

** Eytelwein, Statik fester Körper, 1808, 3. Bd. S. 27 flgg.

von AB ist.“ Bei der Verallgemeinerung wird bei beiden Entstehungsweisen ausser dem wälzenden auch der feste Kreis ein wechselnder sein.

3. Für die Untersuchung der verallgemeinerten cyklischen Curven zeigt die Fig. 3 die Epicykloide, die Fig. 4 die Hypocykloide, und zwar in beiden Fällen die geschweifte Curve. Die Untersuchung wird unabhängig von diesen besonderen Fällen geführt und erstreckt sich auf beide Figuren zugleich. Es sei f der feste, w der wälzende, b der beschreibende, d. i. der concentrisch mit dem wälzenden durch den beschreibenden Punkt gelegte Kreis, der Mittelpunkt von f sei M, derjenige von w und b sei M'. A' sei der Berührungspunkt von f und w; die Mittelpunktslinie MM' schneide b in den Punkten A und B'; A sei der dem A' nähere, so dass $M'A$ den entgegengesetzten Sinn wie $A'M'$ besitzt. A sei die Anfangslage des beschreibenden Punktes. Wir wollen auf MM' den Sinn MA' als den positiven annehmen und die Halbmesser der drei Kreise f, w und b setzen:

$$MA' = r, \quad A'M' = r', \quad M'A = B'M' = r''.$$

r ist daher stets positiv, r' und r'' haben stets entgegengesetzte Vorzeichen. Wenden wir die Kästner'sche Regel der Vorzeichen an (wornach auf einer geraden Linie bei jedem Sinne der Bestandtheile $AB = -BA$ und $AB + BC = AC$ gilt), so ist

1) $$MM' = MA' + A'M' = r + r'.$$

4. Die cyklische Curve c berührt mit allen ihren Scheiteln in Abwechselung die beiden Kreise, welche aus M an den beschreibenden Kreis b berührend in A, bezw. in B' gelegt sind und von denen der letztere zur Hälfte als $B'B_1$ gezeichnet ist. Innerhalb des von ihnen begrenzten Ringes liegen b und c. Soll bei einer andern Entstehungsweise derselben Curve c ein anderer Kreis der beschreibende sein, so muss er innerhalb desselben Ringes mit Berührung seiner Grenzkreise liegen, so dass eine Lage b_1 desselben die Strecke B_1A zum Durchmesser, deren Mitte M_1 zum Mittelpunkte und deren Hälfte M_1A zum Halbmesser r''_1 hat. Es ist daher

2) $$MM_1 = MB_1 + B_1M_1 = \tfrac{1}{2}(B'B_1 + B_1A) = \tfrac{1}{2}B'A = M'A = r''$$

und aus 2) und 1)

3) $$r''_1 = M_1A = M_1M + MM' + M'A = MM' = r + r'.$$

Der neue feste Kreis f_1 muss M, der neue wälzende Kreis w_1 muss M_1 zum Mittelpunkte haben, ihr noch unbekannter Berührungspunkt (auf MM_1) sei A_1. Ihre Halbmesser sind dann, wenn wir in der Weise, wie bei r, r', r'' zählen, $r_1 = MA_1$, $r'_1 = A_1M_1$, und es gilt nach 2)

4) $$r'' = MM_1 = MA_1 + A_1M_1 = r_1 + r'_1 \text{ oder } \frac{r''}{r_1} - \frac{r'_1}{r_1} = 1.$$

5. Sollen nun die durch r, r', r'' und durch r_1, r'_1, r''_1 erzeugten cyklischen Curven, welche den Punkt A, der ein Scheitel ist, gemein

haben, ganz in c zusammenfallen, so müssen sie zunächst noch denselben benachbarten Scheitel B besitzen. Bei Entstehung eines halben Ganges einer c rollt aber ein halber Umfang des w oder w_1, d. i. $\pi r'$ oder $\pi r'_1$, auf einem gleichen Bogen des f, bezw. f_1 ab, so dass die durch diesen Bogen gemessenen Centriwinkel in beiden Fällen $\pi \frac{r'}{r}$ bezw. $\pi \frac{r'_1}{r_1}$ sind, welche Winkel sowohl vom Berührungspunkte A' bezw. A_1, als vom Mittelpunkte M' bezw. M_1 beschrieben werden. Da nun, wie aus der Figur leicht zu erkennen, M' und M_1 stets für den einen von zwei benachbarten Scheiteln auf entgegengesetzter, für den andern auf derselben Seite von M liegen, so muss der Unterschied oder die Summe der absoluten Werthe jener Winkel, je nachdem man das Abrollen oder die Drehung von M' und M_1 um M in demselben oder in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen lässt, $a\pi$ sein, wo a eine positive oder negative ungerade ganze Zahl bedeutet. Wegen dieses möglichen Wechsels von a giebt es unendlich viele cyklische Curven, welche mit einer gegebenen zwei benachbarte und dann alle Scheitel gemein haben. So können z. B. alle Scheitel A, B, ... der c in Fig. 4 mit denen B, A der c in Fig. 3 zur Deckung gebracht werden, obgleich beide c sonst verschieden sind.

Vergegenwärtigt man sich die beiden Fälle der doppelten Entstehung der gemeinen Epi- und Hypocykloide (Nr. 2), wobei $r = r_1$, und beachtet die Vorzeichen von r' und r'_1, so findet man jedesmal, dass $a = -1$ wird und dass

$$5) \qquad \pi \frac{r'}{r} + \pi \frac{r'_1}{r_1} = -\pi \quad \text{oder} \quad \frac{r'}{r} + \frac{r'_1}{r_1} = -1.$$

Lässt man diese Gleichung ausser den schon aufgestellten auch für die zwei verallgemeinerten cyklischen Curven gelten, so decken sich dieselben, wie sogleich gezeigt werden soll. Zunächst folgt durch Addition von 4) und 5)

$$6) \qquad \frac{r'}{r} + \frac{r''}{r_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{r''}{r'} = -\frac{r_1}{r}.$$

Aus den Gleichungen 4), 6), 3) ergiebt sich dann

$$7) \quad \frac{r'_1}{r_1} = \frac{r''}{r_1} - 1 = -\frac{r'}{r} - 1 = -\frac{r' + r}{r} = -\frac{r''_1}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{r'_1}{r''_1} = -\frac{r_1}{r}.$$

Endlich aus 6) und 7)

$$8) \qquad \frac{r''}{r'} = \frac{r'_1}{r''_1}.$$

Da nach Nr. 3 r' und r'' stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so gilt dies nach Gleichung 8) auch von r'_1 und r''_1, während dann nach 7) r und r_1 stets gleiche Vorzeichen besitzen, also beide positiv sind.

6. Um nun zu zeigen, dass unter Voraussetzung dieser Beziehungen auch die allgemeinen Punkte der durch r, r', r'' und durch r_1, r'_1, r''_1

erzeugten verallgemeinerten cyklischen Curven c sich decken, zerlegen wir die wälzende Bewegung in zwei drehende. Nennen wir die Richtung MA': $+x$, eine darauf Senkrechte MY: $+y$, und den Drehungssinn von $+x$ in $+y$ den positiven, so drehen wir zuerst die Kreise w und b um ihren Mittelpunkt M' um den Wälzungswinkel $+\varphi$, wobei der Berührungspunkt A' sich im Sinne von $+y$ oder $-y$ zu bewegen beginnt, je nachdem r' $(= A'M')$ negativ oder positiv ist. Es gelangt dabei $M'A'A$ nach $M'C'D'$, so dass $\angle A'M'C' = \angle A'M'D' = +\varphi$ und Bog. $A'C' = -r'\varphi$. Da wir nur einen halben Gang der c betrachten müssen, nehmen wir $\varphi < \pi$. Ferner tragen wir Bog. $A'C'$ auf f in einem von A' aus entgegengesetzten Sinne nach $A'E'$, so dass Bog. $A'E' = +r'\varphi$ und, weil $r = MA'$ stets positiv,

$$9)\qquad \angle A'ME' = +\varphi\frac{r'}{r}.$$

Sodann drehen wir w und b um M, bis $MA'M'$ nach $ME'N'$ und $\angle A'M'D'$ in $\angle E'N'D$ gelangt. Es ist daher

$$10)\qquad \angle E'N'D = \varphi,$$

und D ist ein allgemeiner Punkt der c.

Entsprechend drehen wir w_1 und b_1 um M_1 um den Winkel $-\varphi$, so dass M_1A_1A nach $M_1C_1D_1$ gelangt und $\angle A_1M_1C_1 = -\varphi$, Bog. $A_1C_1 = +r'_1\varphi$ ist; tragen Bog. A_1C_1 auf f_1 in entgegengesetztem Sinne nach A_1E_1, so dass Bog. $A_1E_1 = -r'_1\varphi$ und, da $r_1 = MA_1$ stets positiv,

$$11)\qquad \angle A_1ME_1 = -\varphi\frac{r'_1}{r_1}$$

ist, und drehen w_1 und b_1 um M, bis MA_1M_1 nach ME_1N_1 und $\angle A_1M_1D_1$ in

$$12)\qquad \angle E_1N_1D^* = -\varphi$$

gelangt. D^* ist dann ein allgemeiner Punkt der zweiten cyklischen Curve, von dem nun bewiesen werden soll, dass er mit D zusammenfällt.

Es ist, wenn wir die in Nr. 3 eingeführte Kästner'sche Regel der Vorzeichen auch auf Winkel anwenden,

$$\angle A'ME' + \angle E'ME_1 = \angle A'ME_1 = \angle A_1ME_1.$$

Letztere beiden Winkel sind gleich, weil nach Nr. 5 r und r_1 positiv sind, so dass MA' und MA_1 nicht nur der Richtung, sondern auch dem Sinne nach in einander fallen. Hiernach und nach den Formeln 11), 9) und 5) ist dann

$$\angle E'ME_1 = \angle A_1ME_1 - \angle A'ME' = -\varphi\frac{r'_1}{r_1} - \varphi\frac{r'}{r} = \varphi.$$

Es gilt daher nach dieser Formel, wonach auch $\angle E_1ME' = -\varphi$, nach 10) und 12)

$$13)\qquad \angle E'N'D = \angle E'ME_1,\quad \angle E_1N_1D^* = \angle E_1ME'.$$

Da nun M, N', E' Punkte einer Geraden bilden, so sind, wenn die erste der Gleichungen 13) erfüllt ist, $N'D$ und ME_1 parallel, und zwar gleich

oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem E' ausserhalb oder innerhalb der Strecke MN' liegt, d. i. auch je nachdem A' ausserhalb oder innerhalb MM', oder je nachdem $A'M'=r'$ negativ oder positiv, oder je nachdem r'' (das mit r' entgegengesetztes Vorzeichen hat) positiv oder negativ, oder — weil [Gl. 4)] $r''=MM_1$ und andererseits MA_1 stets positiv —, je nachdem MM_1 und MA_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet, oder je nachdem MN_1 und ME_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Aus dem Anfangs- und Schlusssatze folgt, dass $N'D$ mit MN_1 stets parallel und gleichgerichtet ist. Ausserdem gilt aber $MN_1=MM_1=r'' =M'D'=N'D$, so dass MN_1 und $N'D$ die Gegenseiten eines Parallelogramms bilden. Ebenso folgt aus der zweiten der Gleichungen 13), dass N_1D^* und MN' parallel und gleichgerichtet sind; da sie ausserdem beide $=r''_1$, so bilden auch sie die Gegenseiten eines Parallelogramms. Daher ist sowohl D, wie D^* in dem mit den Seiten MN_1 und MN' construirten Parallelogramm der dem M gegenüberliegende Eckpunkt, also fallen beide zusammen, w. z. b. w.

7. Es ergeben sich nun folgende Beziehungen zwischen r, r', r'' und r_1, r'_1, r''_1.

Aus den Gleichungen 6), 3), 4) folgt

$$r_1=-r\frac{r''}{r'},\quad r''_1=r+r',\quad r'_1=r''-r_1=r''+r''\frac{r}{r'},$$

andererseits aus 7), 4), 3)

$$r=-r_1\frac{r''_1}{r'_1},\quad r''=r_1+r'_1,\quad r'=r''_1-r=r''_1+r''_1\frac{r_1}{r'_1}.$$

Es sind also jene beiden Gruppen von Grössen oder die Kreise f, w, b und diejenigen f_1, w_1, b_1 reciprok, d. h. jede Gruppe lässt sich auf dieselbe Weise aus der andern ableiten.

8. Aus den gegebenen f, w, b construirt man die f_1, w_1, b_1, wenn man $MM_1=r''=M'A$ [Gl. 4)] macht, durch M' und M zwei parallele Strahlen zieht, und zwar in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem A' ausserhalb oder innerhalb MM' liegt, und auf ihnen aus der Proportion $r_1:r=r'':(-r')$ die r_1 bestimmt, wobei A' als Aehnlichkeitspunkt der Kreise f, w und derjenigen b, f_1 erscheint (sowie M_1 von f_1, w_1 und b_1, f), und dann die Kreise zieht: b_1 aus M_1 durch A, f_1 aus M mit dem erhaltenen Halbmesser r_1, w_1 aus M_1 berührend den f_1 im Punkte A_1 der $+x$-Axe.

9. Die Gleichung 5) sagt, dass die Summe der Verhältnisse des Halbmessers jedes wälzenden Kreises zu demjenigen des zugehörigen festen Kreises gleich -1 ist, gerade so, wie es nach Nr. 2 auch bei den gemeinen Epi- und Hypocykloiden stattfindet. Daraus folgt aber:

dass die Epicykloide mit $r'>0$ auch durch ein $r'_1<-r_1$ entstehen kann, wobei im ersten Falle von den Kreisen w und f jeder ausserhalb

des andern, im zweiten Falle w_1 ausserhalb f_1, dagegen f_1 innerhalb w_1, also in beiden Fällen der wälzende Kreis ausserhalb des zugehörigen festen liegt;

dass die Hypocykloide mit $r' < 0$ und $\geqq -\frac{1}{2}r$ auch durch ein $r'_1 > -r_1$ und $\leqq -\frac{1}{2}r_1$ entstehen kann, und dass in beiden Fällen der wälzende Kreis innerhalb des zugehörigen festen liegt; im ersten Falle liegt der Mittelpunkt M des festen Kreises ausserhalb, im zweiten Falle innerhalb des wälzenden Kreises.

10. Ferner folgt aus Gleichung 8), dass, wenn bei der einen Entstehungsweise einer verallgemeinerten Epi- oder Hypocykloide der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb des festen Kreises liegt $\left(\frac{r''}{r'} \gtrless -1\right)$, er bei der andern bezw. ausserhalb oder innerhalb liegt $\left(\frac{r''_1}{r'_1} \lessgtr -1\right)$, dass also ein und dieselbe Curve zugleich eine verkürzte und eine verlängerte ist. Wir können daher den Satz aussprechen:

J e d e v e r a l l g e m e i n e r t e E p i - u n d H y p o c y k l o i d e k a n n a u f z w e i W e i s e n e n t s t e h e n, w o b e i d a s e i n e M a l d e r b e s c h r e i b e n d e P u n k t i m I n n e r n, d a s a n d e r e M a l i m A e u s s e r n d e s w ä l z e n d e n K r e i s e s l i e g t.

11. Man nennt eine Epicykloide, bei welcher $r' > 0$, und eine Hypocykloide, bei welcher $0 > r' \geqq -\frac{1}{2}r$ ist, wegen der Art der Gestaltung g e s c h w e i f t oder v e r s c h l u n g e n, je nachdem der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb des wälzenden Kreises liegt; bei der andern Entstehungsweise mit $r'_1 < -r_1$ bezw. $r'_1 > -r_1$ und $\leqq -\frac{1}{2}r_1$ findet daher gerade die entgegengesetzte Lage statt. Veranschaulicht man sich die vier Fälle, so erhält man die Begriffsbestimmung:

E i n e c y k l i s c h e C u r v e i s t g e s c h w e i f t o d e r v e r s c h l u n g e n, j e n a c h d e m d e r b e s c h r e i b e n d e P u n k t m i t d e m M i t t e l p u n k t e d e s f e s t e n K r e i s e s a u f e n t g e g e n g e s e t z t e r o d e r a u f ü b e r e i n s t i m m e n d e r S e i t e d e s w ä l z e n d e n K r e i s e s l i e g t.

12. Bei den g e m e i n e n c y k l i s c h e n C u r v e n ist $r'' = -r'$, dann ergiebt sich auch [Gl. 8)] $r''_1 = -r'_1$, [Gl. 6)] $r_1 = r$ und [Gl. 5)] $r' + r'_1 = -r$. Hierdurch ist der in Nr. 2 ausgesprochene Satz bewiesen.

K a r l s r u h e, im October 1880.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber geodätische Linien.

(Hierzu Taf. V Fig. 5 u. 6.)

In einem Artikel über den gleichen Gegenstand in dieser Zeitschrift (Bd. III, 1858, S. 257) habe ich aus dem Satze von Gauss (Disquis. c. superf. curvas XV): „Wenn auf einer krummen Fläche von einem und demselben Anfangspunkte aus unendlich viele kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen werden, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig“ die Folgerung gezogen:

„Wenn auf einer Fläche zwei feste Punkte A und B gegeben sind und eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe oder Differenz der nach einem beliebigen Punkte M derselben gezogenen geodätischen Radien vectoren $MA \pm MB$ constant ist, so bildet die Tangente der Curve in M mit den Tangenten der Radien vectoren gleiche Winkel, und umgekehrt, ist das Letztere der Fall, so muss auch $MA \pm MB$ constant sein.“

Als Anwendung dieses allgemeinen Satzes habe ich den Satz von Mich. Roberts angeführt (Journ. v. Liouville, 1850), wo der Punkt M einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid angehört, dessen Nabelpunkte A und B sind.

Durch Veränderung des Werthes der Constante erhält man eine Schaar von orthogonalen Curven, welche den confocalen Ellipsen und Hyperbeln in der Ebene entsprechen. Allein wenn man den Satz von Gauss zur Grundlage nimmt, so kann man aus demselben noch verschiedene andere Curvensysteme ableiten, wie aus Nachstehendem hervorgehen wird.

Werden die geodätischen Radien vectoren MA und MB mit u und v bezeichnet, so lässt sich die Gleichung einer Curve (M) auf einer Fläche in der Form

$$u = f(v)$$

darstellen; u und v können bipolare geodätische Coordinaten genannt werden (s. die Aufsätze in Bd. XII dieser Zeitschrift S. 277, 428 u. 430 von P. Zech, M. Cantor, C. W. Baur, wo dieser Ausdruck für ebene Curven gebraucht ist). Durch Differentiation ergiebt sich

$$du = f'(v)\, dv;$$

für einen zweiten Punkt M' der Curve ist $M'A = u + du$, $M'B = v + dv$; man beschreibe nun von A aus mit den geodätischen Halbmessern MA und $M'A$, von B aus mit MB und $M'B$ Bögen, so erhält man ein Viereck $MNM'N'$, dessen Seiten Bögen von geodätischen Kreisen sind und welches bei der Annäherung von M' an M zu einem Parallelogramm wird, dessen Diagonale MM' die Tangente der Curve in M ist (Fig. 5). Das Verhältniss zweier anstossender Seiten $\frac{MN'}{MN}$ ist $= \frac{du}{dv} = f'(v)$ und lässt sich also construiren, wenn die Gleichung $u = f(v)$ gegeben ist. Wird nun das Parallelogramm um die Ecke M um 90^0 gedreht, so fällt MN' in die Verlängerung von MB, MN in diejenige von MA und die Diagonale MM' wird Normale der Curve. Hieraus folgt der Satz:

Ist die Gleichung einer Curve auf irgend einer Fläche in bipolaren geodätischen Coordinaten gegeben, so lege man in der Tangentialebene von einem Punkte M derselben Tangenten an die geodätischen Radien vectoren, trage auf ihnen Strecken ab gleich dem Zähler und Nenner des Differentialcoefficienten der letzteren, vervollständige das Parallelogramm, so ist die durch M gehende Diagonale Normale der Curve.

Auf jeder Tangente ist die der Zunahme des andern Radius entsprechende Strecke abzutragen; ist der Differentialcoefficient negativ, so sind beide Strecken auf der Verlängerung über M hinaus, im andern Falle ist die Eine auf der entgegengesetzten Richtung zu nehmen.

Die einfachsten Beispiele, welche man durch Specialisirung von $f(v)$ erhält, sind folgende:

$$1.\quad u \pm v = c \qquad du \pm dv = 0,$$

$$2.\quad u = cv \qquad \frac{du}{dv} = \frac{u}{v},$$

$$3.\quad u^2 - v^2 = c \qquad \frac{du}{dv} = \frac{v}{u},$$

$$4.\quad u^2 + v^2 = c \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{v}{u},$$

$$5.\quad uv = c \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{u}{v},$$

$$6.\quad \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = c \qquad \frac{du}{dv} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Werden die Winkel zwischen der Normale und den geodätischen Radien vectoren im Punkte M mit φ und ψ bezeichnet, so ist $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \pm\frac{du}{dv}$, also stehen in diesen sechs Fällen die Sinus der Winkel in sehr einfachen Beziehungen zu u und v. Durch Veränderung von c erhält man Curvenschaaren, welche in der Ebene

1. confocale Ellipsen und Hyperbeln, mit den Brennpunkten A und B,
2. Kreise, welche die Gerade AB und ihre Verlängerung harmonisch theilen,
3. Gerade, senkrecht auf AB,
4. concentrische Kreise, deren Durchmesser $\gtrless AB$ sein kann,
5. confocale Lemniscaten, mit den Brennpunkten A und B,
6. Niveaulinien oder rechtwinklige Trajectorien magnetischer Curven, welche feine Eisentheilchen bilden, die auf ein Papier gestreut werden, unter welches ein Hufeisenmagnet mit seinen Polen gehalten wird (Mittheilung von P. Zech, Bd. XII S. 377), sind.

Da man durch Integration der Differentialgleichungen auf die gegebenen zurückkommt, so lassen sich alle diese Sätze umkehren, also beim ersten Beispiel: wenn die Tangenten der bipolaren Coordinaten in einem Punkte der Curve mit ihrer Normale gleiche Winkel bilden, so ist ihre Summe oder Differenz constant. Oder bei 2.: wenn das Verhältniss der Sinus dieser Winkel constant ist, so ist es auch das Verhältniss der Coordinaten u. s. w.

Die Einführung bipolarer geodätischer Coordinaten, welche, wie aus dem Obigen ersichtlich ist, zu einer einfachen Construction von Tangente und Normale führt, lässt sich übrigens noch in vielen Fällen auf eine andere Art verwerthen. Wenn man das Dreieck ABM, in welchem, wie oben, A und B die Brennpunkte und M ein Punkt der Curve sind, in der Art zu einem Viereck vervollständigt, dass man die von M nach der Mitte von AB gezogene geodätische Linie MO um sich selbst nach N verlängert und die geodätischen Linien NA und NB zieht, so können in allen denjenigen Fällen, wo die Gegenseiten des Vierecks gleich sind, also $MA = NB$ und $MB = NA$, M und N als Brennpunkte einer zweiten Curve angesehen werden, welche durch A und B geht und die derselben Gleichung, wie die erste, nämlich $u = f(v)$ genügt. Die Gleichheit der Gegenseiten findet in der Ebene und auf der Kugel, wo die geodätischen Linien Bögen grösster Kreise sind, immer statt, wie auch auf allen Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaass, ferner auf solchen, welche zwei zu einander senkrechte Symmetralebenen haben, und wenn O auf ihrem Durchschnitte liegt; also insbesondere bei den centrischen Flächen zweiter Ordnung, für A und B als Kreispunkte. Durch Veränderung des Durchmessers MN erhält man ein System von Curven ähnlicher Art, deren gemeinsame Durchschnittspunkte A und B sind und welche denselben Parameter c haben.

Bei der ersten Gleichung $u \pm v = c$ ist c die geodätische Länge der grossen Axe der geodätischen Ellipse oder Hyperbel; somit haben wir den Satz:

Die Brennpunkte (M und N) sämmtlicher concentrischer geodätischen Ellipsen und Hyperbeln, welche durch zwei

feste Punkte auf einer der genannten Flächen (A und B) gehen, und deren grosse Axen gleich sind, liegen auf einer geodätischen Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind.

Auf den Flächen von constantem Krümmungsmaass können die Punkte A und B beliebig angenommen werden, bei der Kugel sind die Curven sphärische Kegelschnitte; wenn A und B Kreispunkte einer centrischen Fläche zweiter Ordnung sind, so liegen die Brennpunkte der Curven auf einer Krümmungslinie. In allen Fällen werden die Curven einen geodätischen Kreis berühren, dessen Mittelpunkt O ist.

AB sei ein Bogen auf einem grössten Kreise der Kugel, A und B sind die Brennpunkte einer sphärischen Ellipse, deren grosse Axe CD ist; also ist $OC = OD$ der Halbmesser eines Kreises, welchen sämmtliche durch A und B gehende sphärische Ellipsen berühren und deren Brennpunkte auf der ersten Ellipse liegen. Man kann aber auch die Figur als die sphärische Basis von Kegeln ansehen, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel ist; dann sind die nach den Brennpunkten gehenden Halbmesser der Kugel Focallinien und man erhält den Satz:

Die Focallinien aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren und durch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Gerade gehen, liegen auf einem Kegel, welcher den Rotationskegel ebenfalls berührt und dessen Focalen jene Gerade sind.

Da die Kreisschnitte der Ergänzungskegel senkrecht stehen auf den Focalen der gegebenen, so ergiebt sich durch Uebertragung auf die Ergänzungskegel:

Die cyklischen Ebenen aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren, sowie auch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Ebenen, berühren einen Kegel, welcher den Rotationskegel gleichfalls berührt und dessen Kreisschnitte parallel mit diesen Ebenen sind. Unter cyklischen Ebenen sind zwei durch die Spitze eines Kegels parallel mit den Kreisschnitten gelegte Ebenen zu verstehen.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung 5): $uv = c$, welche in der Ebene den confocalen Lemniscaten entspricht, und bezeichnen die entsprechenden Curven auf einer beliebigen Fläche analog als geodätische Lemniscaten, deren Brennpunkte A und B sind. Die geodätischen Strecken $OA = OB = \sqrt{e}$ sind constant, dagegen c veränderlich; die grosse Halbaxe ist $= \sqrt{c+e}$, die kleine $= \sqrt{c-e}$. Bei der gemeinen Lemniscate ist $c = e$, also $\sqrt{c-e} = 0$, die übrigen theilen sich in zwei Gruppen, die einen $c > e$ umschliessen die erstere, während die anderen $c < e$

von ihr umschlossen werden. Durch Veränderung von c erhält man ein System von confocalen Lemniscaten, welche einen von O aus mit dem Halbmesser OA beschriebenen Kreis rechtwinklig schneiden (in der Ebene), in den Durchschnittspunkten M, M', ... sind die Tangenten der Lemniscaten parallel mit AB; die Winkel AMB, $AM'B$, ... sind rechte. Für diese Eigenschaft des Kreises bietet sich auch bei den sphärischen und ellipsoidischen Lemniscaten ein Analogon dar: Werden auf einer Kugel von zwei festen Punkten aus (A und B) Bögen grösster Kreise gezogen, die sich rechtwinklig (in M oder M') schneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte auf einem Kegelschnitte, und nach dem Satze von Mich. Roberts schneiden sich die von den Kreispunkten eines Ellipsoids rechtwinklig zu einander gezogenen geodätischen Linien (AM und BM) auf einer sphärischen Curve. Hieraus folgt also:

Die Durchschnittspunkte von rechtwinklig sich schneidenden Radien vectoren eines Systems confocaler Lemniscaten liegen bei einer Kugel sowohl, als auch bei einem Ellipsoid, wenn die Brennpunkte Kreispunkte sind, auf einem sphärischen Kegelschnitte.

Betrachten wir aber in der Gleichung $uv = c$ c als constant, dagegen e als veränderlich, so erhalten wir ein anderes System von geodätischen Lemniscaten, bei welchen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Es sei, wie oben, die Diagonale MON des geodätischen Vierecks $AMBN$ ein Durchmesser einer Lemniscate, und M und N sollen die Brennpunkte einer zweiten Lemniscate sein, für welche auch die Gleichung $uv = c$ ($AM.AN = BM.BN = c$) gilt, und die also durch A und B geht. Durch Veränderung des Durchmessers MON ergiebt sich ein System von Lemniscaten, welche sämmtlich sich in A und B schneiden und bei denen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Sind nun A und B beliebige Punkte in der Ebene oder auf der Kugel, wie überhaupt auf Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaass, ferner auf solchen Flächen, welche zwei sich senkrecht schneidende Symmetralebenen haben, wofern sie symmetrisch gegen eine solche Ebene liegen, so hat man den Satz:

Alle concentrischen geodätischen Lemniscaten von gleichem Parameter (c) und gleicher Quadratsumme der Halbaxen haben einen gemeinschaftlichen Durchmesser (AB).

Schliesslich folgen noch zwei Beispiele, um die Anwendung der oben angegebenen Tangentenconstruction auch bei abgeleiteten Curven zu zeigen.

Einer geschlossenen Curve auf einer Fläche sei ein Polygon einbeschrieben $ABC \ldots A'B'C'$ (Fig. 6), dessen Seiten geodätische Linien sind. Die geodätischen Verlängerungen AB und $B'A'$ schneiden sich in M, diejenigen von BC und $C'B'$ in M', so ist MM' ein Element der Curve, welche man sich bei unendlicher Annäherung der Punkte

$ABC \ldots A'B'C'$ auch dadurch entstanden denken kann, dass ein geschlossener Faden um die Curve geschlungen ist, welcher länger als die Curve ist und von dem ein Theil durch die geodätischen Tangenten MB und MA' gebildet wird. Beim Uebergang von M nach M' können MB und MB' als bipolare geodätische Coordinaten einer Ellipse angesehen werden, deren Brennpunkte B und B' sind und die durch M geht. In M' geht diese Ellipse in eine zweite über mit den Brennpunkten C und C' u. s. f. Also werden alle diese Ellipsen die Curve MM' berühren, deren einzelne Elemente aus elliptischen Bögen bestehen. Wenn man dagegen die Polygonseiten AB und $C'B'$, BC und $B'A'$ verlängert, so erhält man die Schnittpunkte N und N'; beim Uebergang von N nach N' wird der Punkt N den Bogen einer geodätischen Hyperbel beschreiben, deren Brennpunkte B und B' sind. Ebenso ist das nächste Element $N'N''$ der Curve (N) der Bogen einer Hyperbel mit den Brennpunkten C' und A; diese Curve besteht also aus einzelnen Hyperbelbögen und schneidet die Curve (M) senkrecht. Auf der Kugel sind diese Curven confocale sphärische Kegelschnitte und auf den centrischen Flächen zweiter Ordnung Krümmungslinien. Daher schliesst man:

Werden von einem Punkte M ausserhalb eines sphärischen Kegelschnittes auf einer Kugel oder ausserhalb einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid zwei geodätische Tangenten gezogen, so sind durch M und die beiden Berührungspunkte als Brennpunkte eine geodätische Ellipse und Hyperbel bestimmt, welche die durch M gehenden confocalen sphärischen Kegelschnitte, beziehungsweise Krümmungslinien berühren. In der Ebene findet eine Berührung zweiter Ordnung statt.

Wenn man von einem Punkte O auf die Tangente einer Curve ein Perpendikel OM fällt, so liegt M auf der Fusspunktencurve, welche von dem über OT als Durchmesser (T Berührungspunkt) beschriebenen Kreise in M berührt wird. Man nehme nun an, O liege auf einer beliebigen Fläche und TM sei eine geodätische Tangente der Curve; der Punkt M sei durch die Gleichung bestimmt

$$OM^2 + TM^2 = OT^2,$$

d. h. OM und TM sind bipolare Coordinaten der Curve 4. $u^2 + v^2 = c$ $\frac{du}{dv} = -\frac{v}{u}$, so lässt sich nach dem Vorhergehenden die Tangente in M von dieser Curve bestimmen. Für einen zweiten Punkt T' der gegebenen Curve erhält man das Dreieck $OM'T'$, in welchem ebenfalls $OM'^2 + T'M'^2 = OT'^2$. MM' ist also ein Element der abgeleiteten Curve, welche der Fusspunktencurve in der Ebene entspricht und deren Tangente sich nach Gleichung 4. bestimmen lässt.

Reutlingen. Dr. O. Böklen.

XX. Bemerkung zu der „Notiz zu einem Satze von Chasles von E. Lange“ (diese Zeitschr., Jahrg. 26 S. 98).

Herr E. Lange macht a. a. O. darauf aufmerksam, dass ein in Chasles' „Aperçu historique“ Note XXXIII ausgesprochener Satz, der so lautet:

„*Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites, situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré*“,

in dieser Fassung nicht richtig ist, weil es im Allgemeinen überhaupt kein Tetraeder giebt, welches den Bedingungen genügte, dass drei Ecken auf drei willkürlich gegebenen festen Geraden liegen und jede Seitenfläche durch je eine willkürlich gegebene feste Gerade im Raume hindurchgeht. Herr E. Lange sucht die Bedingungen auf, welchen die gegebenen sieben Geraden im Raume genügen müssen, damit nicht nur ein Tetraeder construirbar sei, welches den Anforderungen entspricht, sondern unendlich viele, und bestimmt dann den Ort der vierten freien Ecke.

Dass bei der Ausdehnung des Satzes der Ebene:

„Wenn die drei Seiten eines veränderlichen Dreiecks bez. durch drei feste Punkte laufen und zwei Ecken auf zwei festen Geraden liegen, so beschreibt die dritte freie Ecke einen Kegelschnitt“,

auf den Raum die Kanten (und nicht die Ecken) des Tetraeders die Rolle übernehmen, welche in der Ebene die Ecken des Dreiecks spielen, konnte unter dem Zuströmen reicher Ergebnisse aus den neu entdeckten Quellen der Erfindung selbst einem Forscher wie Chasles im Augenblick entgehen, während es allerdings wunderbarer scheint, dass in einer Reihe von Lehrbüchern der ausgesprochene Satz ungeprüft reproducirt wird.

Herr E. Lange giebt aber nicht an, wie der Chasles'sche Satz in richtiger Fassung lauten müsste; verfolgt man indessen den Gedankengang von Chasles, so liegt es nahe, folgenden Satz als die Ausdehnung des ebenen Satzes auf den Raum hinzustellen:

Wenn die drei Seitenflächen eines veränderlichen Dreiflachs (drei Ebenen im Raume) bez. durch drei willkürlich gegebene feste Gerade im Raume laufen und zwei Kanten des Dreiflachs

zwei willkürlich gegebenen festen Geraden im Raume begegnen, so beschreibt die dritte freie Kante (ebenso wie die beiden ersten) eine Regelschaar eines geradlinigen Hyperboloids und die Ecke des Dreiflachs (Durchschnittspunkt der drei Ebenen) eine Raumcurve dritter Ordnung.

In der That, gehen die drei veränderlichen Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 bez. durch die drei festen Geraden g_1, g_2, g_3 und soll die Kante $|\varepsilon_2\,\varepsilon_3|$ einer festen Geraden l_1 begegnen, so trifft sie die drei Geraden g_2, g_3, l_1 gleichzeitig, beschreibt folglich eine Regelschaar eines Hyperboloids, welches durch die drei Geraden l_1, g_2, g_3 gerade bestimmt wird. Soll ferner die Kante $|\varepsilon_3\,\varepsilon_1|$ einer festen Geraden l_2 begegnen, so trifft sie die drei Geraden g_3, g_1, l_2 gleichzeitig, beschreibt also eine Regelschaar eines zweiten Hyperboloids, welches durch die drei Erzeugenden g_3, g_1, l_2 gerade bestimmt wird. Die beiden Ebenen ε_1, ε_2 beschreiben nun zwei Ebenenbüschel um die Axe $g_1 g_2$, deren jedes mit dem von ε_3 beschriebenen projectiv ist, folglich sind die ersteren unter sich projectiv; die dritte Kante $|\varepsilon_1\,\varepsilon_2|$ beschreibt daher auch eine Regelschaar eines Hyperboloids und alle drei Hyperboloide haben eine Raumcurve dritter Ordnung gemeinschaftlich, das Erzeugniss der drei projectiven Ebenenbüschel, welche ε_1, ε_2, ε_3 beschreiben. Diese ist der Ort des Schnittpunktes $(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3)$, d. h. der Ecke des veränderlichen Dreiflachs.

Dieser einfache Satz lässt sich nicht nur auf das Tetraeder, sondern sofort auf das vollständige räumliche n-Flach ausdehnen. Verstehen wir nämlich unter n-Flach n willkürlich im Raume angenommene Ebenen ε_1, ε_2, ... ε_n, die n Seitenflächen des n-Flachs, unter Kanten die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Schnittlinien $|\varepsilon_i\,\varepsilon_k|$ je zweier Seitenflächen und unter Ecken die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Schnittpunkte $(\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_l)$ je dreier Seitenflächen, so dass sich in jeder Ecke drei Seitenflächen und auch drei Kanten treffen, in jeder Seitenfläche aber $(n-1)$ Kanten und $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Ecken liegen, während durch jede Kante zwei Seitenflächen gehen und auf jeder Kante $(n-2)$ Ecken liegen, dann gilt folgender allgemeine Satz:

Wenn jede der n Seitenflächen eines vollständigen n-Flachs $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ durch je eine feste willkürlich gewählte Gerade im Raume geht und von den $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Kanten des n-Flachs $(n-1)$ solche, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen [also z. B. die $(n-1)$ Kanten, welche in einer Seitenfläche des n-Flachs liegen, oder solche $(n-1)$ Kanten, in welchen bei irgend einer Anordnung der n Seitenflächen die nach der Reihenfolge unmittel-

bar aufeinander folgenden Paare von Seitenflächen sich schneiden, d. h. $|\varepsilon_1 \varepsilon_2|$, $|\varepsilon_2 \varepsilon_3|$, $|\varepsilon_3 \varepsilon_4|$, ... $|\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n|$], beziehungsweise je einer willkürlich gewählten festen Geraden im Raume begegnen, dann beschreiben sämmtliche Kanten des n-Flachs Regelschaaren von Hyperboloiden und sämmtliche Ecken Raumcurven dritter Ordnung.

Von diesem Satze, dessen Evidenz in die Augen fällt, ist derjenige Theil, welcher sich auf die Kanten bezieht, schon vor langer Zeit von Steiner in der „Systematischen Entwickelung der Abh. geom. Gest." ausgesprochen worden (siehe Jacob Steiner's Gesammelte Werke Bd. I, Berlin 1881, S. 398).

Breslau, den 24. April 1881. Prof. Dr. H. Schroeter.

XIII.

Ueber die Grundprincipien der Linearperspective.

Von

Dr. Guido Hauck

in Berlin.

Hierzu Taf. VI Fig. 1.

I. Einleitung.

In meiner Schrift: „*Die subjective Perspective und die horizontalen Curvaturen des dorischen Stils*“ (Stuttgart 1879, Verlag von Konrad Wittwer) habe ich versucht, der Perspective Das zu geben, was ihr seither fehlte, nämlich eine streng wissenschaftliche Begründung vom Standpunkte der (modernen) physiologischen Optik aus. Ich bezeichne diese Tendenz, anderen missverstandenen Auffassungen gegenüber, ausdrücklich als den Brenn- und Knotenpunkt der ganzen Schrift, bezw. des ersten Theiles derselben.*

Die wesentlichen Dienste, welche die seitherige Perspective der Kunst geleistet hat, schlugen im Laufe der Zeit alle Zweifel an der Legitimität ihrer Grundanschauungen nieder, und es bildete sich die Ueberzeugung ihrer inneren Wahrheit und Nothwendigkeit in solcher Entschiedenheit aus, dass die Schwächen und Widersprüche der zu Grunde liegenden Voraussetzungen heutzutage kaum noch gefühlt werden und man sich nun allgemein darüber wundert, wie es überhaupt möglich sein könne, die Grundpfeiler des scheinbar so festen Gebäudes als morsch zu verdächtigen.**

---

* Fern lag es mir, „an Stelle der seitherigen Perspective eine neue setzen zu wollen“. Ich verwahrte mich gegen eine solche gröbliche Missdeutung von vornherein durch die ausdrückliche Erklärung (S. 3), „dass es weniger die formalen Gesetze der Perspective sind, die sich als unzureichend erweisen, als vielmehr deren physiologische und psychologische Begründung“.

** Mit ziemlich denselben Worten charakterisirt mein unvergesslicher Lehrer *Hermann Hankel* in seiner „*Theorie der complexen Zahlensysteme*“ die Haltlosigkeit der früheren Begriffsbestimmung der complexen Zahlen. — Es sei mir hierzu die Bemerkung gestattet, dass der kundige Leser in meiner Behandlungsweise des perspectivischen Problems unschwer eine Analogie erkennen wird mit

Indessen sobald an irgend einer Stelle der Wissenschaft auch nur der leiseste Verdacht sich regt, es möchte eine durch Gewohnheit festgewurzelte Vorstellung unwillkürlich und unwissentlich als scheinbare Denknothwendigkeit unterschoben worden sein, so fordert die Würde der Wissenschaft auf's Gebieterischste, dass in die Discussion der Frage eingetreten werde, und zwar mit der rücksichtslosesten Missachtung des verjährt geheiligten Besitzes der Gewohnheit. — Erst dann darf die eigentliche Natur jener Grundanschauungen „als hinreichend aufgeklärt gelten, wenn man unterscheiden kann, was an ihnen nothwendig — und was arbiträr, d. h. zu einem bestimmten Zwecke in sie hineingelegt ist".

Meine Behauptung, dass die seitherige Begründung der Perspective zunächst nach ihrer physiologischen Seite hin sich auf unhaltbare Voraussetzungen stützt, dürfte kaum einem Widerspruche begegnen: die traditionelle Lehre betrachtet das Auge noch immer als eine ruhende, feststehende *Camera obscura* und nimmt ein directes seelisches Auffassen des Netzhautbildchens als Ganzes an; die sogenannten perspectivischen Verzerrungen bringt sie in Beziehung zu der gekrümmten Form der Netzhautfläche. — Dies sind jedoch längst veraltete physiologische Anschauungen. Die heutige Physiologie zeigt uns, wie das Sehen vielmehr darin beruht, dass das Auge in beständiger Bewegung auf und ab fixirend das ganze Object überfliegt, und wie dann die hierbei gewonnenen Detaileindrücke erst durch einen geistigen Process zu einem Gesammtbilde, dem „*subjectiven Anschauungsbilde*" combinirt werden. Hierbei kommen uns freilich die Einzelheiten des Vorganges nicht entfernt zum Bewusstsein; wir glauben vielmehr unwillkürlich das Gesammtanschauungsbild als das Resultat von gleichzeitigen Detaileindrücken auffassen zu müssen, während dasselbe in Wahrheit nur eine Combination von successiven Einzeleindrücken vorstellt. —

Gegenwärtiger Aufsatz stellt sich zunächst die Aufgabe, eben von diesen physiologischen Grundanschauungen aus das bekannte System der Linearperspective zu begründen. Wenn ich hierbei genöthigt sein werde, mich auf verschiedene Erörterungen aus meiner zu Anfang citirten Schrift zu beziehen, so möge das Folgende zugleich als ein Commentar zu derselben betrachtet werden. Erstens haben mich einige kritische Besprechungen, welche meiner Schrift von fachmännischer Seite gewidmet worden sind, belehrt, dass ich mit der Contrastwirkung zwischen der Neuheit meiner Anschauungsweise und der Befangenheit alteingenisteter Gewohnheitsvorstellungen nicht genügend gerechnet hatte, dass ich vielmehr verschiedene Punkte in ein helleres Licht hätte stellen und andere

---

der Art und Weise, wie *Hankel* in jenem Werke eine arithmetische Operation charakterisirt durch „diejenigen fundamentalen Eigenschaften, welche nothwendig und ausreichend sind, um dieselbe formal zu definiren."

in der Färbung etwas blasser hätte halten dürfen, um jedem Missverständnisse bezüglich meiner Tendenzen vorzubeugen. Zweitens möge das Folgende zugleich als Erwiderung auf verschiedene directe Einwände angesehen werden, die gegen meine Theorie theils schriftlich, theils mündlich erhoben worden sind.* Endlich gestatte ich mir, auf die zwei letzten Abschnitte des Aufsatzes, in welchen die Theorie eine werthvolle Vervollständigung erfahren wird, besonders hinzuweisen. Während nämlich der mehr physiologisch-ästhetische Charakter meiner ursprünglichen Schrift eine möglichste Beschränkung längerer mathematischer Erörterungen bedingte, mag der gegenwärtige Aufsatz auf die mathematische Detailausführung sein besonderes Augenmerk richten.

II. Die Fragestellung.

Es handelt sich in erster Linie um die Definition des perspectivischen Problems; es handelt sich darum, als Ausgangspunkt der Untersuchung eine solche Fassung der Aufgabe aufzustellen, welche einerseits möglichst allgemein und frei von jeder verkappten, logisch oder physiologisch unerwiesenen Voraussetzung ist, andererseits sich im Einklang befindet mit den an ein Kunstwerk zu stellenden unerlässlichen ästhetischen Anforderungen. — Diese Gesichtspunkte waren es, die mich zu folgender Formulirung des Problems führten:

> Wir verstehen unter der Abbildung eines Naturobjects (und zwar einer solchen Abbildung, welche auf künstlerischen Werth Anspruch machen will): eine freie Wiedergabe des Eindrucks, den das Auge und die Seele von dem Naturobject empfängt, also kurz: eine objective Wiedergabe des subjectiven Anschauungsbildes.

Diese Auffassung des Problems ist gerade nicht neu; doch ist sie nicht die ausnahmslos gebräuchliche. Häufiger begegnet man wohl der folgenden Definition:

> Wir verstehen unter einer Abbildung: ein ebenflächiges Gebilde, von dem das Auge und die Seele des Beschauers den nämlichen Eindruck empfängt, wie von dem Naturobject, also: Etwas, was das nämliche subjective Anschauungsbild erzeugt, wie das Object.

Die seitherige Begründung der Perspective ging bald von der einen, bald von der andern Definition aus. Erst seit Veröffentlichung meiner Schrift wurde die letztere Definition der ersteren oppositionell entgegengestellt.

---

* Auf eine Einzelwiderlegung der von verschiedenen Kritiken producirten Irrthümer verzichte ich. — Eine vertheidigende Besprechung des II. Theiles meiner Schrift wird in einem der nächsten Hefte von *Lützow's „Zeitschr. f. bild. Kunst“* enthalten sein.

Mit Rücksicht auf diese Thatsache lässt sich eine Erörterung der diesbezüglichen Streitfrage hier schlechterdings nicht umgehen.

In aller Strenge genommen — verlangt die zweite Definition etwas Unmögliches. Die von ihr gestellte Forderung ist nur unter gewissen Bedingungen, die bei gewöhnlichen Verhältnissen nicht zutreffen, und auch da nur unvollständig, erfüllbar. Sie treffen wohl bei Panoramen u. dergl. zu, nicht aber bei gewöhnlichen Kunstwerken. — Die Erfüllung der gestellten Forderung kann ferner nur durch Vermittelung einer optischen Täuschung erzielt werden. Denn wenn das Bild in meinem Auge denselben Eindruck hervorrufen soll, wie das Object selbst, so heisst das eben: ich soll der Illusion hingegeben werden, das Object selbst zu sehen. Mit anderen Worten: es wird stillschweigend vorausgesetzt, beim Sehen eines Wandgemäldes oder Staffeleibildes werde das Auge und die Seele ganz in derselben Weise in Thätigkeit versetzt, wie beim Sehen eines Panoramas. Die Richtigkeit dieser Voraussetzung dürfte aber sehr in Frage zu stellen sein. — Thatsächlich ist das Princip der Illusion in der Kunst nur sehr bedingt anerkannt. Einer der grössten Perspectivvirtuosen der Neuzeit, *Schinkel*, sagt geradezu: „Das Hinwirken auf eine optische Täuschung ist ein der Kunst unwürdiges Bestreben.“* — Kurz: die in Rede stehende Definition verlangt ein Kunststück, nicht ein Kunstwerk.

Dass ferner diese Definition in der That viel zu eng gefasst ist, erweist sich denn auch sofort durch das Factum, dass die Perspective Bilder liefert, denen eine viel weiter reichende Wirkung innewohnt, als die von der Definition gestellte Forderung verlangt und die auf sie basirte Begründung der Perspective annimmt.

Es ist nämlich einleuchtend, dass es eben die in Rede stehende Definition ist, welche direct zu der gewöhnlichen Begründung der Perspective führt: wenn das Bild als Schnittfigur des Sehstrahlenbündels mit der vertikalen Bildebene construirt werde, so werde es — vertikal aufgestellt — in ein Auge, das sich im Projectionscentrum befindet, genau denselben Strahlenbündel senden und daher auch genau denselben sinnlichen Eindruck im Auge hervorrufen, wie das Object selbst (*„Glastafel-Begründung, Princip der Centricität“*).

Hiermit ist die günstige Wirkung des Bildes allerdings für jenen speciellen Standpunkt des Auges und am Ende auch noch für dessen allernächste Umgebung stricte bewiesen — aber auch nur für diese. Thatsächlich erstreckt sich jedoch die Wirkung des Bildes viel weiter. Es macht einen befriedigenden Eindruck, auch wenn sich das Auge des Beschauers nicht im Projectionscentrum befindet, sondern an einem

---

* Vergl. auch: *Fechner, Vorschule der Aesthetik,* II, S. 75.

andern Punkte, und zwar auch noch an einem solchen, welcher — als Projectionscentrum benützt — eine wesentlich andere Gestaltung des Bildes geliefert haben würde. Es denkt auch weder der Künstler entfernt daran, während des Entwerfens des Bildes sein Auge in eine feste, unveränderliche Stellung zur Bildfläche zu bannen, noch macht sich dem Beschauer das Bedürfniss irgendwie geltend, jenen Punkt für das Auge aufzusuchen und festzuhalten. — Ferner wird die Wirkung des Bildes nicht im Geringsten beeinträchtigt, auch wenn es mit zwei Augen, und ferner auch wenn es in horizontaler oder geneigter Lage betrachtet wird, während doch nach der Begründung ein einziges Auge und eine vertikale Stellung des Bildes als wesentliches Erforderniss erscheint.* — Endlich richte ich an die Verfechter jener Ansicht die Frage: Welche Wirkung übt die in einem gewöhnlichen Staffeleibilde waltende Totalverjüngung auf das beschauende Auge aus? Glaubt es wirklich, vermöge optischer Täuschung die Häuser und Bäume in wahrer Grösse vor sich zu sehen? Regt sich bei dem Beschauer auch nur der leiseste Wunsch oder die unbewusste Neigung, eine solche panoramatische Illusion in sich heraufzubeschwören? — So wie wenigstens ich ein Bild zu betrachten pflege, ist dies nicht der Fall. Es kommt vielmehr die Verjüngung als solche meinem Geiste direct zum Bewusstsein. Derselbe findet ein ästhetisches Vergnügen eben darin, dass er das Kunstwerk als eine Uebersetzung der Wirklichkeit auffasst, nicht als die Wirklichkeit selbst.

Durch alle diese Thatsachen scheint mir unwiderleglich bewiesen zu sein, dass der befriedigende Eindruck einer Abbildung vollkommen unabhängig von dem Princip der Illusion ist, auf welches sich die herkömmliche Begründung wesentlich stützt, und dass demgemäss die Definition, von welcher jene Begründung ausging, eine entschieden zu eng

* Wenn man mir hierauf erwidert, es komme nur auf die relative Lage des Auges zur Bildfläche an, da bei Festhaltung dieser relativen Lage stets das nämliche Netzhautbildchen erzeugt werde: so bemerke ich, dass damit stillschweigend die hypothetische Vorstellung einer Beziehung zwischen dem subjectiven Anschauungsbilde und dem Netzhautbildchen eingeschmuggelt wird. Hierüber nachher! — Vorerst halten wir uns stricte an die reine „Glastafel-Begründung". — Es wird Niemand, der eine geneigt in der Hand gehaltene Zeichnung betrachtet, behaupten wollen, dieselbe mache ihm genau den nämlichen Eindruck, wie die Wirklichkeit, nicht blos hinsichtlich der absoluten Gestaltung, sondern auch hinsichtlich der aufrechten Lage im Raume, d. h. sie mache den Eindruck, als stünden die Bäume und Häuser aufrecht vor seinen Augen. Und trotzdem fühlt er sich von dem Bilde vollständig befriedigt. — Wenn ferner jene gewöhnliche Begründung zutreffend wäre, so müsste ein mit schiefer Bildebene construirtes, also convergirende Vertikalen enthaltendes und entsprechend trapezförmig umrahmtes Bild genau denselben befriedigenden Eindruck wie ein gewöhnliches Bild machen, sobald es in der richtigen schiefen Lage aufgestellt würde. Denn es würden hierfür genau dieselben Schlüsse zutreffend sein wie für jenes.

begrenzte ist. — Es kann dies auch wohl nicht anders sein, wenn man bedenkt, dass der physiologische Vorgang beim Sehen, der doch für die Beurtheilung der Wirkung eines Bildes in erster Linie mitzusprechen haben wird, bei jener Begründung gar nicht in Betracht kommt. Es wird nur verlangt, dass der äussere auf das Auge ausgeübte Impuls seiten des Bildes der nämliche sei, wie seiten der Wirklichkeit. In welcher Weise aber das Auge und die Seele auf diesen äussern Impuls reagirt, kommt nicht weiter in Betracht.

Uebrigens ist es eine nichts weniger als auffällige, vielmehr in der Wissenschaft tausendmal vorkommende Erscheinung, dass das Resultat einer Untersuchung sich für weitere Grenzen giltig erweist, als die Prämissen erwarten liessen, von welchen die Untersuchung ausging. Gerade die Geschichte der *Descriptiven* und *Neueren Geometrie* liefert hierfür eine Reihe der instructivsten Beispiele. Es gehört in einem solchen Falle stets zu den dankbarsten Aufgaben, nachträglich diejenigen Prämissen zu substituiren, deren Giltigkeitsgrenzen sich mit denen des Resultats decken. — Eben in diesem Sinne bitte ich, den eigentlichen Zweck meiner perspectivischen Studien deuten zu wollen.*

Was nun die andere, nämlich die von mir aufgestellte Definition des perspectivischen Problems anlangt, so geht dieselbe direct von dem Begriffe des Wortes „*Abbildung*“ aus, in welchem ich namentlich die erste Sylbe „*Ab*“ gehörig zu beachten bitte. Vergegenwärtigen wir uns das Verfahren, das ein Künstler oder wir selbst bei der Herstellung einer Abbildung eines Naturobjects beobachten! Wir zeichnen es *ab*, d. h. wir zeichnen die Linien in solcher Lage und Richtung, wie wir sie sehen; wir geben Das wieder, was wir sehen, das heisst: wir geben das subjective Anschauungsbild wieder, oder, wie *Goethe* in den „*Propyläen*“ sagt: wir bringen Etwas hervor, bezw. „der Künstler soll Etwas hervorbringen, was der Erscheinung der Natur ähnlich ist“ (NB. nicht Etwas, was dieselbe Erscheinung hervorruft). — Man mag in der Kunstliteratur nachforschen, wo man will: überall wird man eben dieser Auffassung begegnen.

Man könnte einwerfen, auch diese Definition verlange streng genommen etwas Unmögliches. Indessen habe ich mich gegen diesen Einwurf vorgesehen durch das Beiwort „*frei*“, die Abbildung sei eine „*freie Wiedergabe*“. Damit ist dem Künstler eine gewisse Freiheit hinsichtlich der Formgestaltung der Abbildung schon durch den Begriff der Abbildung selbst zugestanden. Es ist damit das Nämliche gesagt, was *Helmholtz* mit den Worten ausdrückt: „Der Künstler kann die Natur nicht abschreiben, er muss sie übersetzen ... Nun spielt aber in jeder Uebersetzung

---

* Ich betone dies gegenüber der Behauptung eines meiner Kritiker: der von mir behandelten Frage fehle jede praktische Bedeutung(!).

die Individualität des Uebersetzers ihre Rolle." — Wie weit diese Freiheit gehen dürfe, ist hier übrigens noch nicht am Platze zu erörtern.

Vorerst genügt es, sich davon zu überzeugen, dass unserer Definition die grösstmögliche Allgemeinheit zukommt, dass sie nur eine Umschreibung des Begriffes ist, der in dem Worte „*Abbildung*" selbst eingeschlossen liegt, dass mit ihr keine unerwiesene Voraussetzung stillschweigend unterschoben wird, und endlich — was nicht am Geringsten anzuschlagen sein möchte — dass wir uns mit derselben in Uebereinstimmung mit den bedeutendsten Vertretern einerseits der praktischen Aesthetik, andererseits der modernen physiologischen Optik befinden.

Ich betone schliesslich, dass es weniger Sache der Mathematik, als der Kunst ist, die Grundbedingungen zu bestimmen, denen eine auf künstlerischen Werth Anspruch machende Abbildung genügen müsse. In der vorliegenden Frage wird also das Urtheil der Künstler zum Mindesten nicht gleichgiltig sein. Ich habe denn auch einer Reihe hervorragender Künstler die Frage vorgelegt: „Wie würden Sie die Aufgabe der Perspective definiren, so oder so —?" Sie haben sich durchweg — ohne jegliche Beeinflussung meinerseits — sofort für meine Definition erklärt. Z. B. stammt das obige Urtheil, die eine Definition verlange ein Kunststück, die andere ein Kunstwerk, eben von einem Künstler. Es dürfte nicht schwer sein, falls es nothwendig erscheinen sollte, der diesbezüglichen Enquête eine grössere Ausdehnung zu geben. — —

Nehmen wir nunmehr, ausgehend von unserer Definition, die Discussion des perspectivischen Problems in Angriff, so zerfällt der Definition zufolge unsere Aufgabe nothwendig in zwei Theile:

1. die Analyse des Gesichtseindruckes, d. h. die Discussion der Formgestaltung des subjectiven Anschauungsbildes;
2. die Synthese der Abbildung, d. h. die Wiedergabe jenes subjectiven Anschauungsbildes in der objectiven Zeichnung.

Ich habe schon oben erwähnt, dass unsere Definition auch von der alten Schule mitunter verwendet wurde. Sie ist eben so allgemein und voraussetzungslos, dass sich auch die alte Anschauungsweise unter sie unterordnen lässt. Es würden sich nämlich auf Grund jener veralteten, aber wenigstens in der Perspective seither noch beglaubigten physiologischen Anschauungen unsere zwei Fragen einfach so beantworten:

1. das subjective Anschauungsbild giebt sich zu erkennen in dem *Camera-obscura*-Bildchen auf der Netzhaut;
2. daher Wiedergabe des letzteren im objectiven Bilde als congruente oder ähnliche Figur.

Der ganze und einzige Unterschied zwischen der seitherigen Auffassung und der meinigen beruht in der verschiedenen Beantwortung der ersten Frage. Daher wird auch der Schwerpunkt der ganzen Untersuchung in die Discussion der ersten Frage fallen müssen. Dies war denn

der Grund, der mich bestimmte, für meine mehrerwähnte Schrift den Titel: „*Subjective Perspective*“, i. e.: *Lehre vom subjectiven Anschauungsbilde* zu wählen.

III. Die Analyse des subjectiven Anschauungsbildes.

So einfach sich die Beantwortung unserer ersten Frage vom alten Standpunkte aus gestaltete, so schwierig ist sie vom Standpunkte der modernen physiologischen Anschauungen aus.

Die diesbezügliche Analyse ergiebt nämlich, dass das subjective Anschauungsbild nur in unserer innern Vorstellung, aber nicht in gestaltlich abmessbarer Wirklichkeit existirt, ja sogar: dass dieses Erzeugniss unserer Vorstellung innerhalb gewisser Grenzen gestaltlich unbestimmt und veränderlich ist und daher geometrisch gar nicht bestimmt definirt werden kann.

Ich muss in dieser Beziehung auf meine Schrift (§§ 3 bis 8) verweisen und will hier nur andeutungsweise soviel erwähnen, als zum Verständniss des Nachfolgenden absolut erforderlich ist.

Die Einzeleindrücke, welche das Auge beim Ueberfliegen des Objects empfängt, stehen zum Theil in directem Widerspruch mit einander. Die unbewusste geistige Thätigkeit, durch welche die Detaileindrücke zum Gesammtanschauungsbilde combinirt werden, besteht daher nicht blos in einem mechanischen Einregistriren, sondern vielmehr in einem Ausgleichen und Vermitteln jener Widersprüche.

Dieselben entstehen vornehmlich auf folgende Weise: Die Detaileindrücke sind zunächst so beschaffen, dass die scheinbare Grösse jeder Strecke dem Gesichtswinkel proportional ist. Dies allein würde aber zur nothwendigen Folge haben, dass wir gerade Linien zum grössten Theil nicht geradlinig, sondern curvirt sehen. Denkt man sich beispielsweise das Auge des Beschauers vor der Mitte einer Reihe von gleichhohen Säulen, auf welchen ein Architrav aufliegt: so werden beim directen Fixiren die dem Auge am nächsten stehenden mittleren Säulen nothwendig grösser erscheinen, als die entfernter stehenden äussersten Ecksäulen rechts und links. Es müssten demgemäss die durch die Säulenköpfe bestimmte gerade Linie und folglich auch die horizontalen Kanten des aufliegenden Architravs nothwendig als nach aufwärts gekrümmte Linien wahrgenommen werden.

Wenn wir trotzdem im Allgemeinen gerade Linien wieder als gerade Linien sehen, so rührt dies nur von dem unsere Vorstellung beherrschenden „*Collinearitätsbewusstsein*“ her: wir sind durch das Bewusstsein und die Gewohnheit prädisponirt, eine gerade Linie geradlinig zu sehen, und sehen sie demzufolge auch so, wie wir erwarten und wollen.*

* Ich darf diesen Theil meiner Schrift als eine selbstständige physiologische Studie bezeichnen, und glaube namentlich mit dem Begriffe des *Collinearitäts-*

In der That liegen die durch das Erfassen der scheinbaren Grössen erzeugten Gesichtseindrücke mit den auf Collinearität gerichteten Bewusstseinsansprüchen in beständigem Kampfe; die geistige Thätigkeit beim Sehen besteht eben darin, in diesem Kampfe einen Ausgleich herbeizuführen, dessen Resultat dann das subjective Anschauungsbild repräsentirt. Es folgt aber aus der ganzen Natur dieses Processes, dass die Art und Weise, in welcher der Ausgleich bald mehr den einen, bald mehr den anderen Ansprüchen gerecht wird, bei verschieden gearteten Objecten sehr verschieden beschaffen sein — und ferner auch wohl von verschiedenen Individuen verschieden ausgeführt werden wird. — Hierdurch eben ist (abgesehen von der in Betracht kommenden Bewegung des Kopfes) die relative Unbestimmtheit und gestaltliche Undefinirbarkeit des subjectiven Anschauungsbildes bedingt.

IV. Die Synthese der objectiven Abbildung.

Wenden wir uns nunmehr zu der Besprechung unserer zweiten Aufgabe!

Die objective Abbildung soll eine „Wiedergabe des subjectiven Anschauungsbildes“ sein.

Demgemäss müsste erstens die Eigenschaft des subjectiven Anschauungsbildes, dass die scheinbare Grösse einer Strecke dem Gesichtswinkel proportionirt ist, sich in die Eigenschaft der Abbildung übertragen, dass die Strecke proportional mit ihrem Gesichtswinkel abgebildet würde. — Zweitens müsste die Eigenschaft des Anschauungsbildes, dass eine gerade Linie wieder als gerade Linie gesehen wird, die Eigenschaft der Abbildung bedingen, dass die Gerade geradlinig abgebildet würde.

Wir bezeichnen die erste Eigenschaft als das *Princip der Conformität*, die zweite als das *Princip der Collinearität.*

Da wir nun aber erkannt haben, dass das subjective Anschauungsbild das Resultat eines Compromisses zwischen den genannten zwei Eigenschaften repräsentirt, so muss — wenn anders die objective Abbildung eine Wiedergabe des Anschauungsbildes sein soll — ein ebensolcher Compromiss auch in der Abbildung eingeleitet werden.

So gelangen wir durch rein logische Schlüsse zu der folgenden Definition der Perspective im engeren Sinne:

> „Die Perspective lehrt die Herstellung von Compromissen in dem Conflict zwischen der Bedingung der Collinearität und der

---

bewusstseins einen neuen werthvollen Gesichtspunkt für das Verständniss des Sehprocesses aufgestellt zu haben. — Meine Theorie durfte sich denn auch der vollen Zustimmung seiten der Physiologen erfreuen. Man vergl. in dieser Beziehung: *Wundt, „Grundzüge der physiologischen Psychologie“*, II. Aufl. (Leipzig, Engelmann. 1880.) II. Bd., S. 185 u. 186.

Conformität — zum Zweck der bildlichen Darstellung von Naturobjecten."

Ich weise ausdrücklich darauf hin, dass dieser Satz — so „sonderbar" er vielleicht dem in der alten Anschauung befangenen Leser klingen mag — Nichts ist, als eine denknothwendige Folgerung aus unserer Definition der Aufgabe und unseren physiologischen Grundanschauungen.

Die Feststellung des Compromisses hat im Allgemeinen nach Massgabe der Besonderheiten des Objects in ganz analoger Weise wie beim Anschauungsbilde selbst zu geschehen. Es hat dabei im Allgemeinen die Rücksicht zu walten, dass diejenigen Bedingungen bevorzugt werden, deren Nichtbefriedigung am unangenehmsten auffallen würde. —

Es ist übrigens noch darauf aufmerksam zu machen, dass das Collinearitätsbewusstsein sich nicht bei allen geraden Linien mit gleicher Gewalt geltend macht. Vor Allem übt bei den vertikalen Linien die Voreingenommenheit, dass sie uns auch wirklich geradlinig und vertikal erscheinen müssen, eine ungleich grössere Macht über unser Urtheil aus, als bei den horizontalen. Das „*Vertikalitätsbewusstsein*" beherrscht unsere Vorstellung viel unbedingter, als das allgemeine Collinearitätsbewusstsein. (Bezüglich der Gründe muss ich auf meine Schrift [S. 36] verweisen.) — Ferner verlangt von den horizontalen Linien unter sich diejenige, welche bei aufrechter Haltung des Kopfes von der *Primärstellung* des Blickes getroffen wird (*„Horizontlinie"*), die Geradlinigkeit viel kategorischer, als die höher oder tiefer gelegenen.

Demgemäss wird — ein architektonisches Object vorausgesetzt — die objective Abbildung in erster Linie die zwei Bedingungen 1. der vertikalen Abbildung der vertikalen Linien, 2. der Geradlinigkeit und Horizontalität der Horizontlinie — erfüllen müssen, und nur bezüglich der übrigen geraden Linien kann der besprochene Compromiss zwischen Conformität und Collinearität zur Anwendung kommen.

Je nachdem nun der Modus dieses Compromisses ausfällt, ergeben sich verschiedene perspectivische Systeme, und zwar werden sich uns hauptsächlich zwei Hauptsysteme darbieten müssen, die sich dadurch von einander unterscheiden, dass im einen das Princip der Conformität, im andern das der Collinearität dominirt.

Wir befassen uns im Folgenden nur mit dem letzteren, dem „*collinear-perspectivischen System*", dessen vorwiegende Bedeutung durch die Macht des Collinearitätsbewusstseins bedingt ist.*

---

* Meine Discussion des „*conform-perspectivischen Systems*" (nicht zu verwechseln mit „conformer Abbildung" im *Gauss*'schen Sinne!) hat bezüglich ihrer Tendenz vielfache Missdeutungen und zum Theil einen lebhaften Widerspruch hervorgerufen, der kaum im Verhältniss zu seiner Bedeutung stehen möchte. Es

Es lässt sich leicht nachweisen, dass durch die blossen zwei Bedingungen der *Collinearität* und der *Vertikalität* die Gestaltung des Bildes bei gegebenem Orte des Auges noch nicht vollständig bestimmt ist. Um für das System die nothwendige Bestimmtheit zu erlangen, können und müssen wir noch das Princip der *Conformität* hereinziehen. Es lässt sich aber ferner beweisen (und wird im folgenden Abschnitte bewiesen werden), dass es nur noch möglich ist, in allernächstem Umkreise eines einzigen Punktes, und zwar nur eines auf der Horizontlinie liegenden Punktes, der Bedingung der Conformität zu genügen, dass aber durch Hinzufügung dieser einen Bedingung das System nunmehr vollständig bestimmt ist. Mit Rücksicht auf eine möglichste Wirkung der Conformität wird jener Punkt an eine besonders bedeutsame Stelle des Bildes,

---

sei mir gestattet, in dieser Beziehung Folgendes zu bemerken: Die blosse Aufstellung des conform-perspectivischen Systems neben dem collinear-perspectivischen ist, wie sich aus der vorangehenden Erörterung unwiderleglich erweisen dürfte, zunächst eine Forderung der reinen Logik, — eine Denknothwendigkeit. Von rein logischem Gesichtspunkte aus ist also das conform-perspectivische System vollkommen gleichberechtigt mit dem collinear-perspectivischen. Indessen ist der logische Gesichtspunkt scharf zu trennen vom ästhetischen Gesichtspunkte. Gerade dieser wichtige Unterschied zwischen logischer Nothwendigkeit und ästhetischer Zulässigkeit dürfte aber nicht von allen meinen Kritikern mit der nöthigen Schärfe erfasst worden sein. — Was dann weiter meine Discussion des Systems anlangt, so ist es die Thatsache, dass eine ganze Reihe von Bildern hervorragender Künstler (ich habe in meiner Schrift nur ein einziges Beispiel als Illustration herausgegriffen) aufgewiesen werden kann, in welchen die Eigenthümlichkeiten jenes Systems im Widerspruch mit der collinearen Perspective, gleichgiltig ob bewusst oder unbewusst, ob consequent oder eklektisch, zur Anwendung gebracht sind, — diese Thatsache ist es, welche — nicht das Recht, sondern die Pflicht auferlegt, eine gründliche Untersuchung über die ästhetische Berechtigung des Systems einzuleiten. Diese wurde von mir denn auch mit der objectivsten Rücksichtslosigkeit gegen der Gewohnheit altgeheiligtes Scheinrecht durchgeführt. Ich verwahrte mich jedoch gleich von vornherein ausdrücklich gegen die Missdeutung einer „Voreingenommenheit für das System, welche in keiner Weise begründet sein dürfte". Eine solche Verwahrung war nothwendig, da in der Discussion selbstverständlich das neue conforme System gegenüber dem längst bekannten collinearen bedeutend in den Vordergrund treten musste, wenn anders die Discussion auf Unparteilichkeit Anspruch machen wollte. — Als praktisches Resultat der ganzen Discussion ergab sich jedoch für das conform-perspectivische System das gewiss sehr bescheidene Zugeständniss (S. 75): „Bei noch kleinerer (d. h. bei der allerkleinsten) Augdistanz, wie sie — allerdings selten — bei Interieurs vorkommen kann, dürften die Curvaturen der conformen Perspective zur vortheilhaften Anwendung kommen." Man beachte wohl: „sie dürften", keineswegs „sie müssen", wie man mich mehrfach interpretirte; ich fordere nicht, ich schlage nur vor. Auch schreibe ich jenen Curvaturen keineswegs eine directe ästhetische Wirkung zu. Unser Collinearitätsbewusstsein wird sich ganz gewiss zunächst gegen die Anwendung von Curvaturen sträuben. Allein wenn die Anwendung der collinearen Perspective (bei ganz kleiner Augdistanz) noch unerträglichere Verzerrungen mit sich

bezw. Objectes, die das Auge beim Betrachten unwillkürlich als „Hauptblickpunkt" wählt, verlegt werden müssen.

Die geometrische Untersuchung ergiebt dann ferner, dass das auf solche Weise definirte perspectivische System vollkommen identisch ist mit dem durch die *Centralprojection* oder das *Camera-obscura-Princip* definirten gewöhnlichen System der Linearperspective. Jener Conformitätspunkt fällt mit dem gewöhnlich als *Hauptpunkt* bezeichneten Punkte zusammen.

Dass der Centralperspective die genannten drei Eigenschaften *(Collinearität*, *Vertikalität* und *Conformität im Hauptpunkte)* zukommen, ist bekannt. Hier handelt es sich jedoch umgekehrt um den Nachweis, dass diese

---

bringen würde, so dürfte, wie überall, so auch hier das geringere Uebel vorzuziehen sein, und nur in diesem Sinne möchte sich die ausnahmsweise Verwerthung des conformen Systems vertheidigen lassen, — freilich mit der Reserve, dass sich die Frage, welches von beiden das geringere Uebel sei, nicht absolut beantworten lässt, weil eben das Collinearitätsbewusstsein bei verschiedenen Individuen verschieden stark ausgebildet ist. Hier ist also vor Allem der Punkt, wo die „Individualität des Uebersetzers" mitsprechen wird. Der Mathematiker beachte aber wohl, dass er im Allgemeinen weit stärker collinear-inficirt sein dürfte, als der Künstler (besonders der Landschaftsmaler). Ich gebe ausdrücklich die Erklärung ab, dass Jedem, namentlich dem Künstler, das Urtheil über die in Rede stehende Frage vollkommen frei steht, dass ich meinerseits dagegen protestire, wenn eine Anwendung der Eigenthümlichkeiten der conformen Perspective seiten des Künstlers als perspectivischer Fehler perhorrescirt wird, dass ich aber andererseits weit davon entfernt bin, das System als eine Neuerung einführen zu wollen. Ich habe es im Gegentheil in meiner Schrift wiederholt ausgesprochen und begründet, ich wiederhole es hier ausdrücklich, dass ich für die Anwendung des Systems nichts weniger als eine Zukunft erwarte. Charakterisirt doch schon *Goethe* im *Faust* unser vom Collinearitätsbewusstsein durchdrungenes Zeitalter mit den der *Phorkyas* in den Mund gelegten Worten:

„... Dort hingegen, dort
Ist Alles senk- und waagerecht und regelhaft,
So starr, so wohl in Fugen, spiegelglatt wie Stahl." —

Wohl aber wird dem System sein theoretisches Interesse stets erhalten bleiben, — schon wegen der interessanten Schlaglichter, die von ihm auf das collinear perspectivische System fallen. Beide Systeme stehen in einer sich gegenseitig ergänzenden Beziehung zu einander, insofern jedes die Verzerrungen des andern corrigirt. Diese sind Conformitätsverzerrungen beim collinearen System, Collinearitätsverzerrungen beim conformen System. Wenn daher die Härten der collinearen Perspective am Rande des Bildes bei kleiner Augdistanz gemildert und ausgeglichen werden sollen, so kann dies nur im Sinne und nach Anleitung der conformen Perspective geschehen. — Ferner lassen sich die Gefahren, denen der frei nach der Natur Zeichnende ausgesetzt ist, durch Nichts anschaulicher darlegen, als durch die vergleichende Discussion beider Systeme, wie ich dies in meiner Schrift (S. 65) näher ausgeführt habe. Schon hierdurch scheint mir der theoretische und pädagogische Werth des conformen Systems gesichert zu sein.

Eigenschaften die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Definition des Systems bilden. Es wäre ja denkbar, dass noch andere Eigenschaften, die der Centralprojection zukommen, nothwendig wären, um das System bestimmt zu machen, — ferner möglich, dass die Bedingung der Conformität auch in einem andern, nicht auf dem Horizont liegenden Punkte erfüllt werden könnte, oder dass die Conformität in einem gewissen Punkte nur eine zufällige, dem collinearen System *eo ipso* adhärirende Eigenschaft wäre, dass überhaupt jedes der Bedingung der Collinearität und Vertikalität genügende System mit der gewöhnlichen Linearperspective identisch wäre, oder dergleichen mehr. — Es handelt sich also für uns darum, direct aus den genannten drei Bedingungen die gewöhnliche Linearperspective herzuleiten.

Gelingt uns dies, so ist damit erreicht, was wir wollten, nämlich: die Charakterisirung der Linearperspective „durch diejenigen fundamentalen Eigenschaften, welche nothwendig und ausreichend sind, um dieselbe formal zu definiren". Es ist dann zugleich vollkommen aufgeklärt, „was an jenen Eigenschaften nothwendig — und was zu bestimmtem Zwecke hineingelegt" ist. Endlich fällt alsdann auch auf die ästhetische Wirkung eines perspectivischen Bildes nach ihrem ganzen Umfange ein helles Licht, insofern dieselbe eben in jenen dem Bilde immanenten Eigenschaften (Collinearität, Vertikalität und Conformität im Hauptpunkte) begründet liegt, die für das System charakteristisch sind.

Ich habe in meiner Schrift (S. 43) eine analytische, auf axonometrischen Anschauungen basirende Behandlung der in Rede stehenden Aufgabe angedeutet. Der folgende rein synthetische Beweis scheint jedoch wegen seiner ausserordentlichen Einfachheit und Anschaulichkeit dem Zwecke ungleich besser zu entsprechen.

V. Zurückführung des collinear-perspectivischen Systems auf die Centralprojection.

Wir denken uns den Ort des beschauenden Auges in Beziehung zu dem abzubildenden Object gegeben.

Würden wir alsdann um das Auge als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschreiben und uns deren Schnittfigur mit dem Sehstrahlenbündel markirt denken, so würde diese Schnittfigur alle Angaben enthalten, die zur Construction des eigentlichen Bildes erforderlich wären. Wir würden ihr noch nicht eigentlich die Bedeutung einer Abbildung zutheilen, sondern nur einer „*Hilfsfigur*", die an Stelle des Sehstrahlenbündels selbst tritt, um die Umsetzung der Strahlen und Ebenen desselben in resp. Punkte und Linien zu bewirken und dadurch die allgemeine Anordnung des

Anschauungsbildes 1. bezüglich der collinearen Gruppirung der Punkte und Linien, 2. bezüglich der Grössenverhältnisse der Sehwinkel — deutlicher vor Augen zu führen.

So lange nun aber blos die collinearen Gruppirungsverhältnisse der Punkte und Linien in Betracht kommen, können wir uns statt jener sphärischen Hilfsfigur ebenso gut auch einer ebenen Hilsfigur bedienen, die wir als Schnittfigur einer ganz beliebigen Ebene („*Hilfsebene*") mit dem Sehstrahlenbündel erhalten. Es mag gleich zu Anfang ausdrücklich hervorgehoben werden, dass eben weil die Function dieser Hilfsfigur vorerst lediglich darin besteht, die allgemeinen collinearen Gruppirungsverhältnisse der Punkte und Linien zu veranschaulichen — die Lage der Hilfsebene gegen das Sehstrahlenbündel bis auf Weiteres vollkommen gleichgiltig ist.

Um nun zunächst die allgemeinste Form derjenigen Abbildung zu erhalten, in welcher das Princip der *Collinearität* als alleinige Bedingung obwaltet, haben wir nur nöthig, zu unserer ebenen Hilfsfigur eine beliebige ihr collinear verwandte Figur zu construiren.

Zum Zweck der praktischen Ausführung der Construction wird man sich am Vortheilhaftesten (und zwar aus Gründen, die nachher sofort einleuchten werden) eines collinearen ebenen Projectionssystems bedienen, das man in der Ebene der Hilfsfigur einrichtet, um mit seiner Hilfe die collineare Abbildung der Hilfsfigur zu bewirken.

In einem solchen Projectionssystem (vergl. Taf. VI Fig. 1) mögen die Punkte der Hilfsfigur mit lateinischen Buchstaben, deren Bilder mit den gleichlautenden griechischen Buchstaben, — das Collineationscentrum durch O, die Collineationsaxe durch c bezeichnet werden. Die Gerade der Hilfsfigur, deren Bild ins Unendliche fällt, werde als Gegenlinie g, das Bild der unendlich fernen Geraden der Hilfsfigur als Fluchtlinie φ bezeichnet.

Collineationscentrum, Collineationsaxe und Fluchtlinie können zunächst vollkommen willkürlich gewählt werden. —

Es trete nun zu der seitherigen alleinigen Bedingung der *Collinearität* noch diejenige der *Vertikalität* hinzu. Es ist leicht ersichtlich, wie dieselbe befriedigt werden kann.

In der Hilfsfigur werden sich die *in natura* vertikalen Linien im Allgemeinen in einem endlichen Punkte schneiden. Durch diesen muss die Gegenlinie g gelegt werden, wenn die Bilder der Vertikalen unter sich parallel sein sollen. Jener Punkt stellt dann den Gegenpunkt der Vertikalen vor und möge dementsprechend durch G_v bezeichnet werden. — Ferner möge diejenige Linie der Hilfsfigur, nach welcher die Hilfsebene von der horizontalen Ebene des Sehstrahlenbündels geschnitten wird, die Horizontlinie der Hilfsfigur genannt und durch h bezeichnet werden. Ihr Bild η stellt dann die Horizontlinie der Bildfigur

vor. Schneidet nun h die Gegenlinie in G_h, so ist G_h der Gegenpunkt der Horizontlinie, und es muss also das Bild η mit dem Strahl OG_h parallel sein. Sollen daher in der Bildfigur die Vertikalen auf der Horizontlinie η senkrecht stehen, so müssen auch die zwei Strahlen OG_v und OG_h zu einander senkrecht sein. — Demgemäss ist das Projectionssystem in folgender Weise einzurichten (vergl. Fig. 1):

Gegeben ist G_v und h. — Man wählt zunächst das Collineationscentrum O ganz beliebig. Zieht man sodann den Strahl OG_v und durch O einen zu OG_v senkrechten Strahl, welcher die Linie h in G_h schneidet, so ist die Verbindungslinie G_vG_h als Gegenlinie g zu wählen. Die Collineationsaxe c und Fluchtlinie φ sind alsdann parallel zu g zu legen, und zwar c in beliebigem Abstande, φ in einem Abstande von c gleich dem Abstande des Punktes O von g.

Mit Benützung des also eingerichteten Projectionssystems erhält man nun die allgemeinste Form derjenigen Abbildung des Objects, in welcher das Princip der *Collinearität* und das Princip der *Vertikalität* als alleinige Bedingungen obwalten.

Es ist wohl einleuchtend, dass eine solche Abbildung ihrem Charakter nach keineswegs identisch ist mit einer durch directe Centralprojection erhaltenen Abbildung. Sie ist zwar projectivisch mit dem Sehstrahlenbündel, kann aber im Allgemeinen nicht in perspectivische Lage zu demselben gebracht werden. Sie kann wohl mit der Hilfsfigur perspectivisch gelegt werden, jedoch nicht so, dass in dieser Lage das zugehörige Projectionscentrum mit dem Centrum des Sehstrahlenbündels zusammenfallen würde. Man erhält nämlich alle überhaupt möglichen perspectivischen Lagen zwischen Bildfigur und Hilfsfigur dadurch, dass man die Ebene der Bildfigur um die Collineationsaxe* dreht (während die Hilfsfigur als Schnitt des festen Sehstrahlenbündels in fester Lage zu diesem gedacht werden mag). Der Ort, den hierbei das jeweilige Projectionscentrum beschreibt, ist eine Kreislinie, deren Halbmesser gleich der vom Collineationscentrum auf die Gegenlinie gefällten Senkrechten OM ist, deren Mittelpunkt in den Fusspunkt M dieser Senkrechten fällt und deren Ebene senkrecht zur Gegenlinie ist. Nur wenn diese Kreislinie durch das Centrum des Sehstrahlenbündels gehen würde, wäre die perspectivische Lage der Bildfigur zum Sehstrahlenbündel herstellbar.

---

* Ausser der Collineationsaxe existirt bei zwei collinearen ebenen Systemen bekanntlich noch ein zweites Paar congruenter entsprechender Punktreihen. Statt die ursprüngliche Collineationsaxe zu benützen, kann man auch dieses andere Paar (durch Drehung der einen Ebene innerhalb der andern um das Collineationscentrum um einen Winkel von 180^0) zur Coincidenz bringen und dann diese Linie als neue Collineationsaxe benützen, um welche man die Ebene der Bildfigur dreht. Erst dadurch werden sämmtliche Möglichkeiten der perspectivischen Lage beider Figuren erschöpft.

Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, da Lage und Grösse jenes Kreises ganz von der Lage des Collineationscentrums abhängig sind, diese aber vollkommen willkürlich gewählt werden durfte. —

Da die Lage des Collineationscentrums und der Abstand der Collineationsaxe bei dem vorliegenden System unbestimmt bleiben, so bestätigt es sich, dass durch die blossen zwei Bedingungen der Collinearität und Vertikalität das System noch nicht vollständig bestimmt ist. — Um eine vollkommene Bestimmtheit zu erlangen, stellen wir noch die Bedingung der *Conformität in einem bestimmten Punkte* auf, wobei wir vorerst noch keinerlei Veranlassung haben, über die Lage jenes Punktes eine beschränkende Voraussetzung eintreten zu lassen.

Um die genannte Bedingung genauer geometrisch zu präcisiren, denken wir uns einen Augenblick an Stelle der ebenen Hilfsfigur wieder die sphärische gesetzt, da an dieser die Conformitätsbeziehungen unmittelbar ersichtlich sind.

Ist p derjenige Punkt der sphärischen Hilfsfigur, welcher conform abgebildet werden soll, und sind x_1, x_2, x_3, ... Punkte, welche dem Punkte p unendlich nahe liegen; bezeichnen wir ferner die Bilder der Punkte p, x_1, x_2, x_3, ... resp. durch π, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., so verlangt die Bedingung der Conformität, dass die unendlich kleinen Dreiecke $\pi\xi_1\xi_2$, $\pi\xi_2\xi_3$, ... resp. den Dreiecken px_1x_2, px_2x_3, ... ähnlich seien. Diese Forderung kann in die zwei Bedingungen gespalten werden:

1. die Winkel $\xi_1\pi\xi_2$, $\xi_2\pi\xi_3$, ... müssen resp. den Winkeln x_1px_2, x_2px_3, ... gleich sein, oder kürzer: das Strahlenbüschel, welches von den von p ausgehenden Linienelementen gebildet wird, muss sich als congruentes Strahlenbüschel abbilden;
2. die Strecken $\pi\xi_1$, $\pi\xi_2$, $\pi\xi_3$, ... müssen resp. den Strecken px_1, px_2, px_3, ... proportionirt sein. —

Es lässt sich nun aber zum Zweck des Nachweises und der Realisirung dieser Conformitätsbedingungen die ebene Hilfsfigur ebenso leicht verwenden, wie die sphärische.

Wir haben nämlich oben ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, dass die Lage der Hilfsebene gegen das Sehstrahlenbündel vollkommen gleichgiltig ist. Ziehen wir also nach demjenigen Punkte P des Objects, in dessen Abbildung Conformität stattfinden soll, den Sehstrahl und legen die Hilfsebene senkrecht zu diesem, so geschieht damit der Allgemeinheit der Construction nicht der geringste Eintrag. Es ist aber einleuchtend, dass — wenn nun der Schnittpunkt jenes Sehstrahls mit der Hilfsebene wieder durch p bezeichnet wird — die ebene Hilfsfigur im Punkte p genau dieselbe Conformitätsgestaltung aufweist, wie die sphärische. Denn denken wir uns die Entfernung vom Auge beidemal gleich gross, so wird die Hilfskugelfläche von der Hilfsebene im Punkte p berührt; folglich ist das unendlich kleine Gebilde $px_1x_2x_3$... der ebenen und der sphärischen

Hilfsfigur gemeinsam. Wir können somit — die genannte Lage der Hilfsebene vorausgesetzt — die oben formulirten zwei Bedingungen unmittelbar auf die collineare Abbildung unserer ebenen Hilfsfigur übertragen.

Was die erste Bedingung anlangt, nämlich dass das Strahlenbüschel p sich als congruentes Strahlenbüschel abbilden soll, so existiren bei zwei collinearen ebenen Systemen bekanntlich zwei Paare entsprechender Punkte, für welche die in denselben liegenden Strahlenbüschel congruent sind. Befinden sich die zwei Systeme in collinearer Lage in einer und derselben Ebene (was auf vierfache Weise möglich ist), so repräsentirt das jeweilige Collineationscentrum einen solchen *Congruenzpunkt*.

Da nun bei der oben besprochenen Einrichtung des ebenen Projectionssystems die Lage des Collineationscentrums vollkommen unbestimmt blieb, so kann der in Rede stehenden ersten Bedingung einfach dadurch Genüge geleistet werden, dass man das Collineationscentrum in den Punkt p verlegt. —

Bestimmt sich auf diese Weise die Lage des Collineationscentrums durch die erste oben formulirte Bedingung, so wird der jetzt noch allein willkürliche Abstand der Collineationsaxe durch die zweite Bedingung seine Bestimmung finden.

Wenn diese zweite Bedingung verlangt, dass die Strecken $\pi\xi_1$, $\pi\xi_2$, $\pi\xi_3$, ... resp. den Strecken px_1, px_2, px_3, ... proportionirt seien, so schliesst diese Forderung bei der besondern Lage, wo die zwei Strahlenbüschel p und π sich in Coincidenz befinden, also je zwei entsprechende Punkte x und ξ auf dem nämlichen Strahl liegen (vergl. Fig. 1), die Bedingung in sich, dass die Verbindungslinien $\xi_1\xi_2$, $\xi_2\xi_3$, ... resp. mit den Linien x_1x_2, x_2x_3, ... parallel seien. Da sich jedoch je zwei solche Linien als einander entsprechend auf der Collineationsaxe schneiden müssen, so folgt hieraus weiter, dass die Collineationsaxe ins Unendliche fallen muss.

In diesem Falle geht nun aber die Collineationsverwandtschaft in die Verwandtschaft der Aehnlichkeit über. Wir kommen somit zu dem Schlusse, dass der Bedingung der Conformität im Punkte p allerdings genügt werden kann, aber nur dadurch, dass die Bildfigur mit der Hilfsfigur ähnlich ist.

Dies gilt zunächst für jede beliebige Lage des Punktes P. Indessen haben wir darauf zu achten, dass durch die Consequenzen der letztgenannten Bedingung die vorher aufgestellten Bedingungen nicht gefährdet werden dürfen. Eine solche Gefahr liegt aber in der That vor: Fällt nämlich die Collineationsaxe ins Unendliche, so fällt gleichzeitig mit ihr auch die Gegenlinie ins Unendliche, daher müsste auch der Punkt G_v im Unendlichen liegen. Mit anderen Worten: Wenn die Bildfigur einerseits der Hilfsfigur ähnlich sein, andererseits der Bedingung der

Vertikalität genügen soll, so muss die Vertikalität nothwendig auch schon bei der Hilfsfigur statthaben. Die Ebene der Hilfsfigur, deren Lage allerdings an und für sich willkürlich ist, müsste also vertikal gelegt werden. Diese letztere Forderung tritt aber in Collision mit der durch die Bedingung der Conformität veranlassten Forderung, dass die Hilfsebene senkrecht zu dem nach Punkt P gezogenen Sehstrahl stehe. — Beiden Forderungen gleichzeitig kann nur in dem Falle Genüge geschehen, wenn jener Sehstrahl horizontal ist, also der Conformitätspunkt p auf der Horizontlinie liegt.

Wir kommen somit zu dem Resultate, dass der Bedingung der Conformität in einem Punkte — wenn anders die Vertikalität nicht alterirt werden soll — nur dann genügt werden kann, wenn jener Punkt auf der Horizontlinie liegt.

Wir acceptiren diese letztere Beschränkung.

Wird alsdann die Ebene der Hilfsfigur senkrecht zu dem nach Punkt P führenden Sehstrahl gelegt und wird die Bildfigur mit der Hilfsfigur ähnlich construirt, so kann schliesslich die Bildfigur mit Leichtigkeit in eine Lage gebracht werden, in welcher sie als ebener Schnitt des Sehstrahlenbündels erscheint. Ihre Ebene ist in dieser Lage der Ebene der Hilfsfigur parallel, also ebenfalls vertikal und senkrecht zu dem nach Punkt P führenden Sehstrahl.

Hiermit ist also der verlangte Nachweis erbracht, dass das durch die drei Bedingungen der *Collinearität*, *Vertikalität* und *Conformität in einem Punkte des Horizonts* definirte perspectivische System identisch ist mit dem durch directe *Centralprojection* auf eine vertikale Ebene definirten gewöhnlichen System der Perspective, und dass die genannten drei Eigenschaften in der That die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Definition dieses Systems bilden.*

* Es mag zu der vorstehenden Untersuchung nachträglich noch folgende literarische Bemerkung ihren Platz finden. Wir haben in unserer Darstellung die von uns benützte ebene oder sphärische Hilfsfigur nicht selbst schon als eine Abbildung oder Projection aufgefasst, sondern gewissermassen nur als ein Surrogat für das Sehstrahlenbündel, dazu dienend, die allgemeine collineare Gruppirung der Punkte und Linien, sowie die Grössenverhältnisse der Sehwinkel deutlicher zu veranschaulichen. Immerhin aber kommt unser Verfahren im Resultat auf das Nämliche hinaus, was Herr Dr. *Scholz* in seinem Aufsatze „*Anwendung der stereographischen Projection auf die Perspective*“ (*8. Jahresbericht über die Victoriaschule zu Berlin,* Berlin 1875) als „Methode des zweimaligen Projicirens“ bezeichnet: Wir projiciren zuerst das Object auf eine ebene oder sphärische Fläche und bilden dann die erhaltene Projection durch nochmaliges Projiciren collinear ab. Herr *Scholz* macht darauf aufmerksam, dass „täglich eine Menge von Zeichnungen der allerwerthvollsten Art angefertigt werden, die auf einfache Weise auch nicht durch einmalige, sondern nur durch wiederholte Projection entstehen könnten. Es dürfte z. B. sehr schwierig sein, eine vom Architekten gezeichnete Façade als das Werk einmaliger Projection anzusehen. Sehr

VI. Die linearen Conformitätsverhältnisse. — Schluss.

Es kann schliesslich noch die Frage aufgeworfen werden, ob es nicht vielleicht möglich wäre, das Princip der Conformität zum Zwecke der vollkommenen Bestimmung des Systems (welches im Folgenden stets als den zwei Bedingungen der *Collinearität* und *Vertikalität* — aber auch

---

einfach aber gestaltet sich die Operation, wenn man das abzubildende Gebäude zunächst orthogonal projicirt und dann das so gewonnene Gebilde durch centrale Projection in passender Verkleinerung zur Ansicht bringt. Oder will man die Reihenfolge umkehren, so lässt sich zunächst durch eine centrale räumliche Projection ein verkleinertes Modell des betreffenden Gebäudes hergestellt denken, um aus diesem durch orthogonale Projection die gewünschte Abbildung herzuleiten. ... Die weitere Forschung nach derartigen Methoden (welche Abbildungen des Raumes durch wiederholte Projection liefern) ... und der Versuch, die bisher bestehenden Constructionsmethoden der Perspective in diesem Sinne umzugestalten, dürften nicht als unberechtigt angesehen werden. Ohne Gewinn werden dahinzielende Untersuchungen nicht bleiben, und sollte auch nur der Nachweis gewonnen werden, dass unter allen brauchbaren Methoden perspectivischer Construction die bisher bestehende die beste ist." — Ich habe mich sehr gefreut, den Verfasser in letzterer Hinsicht in vollkommener Uebereinstimmung mit mir zu sehen, wie ich denn überhaupt in der mir leider erst in allerjüngster Zeit bekannt gewordenen Abhandlung ausserordentlich viele Berührungspunkte mit den in meiner *„Subjectiven Perspective"* niedergelegten Anschauungen gefunden habe. — Die Vorstellung von einer „Abbildung der Projection" erinnert mich jedoch an noch einen andern Autor. Herr *Tilscher* erhebt in seiner Brochure *„Grundlagen der Ikonognosie"* (Prag 1878) eben diesen Gedanken zu einem Princip von fundamentaler Bedeutung. Er treibt die Consequenz in der Realisirung dieses Gedankens so weit, dass er nun wirklich die (in einem bestimmten Maassstab gezeichnete) Orthogonalprojection eines Objects nicht als Projection selbst, sondern nur als „Bild der Projection" angesehen und bezeichnet wissen will, und zwar als das *„Aehnlichkeitsbild"*, wenn der Maassstab ein verjüngter ist, als das *„Congruenzbild"*, wenn die Zeichnung in natürlichem Maassstabe ausgeführt ist. Ich habe über die genannte Brochure mit Herrn *Tilscher* correspondirt und ihm gegenüber privatim meine Antipathie gegen diese und andere von ihm eingeführte Neuerungen ohne Rückhalt ausgesprochen. Herr *Tilscher* erwiderte mir hierauf u. A. Folgendes: „Es würde wohl thunlich sein, die von Ihnen hervorgehobenen Momente derart zu beleuchten, dass auch dem Abgeurtheilten einige Berechtigung bliebe; das Wesen des Ganzen würde damit jedoch nicht geklärt erscheinen, und ich muss in dieser Beziehung auf die Gründe der II. Abtheilung, welche jenem Gegenstande gewidmet sein wird, hinweisen. ... Die Trennung von Projection und Bild ist für eine exacte Behandlung sicherlich zwingend, sobald erkannt ist, dass für Beziehungen der Projectionen andere Gesetze gelten, als für die Beziehungen der Bilder." — Ohne aus meiner Reserve gegenüber der Brochure Herrn *Tilscher's* herauszutreten, muss ich nach diesen Worten doch dem Gedanken Raum geben, die Grundanschauungen jenes hochverdienten Forschers könnten sich möglicherweise als den meinigen viel näher stehend entpuppen, als sich aus seiner Brochure vermuthen lässt. In diesem Gedanken dürfen wir dem Erscheinen der *II. Abtheilung* der Brochure mit Spannung entgegensehen.

nur diesen — genügend vorausgesetzt ist) noch in anderer Weise einzuführen, als dies im Vorangehenden geschehen ist.

Man könnte z. B. versuchen, die Bedingung aufzustellen, es solle nicht in einem Punkte, sondern längs einer bestimmten Geraden Conformität stattfinden, oder es solle die Conformitätsverzerrung nicht von einem Punkte aus radial nach allen Seiten zunehmen, sondern sich in gleichmässigerer Weise über das ganze Bild vertheilen, so dass zwar kein Punkt in demselben existirte, in welchem die Abbildung so conform wäre, wie im Hauptpunkte des vorbetrachteten Systems, aber auch kein Punkt, in dem die Conformitätsverzerrungen so stark wären, wie bei jenem in einiger Entfernung vom Hauptpunkte.

Es lässt sich indessen leicht erkennen, dass eine solche Bedingung mit dem Princip der Collinearität sich nicht in Einklang bringen lassen würde.

Schon längs einer einzigen geraden Linie ist es nicht möglich, die Conformitätsverzerrungen in der Abbildung gleichmässiger zu vertheilen, geschweige denn die Abbildung den entsprechenden Gesichtswinkeln vollkommen conform anzupassen. Denn da die Abbildung einer geradlinigen Punktreihe zufolge der Collinearitätsbedingung mit dem entsprechenden Strahlenbüschel des Sehstrahlenbündels jedenfalls projectivisch ist, so lässt sich (auch wenn das ebenflächige Gesammtbild nicht in perspectivische Lage zu dem Sehstrahlenbündel gebracht werden kann) doch die Punktreihe allein für ihre Person stets zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel perspectivisch legen.* In dieser Lage aber erkennt man sofort, dass auf ihr ein Punkt existirt, in welchem die Conformitätsverzerrung ihren geringsten Werth besitzt und von dem aus die Grösse der Verzerrung nach beiden Seiten hin in symmetrischer Weise stetig zunimmt. Wir nennen diesen Punkt den „*Minimalpunkt der linearen Verzerrung*" oder kurz den „*Minimalpunkt*". Es ist derjenige, für welchen bei perspectivischer Lage der entsprechende Strahl des Strahlenbüschels senkrecht zur Geraden steht.

Es habe bei jener perspectivischen Lage das Centrum des Strahlenbüschels einen Abstand a von der Geraden, und es mögen ferner die Sehwinkel durch die Bögen einer Hilfskugel (bezw. eines Hilfskreises) vom Halbmesser r gemessen werden. Hat alsdann irgend ein Punkt der Geraden eine lineare Entfernung x oder eine Sehwinkelentfernung φ vom

---

* Wollte man sämmtliche Punktreihen des Bildes in eine solche Lage bringen, so würden dieselben dabei keineswegs in die nämliche Ebene fallen. — Man beachte ferner für das Folgende wohl, dass sich zwar ein ebenes Strahlenbüschel (auch Parallelstrahlenbüschel) stets in perspectivische Lage zu dem entsprechenden Ebenenbüschel des Sehstrahlenbündels bringen lässt, dass jedoch für eine solche Lage die in den einzelnen Geraden des Strahlenbüschels enthaltenen Punktreihen im Allgemeinen keineswegs perspectivisch liegen mit den ihnen entsprechenden Sehstrahlenbüscheln.

Minimalpunkte, so wird die Grösse u der linearen Verzerrung in jenem Punkte gemessen durch das Verhältniss des in demselben befindlichen unendlich kleinen Linienelements dx zu dem den zugehörigen Sehwinkel messenden Bogen $r\,d\varphi$. Es ist also

$$u = \frac{dx}{r\,d\varphi} = \frac{d(a\,tg\,\varphi)}{r\,d\varphi} = \frac{a}{r}\,sec^2\varphi.$$

Die Verzerrung wächst also vom Minimalpunkte aus proportional mit dem Quadrat der Secans der angulären Entfernung.

Dieser Charakter der Abbildung kommt sämmtlichen Geraden ohne Ausnahme zu. Indessen dürfen jene Minimalpunkte nicht etwa als lineare Conformitätspunkte angesehen werden. Denn bringt man die einzelnen geradlinigen Punktreihen in perspectivische Lage mit ihren entsprechenden Sehstrahlenbüscheln, so haben sie von deren Centrum sehr verschiedene Entfernungen a. Daher hat auch der Quotient $\frac{a}{r}$, welcher die Grösse der Verzerrung im Minimalpunkte ausdrückt, für die einzelnen Geraden sehr verschiedene Werthe. — Durch diesen Minimalwerth ist aber die Grösse der Verzerrung in jedem andern Punkte der betreffenden Geraden vollständig bestimmt. Zwei gerade Linien, welche in ihren Minimalpunkten gleiche Minimalverzerrungen haben, zeigen auch in ihrem ganzen Verlaufe übereinstimmende Verzerrung, d. h. je zwei gleichweit vom Minimalpunkte entfernte Punkte haben gleiche Verzerrungsgrösse.

Die verschiedenen collinearen Systeme unterscheiden sich nun hinsichtlich ihrer linearen Conformitätsverhältnisse dadurch von einander, dass in jedem System 1. den Minimalpunkten wieder andere Lagen auf ihren resp. Geraden, 2. den Minimalwerthen der linearen Verzerrung wieder andere Grössen zukommen.*

Sollen demgemäss die linearen Conformitätsverhältnisse zu Definitionsbedingungen für ein collineares System herangezogen werden, so kann man zunächst versuchen, bezüglich der Lage der Minimalpunkte der wichtigsten geraden Linien des Bildes gewisse Bedingungen festzusetzen. — Es liegt in der That der Gedanke sehr nahe, die Forderung aufzustellen, dass die Minimalpunkte der wichtigsten Linien an besonders bedeutsame Stellen des Bildes, welche das Auge des Beschauers vorzugsweise auf sich lenken, zu liegen kommen.

Nun sind — wieder ein architektonisches Object vorausgesetzt — die wichtigsten und bedeutsamsten Linien, welche das Auge beim Be-

---

* Die Erörterung der interessanten Beziehungen, die zwischen zwei einander entsprechenden Minimalpunkt-Systemen obwalten, bleibt einer andern Gelegenheit vorbehalten. Es werden daher auch im Folgenden nicht sämmtliche Beweise ausführlich vorgeführt.

schauen vorzugsweise bestreicht, vorgestellt durch die Horizontlinie und die Vertikalen. Wir werden daher veranlasst, die Bedingung aufzustellen, dass die Minimalpunkte der Vertikalen sämmtlich auf der Horizontlinie liegen, der Minimalpunkt der Horizontlinie selbst aber an einer besonders bedeutsamen Stelle derselben. — Es lässt sich nun aber unschwer beweisen, dass die erstere Bedingung nicht blos erfüllt werden kann, sondern dass sie ganz von selbst erfüllt wird. Sie repräsentirt nämlich eine schon der Bedingung der Vertikalität adhärirende Eigenschaft, welche demgemäss einem jeden, den Bedingungen der Collinearität und Vertikalität genügenden System *eo ipso* zukommt.

Da uns somit die Lagenverhältnisse der Minimalpunkte keine neue Bedingung zum Behuf der vollständigen Bestimmung des Systems liefern, so bleibt uns blos noch die Möglichkeit, die Grössenverhältnisse der linearen Verzerrung zu diesem Zwecke heranzuziehen, und zwar in der Art, dass wir bei den wichtigsten Linien eine möglichste Gleichförmigkeit der Verzerrungsbeträge herbeizuführen suchen. Da aber, wie schon bemerkt, für jede Gerade der im Minimalpunkt stattfindende Minimalwerth die Verzerrungsbeträge der ganzen Geraden bestimmt, so genügt es, blos diese einzelnen Minimalwerthe in vergleichende Betrachtung zu ziehen.

Bezüglich der Vertikalen unter sich lässt sich in dieser Hinsicht nichts Wesentliches erreichen. Man erkennt nämlich leicht, dass bei jedem Büschel von Parallelstrahlen einer existirt, in welchem der Minimalwerth der Verzerrung ein kleinster ist und von dem aus dann die Minimalwerthe nach beiden Seiten stetig zunehmen.

Wohl aber lässt sich zwischen der Verzerrung der vertikalen Linien und derjenigen der Horizontlinie eine gewisse Gleichförmigkeit herstellen.

Um in dieser Richtung möglichst günstige Verhältnisse zu erzielen, erscheint es zunächst wünschenswerth, es solle diejenige Vertikale, welche von allen den kleinsten Minimalwerth der Verzerrung besitzt, durch den Minimalpunkt der Horizontlinie gehen. — Es lässt sich indessen unschwer beweisen, dass auch diese Forderung ganz von selbst erfüllt wird, sobald das System der Bedingung der Vertikalität genügt.

Bezeichnen wir den Minimalpunkt der Horizontlinie vorgreifend als „*Hauptpunkt*“, so fällt also in den Hauptpunkt der absolut kleinste Werth der vertikalen Verzerrung und zugleich der kleinste Werth der Verzerrung der Horizontlinie. Diese beiden Minimalwerthe haben jedoch im Allgemeinen verschiedene Grösse. — Es erscheint nun aber für eine möglichste Gleichförmigkeit der beiderseitigen Verzerrungsverhältnisse als das denkbar Günstigste und Nächstliegende, die Bedingung aufzustellen, es sollen jene beiden Minimalwerthe die nämliche Grösse haben. Es hat alsdann die durch den Hauptpunkt gehende Vertikale auch in ihrer gan-

zen Ausdehnung mit der Horizontlinie übereinstimmenden Verzerrungsverlauf.

Man erkennt sofort, dass durch diese Bedingung das System mit unserem zuvor betrachteten centralprojectivischen System identisch wird. Denn wir haben jetzt in jenem Hauptpunkte lineare Conformität nach vier Richtungen (nach rechts und links, nach aufwärts und abwärts). Daraus folgt, dass derselbe ein vollständiger Conformitätspunkt ist.

Es fällt dann überhaupt für jede durch den Hauptpunkt gehende Linie der Minimalpunkt in den Hauptpunkt, und sämmtliche Minimalwerthe haben gleiche Grösse. Daraus folgt ferner, dass alle diese Geraden in ihrer ganzen Ausdehnung den nämlichen Verzerrungsverlauf haben, dass also allen Punkten, die in einem Kreise um den Hauptpunkt liegen, gleiche Grösse der linearen Verzerrung in der Richtung nach dem Hauptpunkte zukommt.

Fragen wir schliesslich nach dem Verhältnisse, das zwischen der Grösse der linearen Verzerrung in einem beliebigen Punkte der Horizontlinie und der in den nämlichen Punkt fallenden vertikalen Minimalverzerrung besteht, so nehmen beide vom Hauptpunkte aus nach beiden Seiten symmetrisch zu, jedoch die horizontliche Verzerrung in stärkerem Grade als die vertikale. Denn die erstere wächst, wie oben gezeigt wurde, proportional mit dem Quadrate der Secans der Sehwinkelentfernung, die letztere — wie man leicht erkennt — nur proportional mit der einfachen Secans. Der hierdurch sich ergebende Unterschied zwischen den beiderseitigen Verzerrungsbeträgen wird mit zunehmender Entfernung vom Hauptpunkte immer empfindlicher und veranlasst den bekannten, ins Breite gezogenen allgemeinen Verzerrungscharakter am Rande des Bildes, welcher die *Crux* der Linearperspective bildet.*

Um diese *Crux* zu beseitigen, könnte man zwar versuchen, das System in der Art umzuändern, dass man als Definitionsbedingung aufstellte, es solle die horizontliche Verzerrung mit der vertikalen Verzerrung nicht im Hauptpunkte übereinstimmen, sondern in zwei symmetrisch zum Hauptpunkte gelegenen Punkten der Horizontlinie (z. B. falls der Hauptpunkt in der Mitte liegt, in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, oder $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Bildbreite). Dies ist in der That ausführbar und es würde in einem solchen System die Verzerrung am seitlichen Rande auch wirklich wesentlich gemildert erscheinen. Allein es würde alsdann im Hauptpunkte die vertikale Verzerrung einen grösseren Betrag haben, als die horizontliche; es würde daher das Bild gerade in seiner wichtigsten Partie einen in die Länge gezogenen Verzerrungscharakter zeigen, was eine ungleich ungünstigere Wirkung haben würde, als die Verzerrung am seitlichen Rande. — Durch unsere

* Vergl. meine „*Subjective Perspective*“, S. 73 Anm. 1.

zuerst gemachte Annahme werden daher immer noch die denkbar günstigsten Verhältnisse erzielt.

Wir kommen somit auch von der Betrachtung der linearen Conformitätsverhältnisse aus zu dem Resultat, dass das traditionelle System der Linearperspective zwar schlechterdings nicht das einzig mögliche, denknothwendige System repräsentirt, wohl aber von allen Systemen gleicher Gattung sich als das weitaus günstigste und daher für künstlerische Zwecke weitaus geeignetste erweist. — Der Zweck der vorstehenden Untersuchung war wesentlich der: klarzulegen, welche von den dem System eigenthümlichen Eigenschaften nothwendig und welche nur aus Zweckmässigkeitsgründen in dasselbe hineingelegt sind. — —

Wenn man mir den Vorwurf gemacht hat, ich trage mich mit „Umsturzideen“, so hoffe ich durch die vorstehende Darlegung meiner Theorie nachgewiesen zu haben, dass es nicht meine Absicht ist, zu zerstören, sondern vielmehr zu befestigen. Ich habe nur die „Stützen“ des traditionellen Systems für „morsch“ erklärt, nicht das System selbst. Gleichzeitig aber habe ich auch die morschen Stützen durch neue ersetzt und habe den Nachweis erbracht, dass unter allen möglichen logisch und mathematisch gleichberechtigten Systemen perspectivischer Abbildung das bisher bestehende das rationellste ist. Oder ich habe für einen Skeptiker *quand même* doch wenigstens den eigentlichen Kern der ganzen Streitfrage herausgeschält und blossgelegt, insofern dieser nämlich in der Frage besteht, ob unser Collinearitätsbewusstsein unbedingte oder nur bedingte Befriedigung im Bilde verlangt. Die Ausfechtung dieser letzteren Streitfrage dürfen und müssen wir aber den Aesthetikern und Künstlern überlassen.

Es war vielleicht nicht klug von mir gehandelt, dass ich mich in meiner ursprünglichen Schrift (die ich nicht als mathematische, sondern als „perspectivisch-ästhetische Studie“ bezeichnete) auf die Discussion jener Frage überhaupt einliess. Es ist ein Thema, über welches sich *in infinitum* streiten lässt und welches namentlich die Streitlust so sehr reizt, dass es leicht die ganze Aufmerksamkeit des kritischen Lesers für sich allein absorbirt. — Indessen hoffe ich, den hieraus erwachsenen Schaden durch vorstehenden Aufsatz reparirt zu haben.

XIV.

Zur mathematischen Statistik.

Von

W. Küttner

in Burgk.

Hierzu Taf. VI Fig. 2—5.

Obgleich die Bevölkerungsstatistiker schon lange die Anzahl der geschlossenen Ehen registriren und mit der Gesammtbevölkerung vergleichen, so befinden wir uns über die Gesetze, nach denen sich bei einer gegebenen Generation männlicher Personen die Eheschliessungen vollziehen, noch vollkommen unaufgeklärt. Und doch sind diese Gesetze schon mit Rücksicht auf die Wittwenpensionsversicherung, wie sie die Knappschaftscassen und ähnliche Institute* eingehen, von solcher Wichtigkeit, dass man sich längst hätte mit ihnen befassen sollen.

Im Allgemeinen wird sich das erwähnte Gesetz als Function der Lebenswahrscheinlichkeiten zweier Ehegatten und als Function der Wahrscheinlichkeit für eine männliche unverheirathete Person, im Alter x bis $x+dx$ zum n^{ten} Male eine y- bis $y+dy$-jährige weibliche Person zu ehelichen, darstellen lassen. Die letztere Wahrscheinlichkeit ist jedoch wegen des unendlich kleinen Altersintervalles von x bis $x+dx$ und y bis $y+dy$ unendlich klein und deshalb kein Gegenstand statistischer Ermittelung, wohl aber kann solche mit genügender Schärfe aus der Wahrscheinlichkeit, sich im Alter x bis $x+1$ mit einer $y-\frac{1}{2}$- bis $y+\frac{1}{2}$-jährigen weiblichen Person zum n^{ten} Male zu verheirathen, abgeleitet werden. Den Weg anzugeben, der mit Hilfe der Bevölkerungsstatistik zur Ermittelung derselben führt, ist der Zweck vorliegender Abhandlung.

Nennen wir die n^{te} Ehe eines Mannes eine Ehe n^{ter} Ordnung und analog einen Wittwer aus n^{ter} Ehe einen Wittwer n^{ter} Ordnung, so besteht die zu lösende Aufgabe darin, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ein Wittwer $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sich im Alter x bis $x+1$ mit einer $y-\frac{1}{2}$- bis $y+\frac{1}{2}$-jährigen weiblichen Person zum n^{ten} Male verheirathet, wobei gleichzeitig unter einem Wittwer o^{ter} Ordnung ein bisher noch

* Eventuell die Reichsversicherungsanstalt.

Unverehelichter zu verstehen ist. Fragliche Wahrscheinlichkeit lässt sich aber in folgende zwei zerlegen:

1. in die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wittwer $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung im Alter x bis $x+1$ überhaupt zum n^{ten} Male verheirathet, $= {}^nP_x$

und

2. in die Wahrscheinlichkeit, eine $y-\frac{1}{2}$- bis $y+\frac{1}{2}$-jährige weibliche Person zu heirathen, wenn die n-malige Heirath im Alter x bis $x+1$ gewiss wäre, $= Q_y$.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass es unmöglich ist, sowohl ${}^nP_x$, als auch Q_y absolut genau zu ermitteln, da wir es hier, wie überhaupt bei allen statistischen Untersuchungen, mit der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* zu thun haben. Wir müssen uns infolge dessen begnügen, beide Wahrscheinlichkeiten durch ihre wahrscheinlichsten Werthe, die wir mit ${}^np_x$, beziehentlich q_y bezeichnen wollen, zu ersetzen.

Die Ermittelung von ${}^np_x$.

Nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der wahrscheinlichste Werth von ${}^1P_x$, d. h. die Wahrscheinlichkeit für eine männliche Person, sich im Alter x bis $x+1$ zum ersten Male zu verheirathen, =

$$1)\qquad {}^1p_x = \frac{V(x+1)-V(x)}{F(x)},$$

wenn $F(x)$ die Anzahl der Unverheiratheten (mit Ausschluss der Wittwer) vom Alter x aus einer gegebenen Gesammtheit von männlichen Personen, z. B. die männliche Bevölkerung Sachsens, und $V(x)$ die Anzahl der aus derselben Gesammtheit bis zum Alter x eingegangenen ersten Ehen bezeichnet, während der wahre Werth derselben mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen

$$2)\qquad {}^1p_x \pm 0{,}476936\sqrt{\frac{2\,{}^1p_x(1-{}^1p_x)}{F(x)}}$$

liegt.

Benützen wir die ausgezeichnete Zeuner'sche Darstellungsweise der Gesammtheiten von Lebenden etc. vermittelst der Raumcoordinaten und stellen uns in Fig. 2 unter der Fläche $A_1N_1N_2A_2$ irgend eine Anzahl männlicher Geburten in der Zeit $OA_1 = t$ bis $OA_2 = t+1$ vor, so ist, wenn wir die zugehörigen Abminderungsordnungen N_1M_1, N_2M_2 der unverheirathet Lebenden aufgetragen denken und $A_1B_1 = A_2B_2 = x$ nehmen, die Fläche $B_1C_1C_2B_2$ gleich der Anzahl der aus der Geburtenstrecke t bis $t+1$ stammenden, im Alter x noch unverheirathet Lebenden, also $F(x)$.

Nun würde aber eine zur Zeit $\tau_1 = t+1+x$ vorgenommene Zählung dieser aus der Geburtenstrecke t bis $t+1$ stammenden männlichen Per-

sonen, soweit sie noch unverheirathet sind, uns die Projection der Fläche $D_1 E_1 C_2 B_2$ auf die YZ-Ebene oder $B_1 F C_2 B_2 = {}^0Z_x$ liefern, welche um die Fläche $F C_1 C_2$ kleiner als $F(x)$ ist. Diese kleine Fläche $F C_1 C_2$ stellt aber offenbar nichts Anderes dar, als die Anzahl der bei fraglicher Generation in der Zeit von $\tau_0 = t + x$ bis $\tau_1 = t + 1 + x$ im Alter von x bis $x + 1$ eingegangenen Ehen und stattgehabten Todesfälle der Unverheiratheten. Bezeichnet man erstere Gesammtheit mit ${}^1N_x$ und letztere mit ${}^0M_x$, so folgt

$$F(x) = {}^0Z_x + {}^1N_x + {}^0M_x,$$

wo ${}^0Z_x$ durch eine Volkszählung und ${}^1N_x$ und ${}^0M_x$ durch die Zählkarten der Standesämter gefunden wird.

Unter der Voraussetzung, dass die Volkszählung vom 1. December 1880 benützt wird, erhält man ${}^0Z_x$, wenn aus den Haushaltungslisten, beziehentlich Zählkarten die Anzahl der vom 1. December 1880 — $(x+1)$ bis mit 30. November 1880 — x geborenen männlichen Personen extrahirt wird, welche zur Zählzeit noch unverheirathet waren, wobei für x nach und nach alle möglichen ganzen Zahlen, die es annehmen kann, zu setzen sind.

Ueber die Grösse der hierzu gehörigen ${}^1N_x$ und ${}^0M_x$ geben sodann die Zählkarten der Standesämter über Eheschliessungen und Todesfälle in der Zeit vom 1. December 1879 bis mit 30. November 1880 Aufschluss. Vereinigt man von ersteren diejenigen, wo der Ehemann aus der Geburtenstrecke vom 1. December $1880 - (x+1)$ bis mit 30. November 1880 $- x$ stammend im Alter von x bis $x+1$ Jahren die erste Ehe eingegangen ist, so giebt deren Anzahl ${}^1N_x$, während aus den letzteren ${}^0M_x$ dadurch gefunden wird, dass man diejenigen aufrechnet, wo der Verstorbene eine männliche unverheirathete Person aus der Geburtenstrecke vom 1. December $1880 - (x+1)$ bis mit 30. November $1880 - x$ war und zur Zeit seines Todes x bis $x+1$ Jahre alt war. Diese Erhebungen sind gleichfalls auf alle möglichen Werthe von x auszudehnen. Die Summe von dem auf diese Weise ermittelten ${}^0Z_x$, ${}^0M_x$ und ${}^1N_x$ ist unser gesuchtes $F(x)$.

Die Ermittelung von $V(x+1) - V(x)$ geschieht ebenfalls vermittelst der Zählkarten der Standesämter. Trägt man nämlich in Fig. 2 die zugehörigen Curven für das Anwachsen der Verheirathungsfälle $J_1 K_1$, $J_2 K_2$ auf, so sieht man leicht ein, dass die Fläche $B_1 J_1 J_2 B_2 = V(x)$ und die Fläche $D_1 K_1 K_2 D_2 = V(x+1)$ ist und dass die Differenz $V(x+1) - V(x)$ die Anzahl derjenigen zwischen den Zählzeiten τ_0 und τ_2 eingegangenen ersten Ehen sein muss, wo das Verehelichungsalter des aus der Geburtenstrecke t bis $t+1$ stammenden Mannes x bis $x+1$ Jahre betrug. Nun folgt aber weiter aus derselben Figur

$$\tau_0 = t + x, \quad \tau_2 = t + 1 + (x+1)$$

und hieraus

$$\tau_2 - \tau_0 = 2,$$

so dass man, um die gewünschten Fälle alle zu erhalten, nicht, wie man leicht glauben könnte, einen einjährigen, sondern einen zweijährigen Zeitraum zu durchforschen hat. Um daher $V(x+1) - V(x)$ zu finden, haben wir weiter von den Zählkarten über Verheirathungsfälle in der Zeit vom 1. December 1880 bis mit 30. November 1881 diejenigen auszuscheiden, wo der aus der Geburtenstrecke vom 1. December 1880 $-(x+1)$ bis mit 30. November $1880-x$ stammende Ehemann die erste Ehe eingegangen ist und zur Zeit seiner Eheschliessung im Alter von x bis $x+1$ Jahren stand. Ihre Anzahl ${}^1O_x$ zu der oben gefundenen Anzahl ${}^1N_x$ addirt, giebt, wie sofort erhellt, $V(x+1) - V(x)$. Damit folgt

$$3)\qquad {}^1p_x = \frac{{}^1N_x + {}^1O_x}{{}^0Z_x + {}^1N_x + {}^0M_x}.$$

Bei der Ermittelung von ${}^2p_x$, ${}^3p_x$, ... stossen wir auf eine Schwierigkeit, die bei der Ableitung von ${}^1p_x$ nicht vorhanden war. Während die Anzahl der am Anfange eines Altersjahres vorhandenen Unverheiratheten einer gegebenen Generation sich durch Tod oder Verheirathung nur vermindern konnte, erhalten die Wittwer im Allgemeinen durch das Wegsterben von Ehefrauen einen Zuwachs, der bei Ermittelung der Wahrscheinlichkeitswerthe ${}^2p_x$, ${}^3p_x$, ... nicht ausser Berücksichtigung bleiben darf.

Bezeichnen wir mit $\chi(v)\,dv$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei irgend einem Ehepaare die Ehefrau v bis $v+dv$ Jahre älter als der Mann ist, mit $\omega(u, u+v)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Ehepaar zur Zeit, wo der Ehemann u Jahre alt wird, noch zusammen lebt, und mit $\sigma(u)\,du$, resp. $\sigma_1(u)\,du$ die Wahrscheinlichkeit für eine männliche, resp. weibliche Person, in dem unendlich kleinen Altersintervall von u bis $u+du$ zu sterben, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ehemann, dass er eine um v Jahre ältere Ehefrau besitzen und in dem unendlich kleinen Altersintervall von u bis $u+du$ Wittwer werden wird,

$$\chi(v)\,dv\;\omega(u, u+v)\,[1-\sigma(u)\,du]\,\sigma_1(u+v)\,du = \chi(v)\;\omega(u, u+v)\;\sigma_1(u+v)\,du\,dv.$$

Lässt man in dem soeben gefundenen Ausdrucke v alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen und summirt die erhaltenen Functionswerthe, so erhält man offenbar die Wahrscheinlichkeit r, dass allgemein ein Ehemann im Alter u bis $u+du$ Wittwer wird, ausgedrückt durch

$$4)\qquad r = \int_{v=-\infty}^{v=+\infty} \chi(v)\;\omega(u, u+v)\;\sigma_1(u+v)\,du\,dv, \\ = \Phi(u)\,du.$$

Sei jetzt in einer gegebenen Gesammtheit von Lebenden die Anzahl der Wittwer aus $(n-1)^{\text{ter}}$ Ehe vom Alter $x = {}^{n-1}F(x)$, die Anzahl der Ehepaare $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, bei denen der Ehemann ebenfalls vom Alter x, $= {}^{n-1}A(x)$, die Function für das Anwachsen der Ehen n^{ter} Ordnung

bei fraglicher Gesammtheit überhaupt $= {}^{n}V(x)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wittwer $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis zum Alter u nicht wieder verheirathet, $= {}^{n-1}\varphi(u)$, so ist, wenn $\omega(u, u+v)$ so bestimmt wird, dass $\omega(x, x+v)$ für alle möglichen Werthe von v den Werth 1 annimmt,*

$$
{}^{n}V(x+1) - {}^{n}V(x)
$$

$$
= {}^{n-1}F(x)\,{}^{n}p_x + {}^{n-1}A(x) \int_{u=x+dx}^{u=x+1} \Phi(u)\, du \left(1 - \frac{{}^{n-1}\varphi(x+1)}{{}^{n-1}\varphi(u)}\right),
$$

$$
{}^{n}V(x+1) - {}^{n}V(x)
$$

$$
5)\quad = {}^{n-1}F(x)\,{}^{n}p_x + {}^{n-1}A(x) \int_{u=x}^{u=x+1} \Phi(u)\, du - {}^{n-1}A(x)\, {}^{n-1}\varphi(x+1) \int_{u=x}^{u=x+1} \frac{\Phi(u)\, du}{{}^{n-1}\varphi(u)}.
$$

Die Benützung der soeben aufgestellten Gleichung 5) zur Berechnung von ${}^{n}p_x$ ist streng genommen nicht möglich, weil die Formen der Functionen $\Phi(u)$ und ${}^{n-1}\varphi(u)$ völlig unbekannt sind. Wir haben auch keine Hoffnung, dass wir je zur Kenntniss derselben gelangen könnten; Alles, was uns möglich sein wird, ist, dass wir die Zahlenwerthe von $\Phi(u)$ und ${}^{n-1}\varphi(u)$ für bestimmte u_1, u_2, u_3, ... finden, die zwischen je zwei derselben liegenden Functionswerthe aber nur nach einer Interpolationsformel auftragen können, wobei jedoch die Möglichkeit gelassen ist, das Intervall $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, ... beliebig klein zu machen. Mit Rücksicht hierauf gehen wir jetzt von der einfachsten Annahme aus und setzen innerhalb der Grenzen $u = x$ bis $u = x+1$

$$
\Phi(u) \text{ als constant } = k
$$

und

$$
{}^{n-1}\varphi(u) = \alpha - \beta u.
$$

Damit wird aber

$$
6\text{a})\qquad {}^{n-1}A(x) \int_{x}^{x+1} \Phi(u)\, du = {}^{n-1}A(x)\, k,
$$

$$
{}^{n-1}A(x)\, {}^{n-1}\varphi(x+1) \int_{x}^{x+1} \frac{\Phi(u)\, du}{{}^{n-1}\varphi(u)} = {}^{n-1}A(x)\, k\, {}^{n-1}\varphi(x+1) \int_{x}^{x+1} \frac{du}{\alpha - \beta u}.
$$

Nun ist

$$
{}^{n-1}\varphi(x+1) \int_{x}^{x+1} \frac{du}{\alpha - \beta u} = - \frac{{}^{n-1}\varphi(x+1)}{\beta}\, log\, nat \frac{{}^{n-1}\varphi(x+1)}{{}^{n-1}\varphi(x)},
$$

und da

* Bezeichnet $f(u)$, bezichentlich $f_1(u)$ die Anzahl der Lebenden nach den bezüglichen Absterbeordnungen, so würde $\omega(u, u+v) = \dfrac{f(u)\, f_1(u+v)}{f(x)\, f_1(x+v)}$ zu nehmen sein.

$$\beta = {}^{n-1}\varphi(x) - {}^{n-1}\varphi(x+1), \quad \frac{{}^{n-1}\varphi(x+1)}{{}^{n-1}\varphi(x)} = 1 - {}^{n}p_x,$$

ist auch

$${}^{n-1}\varphi(x+1)\int_x^{x+1} \frac{du}{\alpha - \beta u} = -\frac{1-{}^{n}p_x}{{}^{n}p_x}\, lognat(1-{}^{n}p_x).$$

Da aber

$$lognat(1-{}^{n}p_x) = -\left[{}^{n}p_x + \frac{{}^{n}p_x^2}{2} + \frac{{}^{n}p_x^3}{3} + \dots\right],$$

so ist auch

$${}^{n-1}\varphi(x+1)\int_x^{x+1} \frac{du}{\alpha - \beta u} = \left[1 + \frac{{}^{n}p_x}{2} + \frac{{}^{n}p_x^2}{3} + \frac{{}^{n}p_x^3}{4} + \dots - {}^{n}p_x - \frac{{}^{n}p_x^2}{2} - \frac{{}^{n}p_x^3}{3} - \dots\right]$$

und, wenn die höheren Potenzen von ${}^{n}p_x$ vernachlässigt werden, endlich

$$\text{6b)} \qquad \varphi(x+1)\int_x^{x+1} \frac{du}{\alpha - \beta u} = 1 - \frac{{}^{n}p_x}{2}.$$

Nun ist aber offenbar $\int_x^{x+1} {}^{n-1}A(x)\,\Phi(u)\,du = k\,{}^{n-1}A(x)$ die Anzahl der in der Altersstrecke von x bis $x+1$ aufgetretenen Wittwer aus $(n-1)^{\text{ter}}$ Ehe, die wir kurz mit ${}^{n-1}R(x)$ bezeichnen wollen, so dass, wenn die unter 6a) und 6b) erhaltenen Ausdrücke in 5) substituirt werden,

$${}^{n-1}F(x)\,{}^{n}p_x + \tfrac{1}{2}\,{}^{n-1}R(x)\,{}^{n}p_x = {}^{n}V(x+1) - {}^{n}V(x)$$

folgt, woraus sodann

$$\text{7)} \qquad {}^{n}p_x = \frac{{}^{n}V(x+1) - {}^{n}V(x)}{{}^{n-1}F(x) + \frac{1}{2}\,{}^{n-1}R(x)}$$

gefunden wird.

Sei jetzt in Fig. 3 $A_1B_1 = A_2B_2 = x$, $B_1D_1 = B_2D_2 = 1$ und der Inhalt der Fläche $B_1C_1C_2B_2$ die Anzahl ${}^{i}F(x)$ der aus der Geburtenstrecke $OA_1 = t$ bis $OA_2 = t+1$ stammenden Wittwer i^{ter} Ehe vom Alter x, sowie ferner C_1c_1, C_2c_2 allgemein die Abminderungscurven und C_1b_1, C_2b_2 speciell die Absterbecurven dieser Wittwer. Unter diesen Voraussetzungen wird die Fläche $b_1a_1a_2b_2$ die Verstorbenen und die Fläche $c_1b_1b_2c_2$ die Ehen darstellen, die innerhalb des nächsten Jahres von fraglichen Wittwern herrühren. Weiter seien auf C_1a_1, resp. C_2a_2 als Abscissenaxen aufgetragen $C_1E_1M_1$, $C_2E_2M_2$ die Curven für das Anwachsen der Fälle, wo durch den Tod der Ehefrau in einer Ehe i^{ter} Ordnung ein aus der Geburtenstrecke t bis $t+1$ stammender Ehemann im Alter von x Jahren ab Wittwer wurde, während in Bezug auf die Letzteren die Curven C_1e_1, C_2e_2 die Summen aller aus dem Wittwerstande Ausscheidenden und die

Curven $C_1 d_1$, $C_2 d_2$ speciell die Summen aller Sterbefälle darstellen sollen. Es würde demnach die Fläche $a_1 E_1 E_2 a_2$ die Anzahl der aus fraglicher Generation im Alter x bis $x+1$ aufgetretenen Wittwer i^{ter} Ehe sein, von denen eine Anzahl gleich der Fläche $a_1 d_1 d_2 a_2$ vor Erreichung des Alters $x+1$ gestorben und eine andere Anzahl gleich der Fläche $d_1 e_1 e_2 d_2$ vor Erreichung desselben Alters wieder verheirathet wäre.

Eine zur Zeit $\tau_1 = t+1+x$ vorgenommene Zählung der Wittwer i^{ter} Ehe und aus der Geburtenstrecke von t bis $t+1$ stammend würde uns nun die Projection der Flächen $D_1 c_1 C_2 B_2$ und $e_1 E_1 C_2$ auf die YZ-Ebene oder $A_1 n_1 m A_2 + n_5 n_6 m = {}^iZ_x$ liefern. Um daher die Fläche $B_1 C_1 C_2 B_2 = A_1 n_3 m A_2 = {}^iF(x)$ zu erhalten, hätten wir zunächst alle Todesfälle $= {}^iM_x$, sowie alle Verheirathungsfälle $= {}^{i+1}N_x$, welche bei den aus fraglicher Generation stammenden Wittwern i^{ter} Ordnung im Alter x bis $x+1$ und innerhalb der Zählzeiten $\tau_0 = t+x$ und $\tau_1 = t+1+x$ vorgekommen sind, mithin die Flächen der Dreiecke $n_2 n_3 m$ und $n_3 n_4 m$, sowie der Dreiecke $n_1 n_2 m$ und $n_4 n_5 m$ zu ${}^iZ_x$ zu addiren und sodann die Fläche $n_3 n_6 m$, d. h. die Anzahl der Ehemänner, welche bis zur Zählzeit τ_1 und aus der Geburtenstrecke t bis $t+1$ stammend im Alter x bis $x+1$ zum i^{ten} Male Wittwer geworden sind, $= {}^iW_x$ zu subtrahiren. Hieraus folgt:

$${}^iF(x) = {}^iZ_x + {}^iM_x + {}^{i+1}N_x - {}^iW_x.$$

Bezeichnet man endlich diejenigen Ehemänner aus der Geburtenstrecke von t bis $t+1$, welche innerhalb der Zählzeiten $\tau_1 = (t+1)+x$ und $\tau_2 = (t+1)+(x+1)$ im Alter x bis $x+1$ zum i^{ten} Male Wittwer wurden, mit ${}^iW'_x$, so dass ${}^iR(x) = {}^iW_x + {}^iW'_x$ wird, so geht Gleichung 7) in

$${}^np_x = \frac{{}^nV(x+1) - {}^nV(x)}{{}^{n-1}Z_x + {}^{n-1}M_x + {}^nN_x - {}^{n-1}W_x + \frac{1}{2}\,{}^{n-1}W_x + \frac{1}{2}\,{}^{n-1}W'_x}$$

oder

$$8) \quad {}^np_x = \frac{{}^nN_x + {}^nO_x}{{}^{n-1}Z_x + {}^{n-1}M_x + {}^nN_x - \frac{1}{2}({}^{n-1}W_x - {}^{n-1}W'_x)}$$

über, sobald die Anzahl der Ehen, welche Wittwer i^{ter} Ehe und aus der Geburtenstrecke von t bis $t+1$ stammend im Alter x bis $x+1$ innerhalb der Zählzeiten τ_1 und τ_2 eingegangen sind, durch ${}^{i+1}O_x$ dargestellt wird. —

Bei der jetzigen Einrichtung der Zählkarten über Sterbefälle ist es leider nicht möglich, ${}^iW_x$ und ${}^iW'_x$ zu ermitteln, weshalb die soeben abgeleiteten Formeln zur Zeit auch noch nicht ohne Weiteres angewandt werden können. Unter der Voraussetzung jedoch, dass sich die jährlichen Geburten gleichmässig auf die Geburtenstrecke vertheilen, wird mit Berücksichtigung der früher aufgestellten Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Ehemann, im Alter u bis $u+du$ Wittwer zu werden, innerhalb eines Jahres constant ist,

$$^iW_x = {}^iW'_x$$

und damit unsere Näherungsformel

$$9) \qquad {}^np_x = \frac{{}^nN_x + {}^nO_x}{{}^{n-1}Z_x + {}^{n-1}M_x + {}^nN_x}$$

und nimmt somit genau dieselbe Form, wie Gleichung 3) an.

Die Ermittelung von ${}^{n-1}Z_x$, ${}^{n-1}M_x$, ${}^nN_x$ und ${}^nO_x$ würde nun genau auf dieselbe Weise zu erfolgen haben, wie es im Vorstehenden für ${}^0Z_x$, ${}^0M_x$, ${}^1N_x$ und ${}^1O_x$ angegeben worden ist, nur hätte man sein Augenmerk nicht auf die Unverheiratheten, sondern lediglich auf die Wittwer aus $(n-1)^{\text{ter}}$ Ehe zu richten. Im Allgemeinen werden daher zur Berechnung von ${}^np_x$ mindestens die nachstehenden Register aus den Zählkarten der Standesämter und den Haushaltungslisten der Volkszählung zu füllen sein, nämlich unter der Voraussetzung, dass die Resultate der Volkszählung vom 1. December 1880 benützt werden:

Nr. 1.

Verehelichungsregister auf die Zeit vom 1. December 1879 bis mit 30. November 1880.

Verehelichungsalter des Mannes:	20—21.		21—22.		22—23.		23—24.		24—25.		25—26.	
Geburtszeit desselben:	Vom 1. December											
	1859	1858	1858	1857	1857	1856	1856	1855	1855	1854	1854	1853
	bis mit 30. November											
	1860.	1859.	1859.	1858.	1858.	1857.	1857.	1856.	1856.	1855.	1855.	1854.
Anzahl d. eingegangenen Ehen:												
erster Ordnung .	.	.	.	.	$^1N_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
zweiter " .	.	.	.	.	$^2N_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
dritter " .	.	.	.	.	$^3N_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
. . . .												
n^{ter} Ordnung . . .	.	.	.	.	$^nN_{22}$	.	.	.	.	.	.	.

Nr. 2.

Sterberegister für männliche Personen auf die Zeit vom 1. December 1879 bis mit 30. November 1880.

Sterbealter:	20—21.		21—22.		22—23.		23—24.		24—25.		25—26.	
Geburtszeit: Vom 1. December	1859	1858	1858	1857	1857	1856	1856	1855	1855	1854	1854	1853
bis mit 30. November	1860.	1859.	1859.	1858.	1858.	1857.	1857.	1856.	1856.	1855.	1855.	1854.
Anzahl d. verstorbenen männl. Pers., als:												
Unverehelichte	.	.	.	.	${}^0M_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
Wittwer 1. Ordn.	.	.	.	.	${}^1M_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
„ 2. „	.	.	.	.	${}^2M_{22}$	.	.	.	.	.	.	.
. . . .												
Wittwer n^{ter} Ordn.	.	.	.	.	${}^nM_{22}$	.	.	.	.	.	.	.

Nr. 3.

Männliche Personen nach der Volkszählung vom 1. December 1880.

Geburtszeit: Vom 1. December	1859	1858	1857	1856	1855	1854
bis mit 30. November	1860.	1859.	1858.	1857.	1856.	1855.
Anzahl der lebenden männl. Personen, als:						
Unverehelichte	.	.	${}^0Z_{22}$	.	.	.
Wittwer erster Ordnung	.	.	${}^1Z_{22}$	.	.	.
„ zweiter „	.	.	${}^2Z_{22}$	.	.	.
. . . .						
Wittwer n^{ter} Ordnung	.	.	${}^nZ_{22}$	.	.	

Nr. 4.

Verehelichungsregister auf die Zeit vom 1. December 1880 bis mit 30. November 1881.

Verehelichungsalter des Mannes:	20—21.		21—22.		22—23.		23—24.		24—25.		25—26.	
Geburtszeit desselben:	Vom 1. December											
	1860	1859	1859	1858	1858	1857	1857	1856	1856	1855	1855	1854
	bis mit 30. November											
	1861.	1860.	1860.	1859.	1859.	1858.	1858.	1857.	1857.	1856.	1856.	1855.
Anzahl d. eingegangenen Ehen:												
erster Ordnung .	.	.	.	.	.	${}^{1}O_{22}$	.	.	.	.	.	.
zweiter „ .	.	.	.	.	.	${}^{2}O_{22}$	.	.	.	.	.	.
dritter „ .	.	.	.	.	.	${}^{3}O_{22}$	.	.	.	.	.	.
. . . .												
n^{ter} Ordnung . . .	.	.	.	.	.	${}^{n}O_{22}$	.	.	.	.	.	.

Soviel dem Verfasser bekannt, ist nur aus den Zählkarten über Verheirathungsfälle zu ersehen, ob ein Wittwer erster oder zweiter oder dritter u. s. w. Ordnung eine neue Ehe einging, während weder in den Haushaltungslisten, noch in den Zählkarten über Sterbefälle eine Unterscheidung zwischen den verschiedenen Wittwern stattfindet. Wenn man auch hoffen darf, dass dieses Moment im Interesse der davon abhängenden wichtigen Fragen, wie im Interesse der Bevölkerungsstatistik überhaupt später nicht mehr vernachlässigt werden wird, zumal durch eine veränderte Fragestellung das Gewünschte leicht erhalten werden kann, so sind wir doch gegenwärtig ausser Stande, die unter Nr. 1 bis 4 aufgestellten Register in der vorgeschriebenen Form ausfüllen zu können.

Nur für den Fall, dass man sich begnügt, die Wahrscheinlichkeit p_x zu ermitteln, im Alter x bis $x+1$ überhaupt eine Ehe einzugehen, also gleichviel welcher Ordnung, reichen die zur Zeit zu beschaffenden Unterlagen aus, weil eine Unterscheidung der verschiedenen Wittwer und Ehen sodann fortfällt. Anstatt ${}^{i}p_x$, ${}^{i}N_x$, ${}^{i}O_x$, ${}^{i}M_x$, ${}^{i}Z_x$ kann man solchenfalls einfach resp. p_x, N_x, O_x, M_x, Z_x setzen und versteht jetzt unter N_x und O_x die innerhalb der bezüglichen Zählzeiten und Altersgrenzen des Mannes überhaupt eingegangenen Ehen, unter M_x die im Alter x bis $x+1$ verstorbenen Unverehelichten und Wittwer und unter Z_x das Ergebniss der Volkszählung in Bezug auf Unverehelichte und Wittwer, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren stehen. An Stelle der

detaillirten Angaben treten in unsere Register summarische, d. h. in Nr. 1 ist $N_x = {}^1N_x + {}^2N_x + \dots + {}^nN_x$, in Nr. 2 $M_x = {}^0M_x + {}^1M_x + \dots + {}^nM_x$, in Nr. 3 $Z_x = {}^0Z_x + {}^1Z_x + \dots + {}^nZ_x$ und in Nr. 4 $O_x = {}^1O_x + {}^2O_x + \dots + {}^nO_x$ einzutragen, während endlich nach 9)

$$10)\qquad p_x = \frac{N_x + O_x}{Z_x + M_x + N_x}$$

zu setzen ist.

Wenn auch die Ursachen, deren Einwirkungen wir die Ehen i^{ter} Ordnung zuschreiben, *a priori* mit den Ursachen, die für die Ehen $(i+j)^{\text{ter}}$ Ordnung massgebend sein werden, nicht als identisch angesehen werden können, so ist doch immerhin zu vermuthen, dass zwischen ${}^ip_x$ und ${}^{i+j}p_x$ der Unterschied nicht allzugross sein wird und infolge dessen sich mit Hilfe von p_x noch eine einigermassen zutreffende Wittwentabelle, wie sie für die im Eingange erwähnten Unterstützungscassen erforderlich ist, ableiten lässt. Anders verhält es sich damit, welche Zeitstrecke zur Bestimmung von p_x benutzt wird. Jahre mit wirthschaftlichen Krisen, Theuerung, Krieg u. s. w. üben einen empfindlichen Einfluss auf die Eheschliessungen aus und kann solchenfalls p_x einen Werth annehmen, der von dem mittleren Betrage desselben wesentlich abweicht. Hier wird es rathsam sein, die Anzahl der geschlossenen Ehen mit der der Vorjahre zu vergleichen, um wenigstens einigermassen einen Einblick über die Einwirkungen der zeitlichen Ursachen zu erlangen. Ausserdem ist zu vermuthen, dass p_x für die verschiedenen Stände und Berufsclassen sehr verschieden sein wird. Wenn daher bei Bearbeitung der vorstehenden Register keine Rücksicht auf den Stand oder das Gewerbe der einzutragenden Personen genommen wird, kann auch das so gewonnene p_x nur auf eine gemischte Bevölkerung Anwendung finden.

Endlich ist noch zu bemerken, dass die Resultate der nach vorstehender Methode geführten Untersuchungen durch das Ein- und Auswandern in den Zählbezirken ungünstig beeinflusst werden können. Je grösser indess diese Bezirke sind oder je mehr Resultate verschiedener Bezirke zu einem Ganzen vereinigt werden, desto unbedeutender wird voraussichtlich dieser Einfluss sein. Uebrigens erweist sich hier der Umstand von Vortheil, dass nur einjährige Zeitstrecken in Frage kommen.

Die Ermittelung von q_y.

Die Wahrscheinlichkeit q_y, eine $y-\frac{1}{2}$- bis $y+\frac{1}{2}$-jährige Ehefrau zu ehelichen, wenn die Heirath im Alter x bis $x+1$ gewiss ist, kann als unabhängig von der Ordnung der zu schliessenden Ehe angenommen werden, weil kein Grund einzusehen ist, weshalb ein x- bis $x+1$-jähriger Wittwer i^{ter} Ordnung eine Ehefrau von anderem Alter wählen soll, als ein gleichalteriger Wittwer $(i+j)^{\text{ter}}$ Ordnung. Wir werden es

also hier mit der Summe der bei einer gegebenen Generation geschlossenen Ehen zu thun haben.

Sei in Fig. 4 $N_1 N_2$ wieder die Geburtencurve der in der Zeit von $OA_1 = t$ bis $OA_2 = t+1$ geborenen männlichen Personen irgend einer gegebenen Generation, $N_1 D_1$ und $N_2 D_2$ die bezüglichen Absterbecurven und $E_1 F_1 G_1 H_1$ und $E_2 F_2 G_2 H_2$ die Curven für das Anwachsen der Verehelichungsfälle bei derselben, so drückt, wenn $A_1 B_1 = A_2 B_2 = x$ und $A_1 C_1 = A_2 C_2 = x+1$, die Differenz der beiden Flächen $C_1 G_1 G_2 C_2$ und $B_1 F_1 F_2 B_2$ bekanntlich die Anzahl der bei fraglicher Gesammtheit im Alter x bis $x+1$ vorgekommenen Verehelichungsfälle aus. Ist die Gleichung für die Oberfläche der Verehelichungsfälle überhaupt $\varphi(x, t)$, so wird der Inhalt der beiden Flächen $B_1 F_1 F_2 B_2$ und $C_1 G_1 G_2 C_2$ durch

$$1) \qquad \int_t^{t+1} \varphi(x, t)\, dt = V(x)$$

beziehentlich

$$2) \qquad \int_t^{t+1} \varphi(x+1, t)\, dt = V(x+1)$$

und fragliche Verehelichungsfälle selbst werden durch

$$3) \qquad \begin{aligned} &\int_t^{t+1} \varphi(x+1, t)\, dt - \int_t^{t+1} \varphi(x, t)\, dt \\ &= \int_t^{t+1} [\varphi(x+1, t) - \varphi(x, t)]\, dt = V(x+1) - V(x) \end{aligned}$$

dargestellt.

Ist $f(x, t)$ die Gleichung für die Oberfläche der Lebenden, so erhält man die Gleichung für die Linie $D_1 D_2$, wenn

$$f(x, t) = 0$$

gesetzt wird. Hieraus ergiebt sich

$$x = \psi(t)$$

und damit als Gesammtzahl aller bei fraglicher Generation eingegangenen Ehen

$$4) \qquad \int_t^{t+1} \varphi(\psi(t), t)\, dt.$$

Die Projection der Fläche $D_1 H_1 H_2 D_2$ auf die Ebene YZ ist die geometrische Deutung des obigen Integralausdruckes.

Man denke sich nun weiter drei im Raume senkrecht auf einander stehende Axen OX, OY, OZ (Fig. 5) errichtet und auf die Axe OX die Altersstrecken x der männlichen Personen und auf die Axe OY die

Altersstrecken y derjenigen weiblichen Personen aufgetragen, die mit den männlichen Personen eine Ehe eingegangen sind. Die unter 4) angegebenen Ehen lassen sich nun dergestalt graphisch darstellen, dass beispielsweise der Inhalt des unendlich dünnen Prismas $MM'N'N$ die Anzahl der Ehen angiebt, wo bei der Verheirathung der Mann x' bis $x'+dx$ und die Frau y' bis $y'+dy$ Jahre alt war. Werden in dieser Weise alle Ehepaare aufgetragen, so entsteht ein hügeliger Körper ABC, dessen Inhalt also gleich

$$\int_t^{t+1} \varphi(\psi(t), t)\, dt$$

ist. Die Form desselben ist für uns von besonderem Interesse. Ist

$$z = \varrho(x, y)$$

die Gleichung für die Oberfläche desselben, so ist der Inhalt des unendlich dünnen Prismas, d. h. die Anzahl der Ehepaare, wo zur Zeit der Eheschliessung der Mann x bis $x+dx$ und die Frau $y+dy$ Jahre alt war,

$$\varrho(x, y)\, dx\, dy,$$

während alle Ehepaare oder der Gesammtinhalt des Körpers ABC durch

$$5)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x, y)\, dx\, dy$$

ausgedrückt werden.

Errichtet man in den Punkten x und $x+1$ Ebenen parallel zur YZ-Ebene, so schliessen solche alle die Ehen ein, wo der Mann innerhalb der Altersgrenzen x bis $x+1$ heirathete. Der Inhalt dieses Körperausschnittes $(D_0 D_1 D_2 D_0 E_0 E_1 E_2 E_0)$ ist

$$6)\qquad \int_x^{x+1}\int_0^\infty \varrho(x, y)\, dx\, dy.$$

Werden weiter in den Punkten y_0 und y_1 Ebenen parallel zur XZ-Ebene errichtet, so schliessen die vier Ebenen den prismatischen Körper $FGHJJ'H'G'F'$ ein, dessen Inhalt

$$7)\qquad \int_x^{x+1}\int_{y_0}^{y_1} \varrho(x, y)\, dx\, dy$$

gleich der Anzahl aller Ehen ist, wo zur Zeit der Eheschliessung der Mann x bis $x+1$ und die Frau y_0 bis y_1 Jahre alt war.

Mit Hilfe der obigen Ausdrücke ergiebt sich nun unmittelbar, dass nach der wahrscheinlichsten Hypothese die Wahrscheinlichkeit für ein Ehepaar, die Ehe eingegangen zu sein,

a) wo der Mann innerhalb der Altersgrenzen von x bis $x+1$ Jahren stand, die Frau aber beliebig alt war, =

$$8)\qquad \frac{\int_x^{x+1}\int_0^\infty \varrho(x,y)\,dx\,dy}{\int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x,y)\,dx\,dy} = n_x,$$

b) wo der Mann ebenfalls innerhalb der Altersgrenzen von x bis $x+1$ Jahren stand, die Frau aber y_0 bis y_1 Jahre alt war, =

$$9)\qquad \frac{\int_x^{x+1}\int_{y_0}^{y_1} \varrho(x,y)\,dx\,dy}{\int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x,y)\,dx\,dy} = m_{x,y}$$

ist, woraus weiter nach dem Satze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit folgt, dass

c) für einen Ehemann, der sich innerhalb der Altersgrenzen x bis $x+1$ verheirathet hat, die Wahrscheinlichkeit q_y, eine y_0- bis y_1-jährige weibliche Person geehelicht zu haben, gleich

$$q_y = \frac{m_{x,y}}{n_x}$$

ist. Durch Substitution der Werthe für $m_{x,y}$ und n_x aus 8) und 9) folgt endlich

$$10)\qquad q_y = \frac{\int_x^{x+1}\int_{y_0}^{y_1} \varrho(x,y)\,dx\,dy}{\int_x^{x+1}\int_0^\infty \varrho(x,y)\,dx\,dy}.$$

Die Bevölkerungsstatistik giebt uns bekanntlich die Ehen an, die innerhalb zweier Zählzeiten τ_0 und τ_1 geschlossen worden sind. Um daher die Anzahl aller von den in der Zeit t bis $t+1$ geborenen männlichen Personen eingegangenen Ehen =

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x,y)\,dx\,dy$$

zu erfahren, muss $\tau_1 - \tau_0 = E_1 C_1 + B_2 D_2$ (Fig. 4) sein, d. i. eine Zeitstrecke, die von dem völligen Aussterben der Generation t bis $t+1$ zurück bis auf den Eintritt der Heirathsfähigkeit der zur Zeit t Geborenen reicht. Da nun aber heute eine solche Zählung für irgend eine

beliebige Gesammtheit aus naheliegenden Gründen nicht möglich ist, so ist auch die Ermittelung der unter *a)* und *b)* angegebenen Wahrscheinlichkeitswerthe zur Zeit unausführbar.

Wohl erhält man durch Zählung der Ehen, die innerhalb zweier beliebigen Zählzeiten τ_0 und τ_1 geschlossen worden sind, eine Anzahl Ehen, wo das Verehelichungsalter für beide Ehegatten zwischen 0 und ∞ liegt, aber diese Ehen gehören lauter verschiedenen Gesammtheiten an und dürfen nicht mit

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x, y)\,dx\,dy$$

verwechselt werden. Das Ergebniss einer solchen Zählung würde nach Fig. 4

$$\int_0^{\tau_1}\varphi(\tau_1 - t, t)\,dt - \int_0^{\tau_0}\varphi(\tau_0 - t, t)\,dt$$

sein, während sich aus der Vergleichung der Ausdrücke 3) mit 6) und 4) mit 5) folgende Identitäten ergeben:

$$11)\qquad \int_t^{t+1}[\varphi(x+1, t) - \varphi(x, t)]\,dt = \int_x^{x+1}\int_0^\infty \varrho(x, y)\,dx\,dy,$$

$$12)\qquad \int_t^{t+1}\varphi(\psi(t), t)\,dt = \int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x, y)\,dx\,dy.$$

Der Wahrscheinlichkeitswerth unter *c)*, um den es sich ja hier auch nur handelt, ist der einzige, der unmittelbar aus der Bevölkerungsstatistik gewonnen werden kann. Der Nenner

$$\int_x^{x+1}\int_0^\infty \varrho(x, y)\,dx\,dy = \int_t^{t+1}[\varphi(x+1, t) - \varphi(x, t)]\,dt$$

ist nach 3) $V(x+1) - V(x)$ und folgt aus den beiden Verehelichungsregistern Nr. 1 und 4 durch Summiren aller im Alter von x bis $x+1$ Jahren geschlossenen Ehen. Er ist folglich

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}({}^iN_x + {}^iO_x) = N_x + O_x.$$

Der Zähler des Bruches q_y

$$\int_x^{x+1}\int_{y_0}^{y_1}\varrho(x, y)\,dx\,dy$$

wird aber erhalten, wenn aus $N_x + O_x$ alle Ehepaare ausgeschieden werden, wo das Verehelichungsalter der Frau nicht innerhalb der Grenzen

y_0 bis y_1 liegt. Zu diesem Zwecke macht es sich erforderlich, die Verehelichungsregister noch in einer andern Form anzufertigen, nämlich wenn $y_0 = y - \frac{1}{2}$ und $y_1 = y + \frac{1}{2}$ gesetzt wird, in folgender:

Nr. 5.

Verehelichungsalter des Mannes:	20—21.		21—22.		22—23.		23—24.		24—25.		25—26.	
Geburtszeit desselben:	Vom 1. December											
	1859	1858	1858	1857	1857	1856	1856	1855	1855	1854	1854	1853
	bis mit 30. November											
	1860.	1859.	1859.	1858.	1858.	1857.	1857.	1856.	1856.	1855.	1855.	1854.
Anzahl d. eingegangenen Ehen bei einem Verehelichungsalter der Frau												
v. $14\frac{1}{2}$—$15\frac{1}{2}$ Jahren												
v. $15\frac{1}{2}$—$16\frac{1}{2}$ „												
. . . .												
v. $y-\frac{1}{2}$—$y+\frac{1}{2}$ Jahr.												
. . . .												

Zu bemerken ist hierbei, dass die so abgeleiteten Wahrscheinlichkeitswerthe nicht ein und derselben Generation angehören und deshalb zur Construction des hügelförmigen Körpers ABC (Fig. 5) nicht benützt werden können.

Wir berühren am Schlusse der vorliegenden Abhandlung noch einen Wahrscheinlichkeitswerth, der Vielen geeignet erscheinen könnte, den soeben abgeleiteten q_y zu ersetzen, nämlich den, dass ein verheiratheter Mann eine um v bis $v+1$ Jahre ältere Frau geehelicht hat. Derselbe ist, wie leicht einzusehen, =

$$\frac{\sum\limits_{x=0}^{x=\infty} \int\limits_{x}^{x+1} \int\limits_{x+v}^{x+v+1} \varrho(x, y)\, dx\, dy}{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \varrho(x, y)\, dx\, dy}$$

und kann aus denselben Gründen, wie sie bei *a)* und *b)* geltend gemacht wurden, nicht dadurch ermittelt werden, dass mit der Anzahl der zwi-

schen zwei beliebigen Zählzeiten τ_0 und τ_1 geschlossenen Ehen in die Anzahl derjenigen Ehen dividirt wird, wo fragliche Altersdifferenz zwischen Mann und Frau besteht.

Er lässt sich somit auch gegenwärtig nicht ermitteln. Aber selbst dann, wenn dies der Fall wäre, würde fraglicher Wahrscheinlichkeitswerth für die im Eingange erwähnten Zwecke unbrauchbar sein; denn die Wahrscheinlichkeit, eine v bis $v+1$ Jahre ältere Frau zu ehelichen, ist offenbar innerhalb der verschiedenen Altersgrenzen eines Mannes sehr verschieden. Ein 20jähriger Mann kann nicht gut eine um -10 bis -9 Jahre ältere Frau ehelichen, während dies für einen 30jährigen Mann sogar sehr wahrscheinlich sein wird.

XV.

Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe.

Von

J. Thomae,

Professor an der Universität Jena.

Einleitung.

Entwickelt man das Product $(1-s)^{-\mu}(1-xs)^{-\nu}$ nach Potenzen von s, und setzt es gleich $\Sigma s^m A_m$, so erhält man die Coefficienten dadurch, dass man das Product der Reihen $\Sigma s^m \frac{\mu}{1}\,\frac{\mu+1}{2}\,\frac{\mu+2}{3}\,..\,\frac{\mu+m-1}{m}$ und $\Sigma s^m x^m \frac{\nu}{1}\,\frac{\nu+1}{2}\,\ldots\,\frac{\nu+m-1}{m}$ bildet und nach Potenzen von s ordnet. Um abzukürzen, wollen wir, unter β eine ganze Zahl verstehend, das Product $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta-1)$ mit (α,β) bezeichnen und $(\alpha, 0)=1$ annehmen. Alsdann haben wir

$$(1-s)^{-\mu}(1-xs)^{-\nu} = \sum \frac{s^m(\mu, m)}{(1, m)} \sum \frac{s^{m'}(\nu, m')}{(1, m')},$$

worin die Summen über alle ganzen positiven Zahlen m und m', die Null eingeschlossen, zu erstrecken sind.

Das, was in diesem Product mit s^p multiplicirt ist und was oben mit A_p bezeichnet wurde, hat den Werth

$$\sum \frac{(\mu, p-\varrho)}{(1, p-\varrho)}\,\frac{(\nu, \varrho)}{(1, \varrho)}\,x^\varrho = \frac{(\mu, p)}{(1, p)} \sum \frac{(-p, \varrho)}{(1-\mu-p, \varrho)}\,\frac{(\nu, \varrho)}{(1, \varrho)}\,x^\varrho, \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots p.$$

Die letzte Summe, die allerdings eine endliche ist, die aber sofort in eine unendliche Reihe übergeht, wenn für $-p$ eine andere als eine ganze negative Zahl gesetzt wird, und die dann so lange convergirt, als $abs\, x < 1$ ist, liefert die hypergeometrische Reihe. Setzen wir mit Gauss

$$F(a, b, c, x) = \Sigma x^m (a, m)(b, m) : (1, m)(c, m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \infty,$$

so schreibt sich unser Product

$$(1-s)^{-\mu}(1-xs)^{-\nu} = \Sigma s^m F(-m, \nu, 1-m-\mu, x)(\mu, m) : (1, m).$$

Die hypergeometrische Reihe $F(a, b, c, x)$, die den grössten Theil der in der gemeinen Analysis vorkommenden Reihen als specielle Fälle

in sich enthält, hat vielfache Bearbeitungen erfahren; aber fast alle diese Bearbeitungen sind in der Wahl der Mittel nicht scrupulös gewesen, weil es den Bearbeitern nur auf Gewinnung der Resultate ankam, nicht darauf, dass sie auf einfachstem Wege erlangt würden. Gauss allein hat den grössten Theil seiner Sätze in seiner Abhandlung: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc." aus der Reihe selbst abgeleitet, macht aber gleichwohl ohne Noth hier und da von der Infinitesimalrechnung Anwendung, was noch mehr von der Fortsetzung dieser Arbeit im Nachlass gilt. Da ich es nun für eine Forderung der Wissenschaft halte, dass sie die Resultate, die sie auf elementarem Wege erhalten kann, auch auf diesem zu erhalten suchen muss, wofern nur nicht damit übergrosse Weitläufigkeiten verbunden sind, so habe ich mir hier die Aufgabe gestellt, die Theorie der hypergeometrischen oder Gauss'schen Reihe völlig elementar zu begründen. Dabei wird die Arbeit natürlich nicht darauf gerichtet sein, neue Resultate zu erreichen, sondern vielmehr darauf, dass die Methode in ihrer vollen Reinheit überall aufrecht erhalten werde.

Bezeichnung.

Neben der von Gauss eingeführten Bezeichnung für die hypergeometrische Reihe werde ich hier zur Erreichung grösserer Symmetrie noch von einer schon früher von mir benutzten Bezeichnungsweise Gebrauch machen, indem ich

$$F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, \alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(\mu)} \\ \beta, \beta', \beta'', \dots \beta^{(\mu)}\end{pmatrix} x\Bigg) = x^\varepsilon \sum \frac{x^m(\varepsilon+\beta, m)(\varepsilon+\beta', m) \dots (\varepsilon+\beta^{(\mu)}, m)}{(\varepsilon-\alpha+1, m)(\varepsilon-\alpha'+1, m)\dots(\varepsilon-\alpha^{(\mu)}+1, m)}$$

setze, also

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha & \alpha' \\ \beta & \beta'\end{pmatrix} x\Bigg) \quad \text{für} \quad x^\alpha F(\alpha+\beta, \alpha+\beta', \alpha-\alpha'+1, x)$$

schreibe und das letzte Element allemal fortlasse, wenn es gleich Eins ist.

Bei Anwendung des Summenzeichens Σ und des Productzeichens Π soll jedesmal, wenn der Buchstabe m oder m', m'' etc. hinter demselben vorkommt, dieser die veränderliche Zahl sein und die Werthe 0, 1, 2, ... ∞ durchlaufen, so dass

$$\Sigma f(m) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots, \quad \Pi f(m) = f(0).f(1).f(2) \dots$$

ist.

Für die Gauss'sche Π-Function, die sich von der Γ-Function wenig unterscheidet, führe ich durch die Gleichung

$$fac\,\mu = \Pi(\mu)$$

eine neue, von mir in meiner „Elementaren Theorie der analytischen Functionen" auf S. 92 motivirte Bezeichnung ein und wende, wie schon oben, manchmal die Abkürzung

$$(\alpha, \beta) \quad \text{für} \quad fac(\alpha+\beta-1) : fac(\alpha-1)$$

an. Das erwähnte Buch „Elementare Theorie der analytischen Functionen. Halle 1880" soll mit E. T. F. § ... citirt werden.

Mit $p(n), p'(n), \dots p_1(n), p_2(n) \dots$ werde ich immer periodische Functionen der complexen Veränderlichen n mit dem Periodicitätsmodul Eins bezeichnen, also Functionen, die für jedes ganzzahlige positive oder negative m der Bedingung genügen

$$p(n+m) = p(n), \quad p'(n+m) = p'(n), \quad \dots$$

Art. I. Die Facultät.

Eine Function der complexen Veränderlichen n, $\varphi(n)$, welche der Gleichung Genüge leistet

$$1) \qquad \varphi(n+1) = (n+1)\,\varphi(n),$$

ist durch dieselbe nur bestimmt bis auf einen periodischen Factor $p(n)$, der einer Lösung willkürlich hinzugefügt werden kann. Sind nämlich, um etwas allgemeiner zu sein, A und B Functionen von n, und genügen $\varphi_1(n)$ und $\varphi_2(n)$ der Gleichung

$$2) \qquad A\,\varphi(n+1) = B\,\varphi(n),$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Functionen in die Gleichung 2) und nachherige Division (oder, was dasselbe ist, durch Elimination von A und B) die Relation

$$\varphi_1(n+1) : \varphi_2(n+1) = \varphi_1(n) : \varphi_2(n)$$

und den Satz, dass der Quotient $\varphi_1(n) : \varphi_2(n)$ ungeändert bleibt, wenn n um Eins abgeändert wird, und dass sich daher φ_1 und φ_2 nur durch einen periodischen Factor unterscheiden können. Dass aber ein solcher Factor wirklich willkürlich hinzugefügt werden kann, ist evident.

Fügen wir der Gleichung 1) noch die Bedingungen hinzu

$$3) \qquad lim\,\varphi(n+w) : \varphi(w)\,w^n = 1, \quad \varphi(o) = 1,$$

worin w positiv über alle Grenzen wachsen soll, so ist dadurch die Function $\varphi(n)$ völlig bestimmt und wird mit $fac\,n$ (Facultät n) bezeichnet. Um eine Darstellung dieser Function zu gewinnen, folgen wir Herrn Weierstrass. — Ist m ganz und positiv, so ergeben sich aus 1) unmittelbar die Gleichungen

$$\varphi(n+m) : \varphi(n) = (1+n)(2+n)(3+n)\dots(m+n),$$

$$\varphi(n+m)\,\varphi(o) : \varphi(m)\,\varphi(n) = (1+n)(1+\tfrac{1}{2}n)(1+\tfrac{1}{3}n)\dots\left(1+\frac{n}{m}\right),$$

$$\varphi(n+m)\,m^{-n} : \varphi(m)\,\varphi(n) = e^{nM_m}(1+n)e^{-n}.(1+\tfrac{1}{2}n)e^{-\frac{1}{2}n}\dots\left(1+\frac{n}{m}\right)e^{-\frac{n}{m}},$$

$$M_m = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m} - lg\,m,$$

und wenn man m über alle Grenzen wachsen lässt,

$$1:\varphi(n) = 1:fac\,n = e^{nM}(1+n)e^{-n}(1+\tfrac{1}{2}n)e^{-\frac{1}{2}n}(1+\tfrac{1}{3}n)e^{-\frac{1}{3}n}\ldots,$$

worin M die Mascheroni'sche Constante bedeutet, und das ins Unendliche fortzusetzende Product absolut convergent ist und demnach (E. T. F. § 123) eine ganze transcendente Function darstellt.

Aus dieser Darstellung der Facultät fliesst die bekannte Beziehung zwischen ihr und dem Sinus

$$4)\qquad fac(-n)\,fac(n-1) = \pi : sin\,n\pi.$$

Die Eigenschaft der Facultät, die zu ihrer Definition mitbenutzt wurde, dass $lim\,fac(n+m) : m^n fac\,m$ der Grenze Eins zustrebt, wenn die ganze positive Zahl m über alle Grenzen wächst, kann allgemeiner ausgesprochen werden. Dazu wollen wir aber erst gewisse Festsetzungen machen.

Denkt man sich die Werthe der complexen Veränderlichen n durch die Punkte einer Ebene repräsentirt, so liegen die Träger aller Zahlen n, deren reeller Theil grösser als eine bestimmte endliche Zahl μ ist, in einer Halbebene, welche durch eine zur imaginären Axe parallele Gerade begrenzt ist. Diese Halbebene begrenzen wir noch, wenn μ negativ ist, durch eine Gerade, welche von Null längs der negativ reellen Axe bis zur Begrenzung der Halbebene läuft, und nennen das so bestimmte Gebiet das Gebiet N_1. In diesem Gebiete ist n^α für beliebige Werthe von α eine eindeutige Function.

Das Gebiet N_2 soll grösser sein als das Gebiet N_1, und zwar so, dass darin N auch negativ unendlich gross werden kann, wofern nur der imaginäre Theil zugleich mit unendlich wird. Dies geschieht z. B., wenn wir die Ebene durch eine Parabel begrenzen, deren Axe die negativ reelle Axe der n-Ebene ist und deren Scheitel in einen beliebigen Punkt dieser Axe fällt. Dieser Scheitel ist noch mit dem Nullpunkte der n-Ebene durch eine Gerade zu verbinden und diese der Begrenzung hinzuzurechnen, damit n^α für beliebige α in N_2 eindeutig sei. Es ist dann N_2 der Theil der Ebene, der ausserhalb der Parabel liegt und ausser durch diese noch durch die den Scheitel mit Null verbindende Gerade begrenzt ist.

Unter Zuhilfenahme dieser Gebietsbezeichnungen können wir nun behaupten, dass

$$lim\,fac(n+\mu) : n^\mu\,fac\,n = 1$$

sei, wenn n in N_2 beliebig über alle Grenzen wächst.

Es ist nämlich

$$\frac{fac\,n\,.\,n^\mu}{fac(n+\mu)} = e^{\mu(M+lg\,n)}\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)e^{-\mu}\left(1+\frac{\mu}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{2}\mu}\left(1+\frac{\mu}{n+3}\right)e^{-\frac{1}{3}\mu}\ldots$$

$$= e^{\mu(M+lg\,n)}\,\Pi\left(1+\frac{\mu}{n+m+1}\right)e^{\frac{-\mu}{n+m+1}+\mu\left(\frac{1}{n+m+1}-\frac{1}{m+1}\right)}$$

$$= e^{\mu(M+lg\,n)+\mu\,\Sigma\left(\frac{1}{n+m+1}-\frac{1}{m+1}\right)}\,\Pi\left(1+\frac{\mu}{n+m+1}\right)e^{\frac{-\mu}{n+m+1}}.$$

Was nun zuerst das unendliche Product betrifft, so nähert sich dasselbe dem Grenzwerthe Eins, wenn n in N_1 über alle Grenzen wächst. Denn von einem bestimmten m ab ist der reelle Theil von $n+m+1$ positiv, und der absolute Betrag von $\mu:(n+m+1)$ nimmt von da ab mit wachsendem m fortwährend ab. Da ferner das Product absolut convergent ist und sich jeder Factor der Eins beliebig nähert, so hat dasselbe in N_1 für wachsende n den Grenzwerth Eins.

Anders verhält es sich mit $\sum\left(\frac{1}{n+m+1}-\frac{1}{m+1}\right)$. Diese Summe ist zwar, wenn n nicht eine ganze negative Zahl ist, ebenfalls absolut convergent, allein ihre Convergenz verringert sich mehr und mehr, je grösser n wird. Deshalb transformiren wir diese Summe und setzen mit Gauss

$$\Psi(n)-\Psi(o)=\sum\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+m+1}\right),\quad \Psi(o)=-M.$$

Es handelt sich darum, den Grenzwerth von $\Psi(n)$ zu finden für wachsende n, wobei wir n auf das Gebiet N_1 beschränken. Hierzu setzen wir

$$\begin{aligned}\Psi(n)&=-M+lg\,n+\sum\left(\frac{1}{m+1}-lg\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right)\\&\qquad-\sum\left(\frac{1}{n+m+1}+lg\left(1-\frac{1}{n+m+1}\right)\right)\\&=lg\,n-\sum\left(\frac{1}{n+m+1}+lg\left(1-\frac{1}{n+m+1}\right)\right)\\&=lg\,n+\sum\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{(n+m+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+m+1)^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{(n+m+1)^4}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

Die letzte Doppelsumme ist absolut convergent und nähert sich, wenn n in N_1 über alle Grenzen wächst, der Null beliebig. So finden wir also, dass

$$5)\qquad \Psi(n)=lg\,n+H(n)$$

gesetzt werden kann, wenn $H(n)$ eine Function von n ist, die im Gebiete N_1 mit wachsendem n gegen Null convergirt.* Es ist mithin

---

* Schreibt man

$$\begin{aligned}\Sigma\frac{1}{(n+m+1)^2}&=\Sigma\left(\frac{1}{(n+m+1)^2}-\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}\right)+\Sigma\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}\\&=\frac{1}{n}-\Sigma\frac{1}{(n+m+1)^2(n+m)},\end{aligned}$$

so findet man, dass $\Psi(n)=lgn+\frac{1}{2n}+\frac{\Theta(n)}{n}$ gesetzt werden kann, worin $\Theta(n)$ in N_1 mit wachsendem n verschwindet. Die nun folgende Herleitung der Stirlingschen Formel ist vermuthlich dieselbe, wie die des Herrn Glaisher im Quarterly Journ. XV, welche Abhandlung mir nicht zugänglich und nur durch das Referat in den Fortschr. d. Math. bekannt geworden ist.

$$\mu(M+lg\,n+\Psi(o)-\Psi(n))$$
$$=\mu\left(M+lg\,n+\sum\left(\frac{1}{n+m+1}-\frac{1}{m+1}\right)\right)=\mu H(n)$$

und demnach in N_1

$$lim\, fac\, n\,.\,n^\mu : fac(n+\mu)=1.$$

Dass diese Gleichung aber nicht nur im Gebiete N_1, sondern auch in N_2 statt habe, folgt aus der Relation

$$\frac{fac(n+\mu)}{n^\mu\, fac\, n}=\frac{sin\, n\pi\, fac(-n-1)\,n^{-\mu}}{sin(\mu+n)\pi\, fac(-n-\mu-1)}.$$

In ähnlicher Weise kann man auch den Grenzwerth von $fac\,n$, die sogenannte Stirling'sche Formel, elementar herleiten. Hierzu gehen wir von der Identität aus

$$lg\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}+lg\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}+\ldots+lg\left(\frac{n+\mu-1}{n+\mu}\right)^{n+\mu}$$
$$=(n+1)\,lg\,n-(n+\mu)\,lg(n+\mu)+lg\{(n+1)(n+2)\ldots(n+\mu-1)\}$$

oder

$$lg\frac{n+1}{\nu+1}-(n-\nu)+lg\frac{1+\frac{1}{2}n}{1+\frac{1}{2}\nu}-\tfrac{1}{2}(n-\nu)+\ldots+lg\frac{1+\dfrac{n}{\mu-1}}{1+\dfrac{\nu}{\mu-1}}-\frac{n-\nu}{\mu-1}$$
$$=-(n+1)\,lg\,n+(\nu+1)\,lg\,\nu-(\nu+\mu)\,lg(\nu+\mu)+(n+\mu)\,lg(n+\mu)$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu}\left\{(n+\varrho)\,lg\left(1-\frac{1}{n+\varrho}\right)-(\nu+\varrho)\,lg\left(1-\frac{1}{\nu+\varrho}\right)-\frac{n-\nu}{\varrho}\right\}$$
$$=-(n+1)\,lg\,n+(\nu+1)\,lg\,\nu-\nu\left\{lg(\nu+\mu)-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{\mu-1}\right\}$$
$$+n\left\{lg(n+\mu)-1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{\mu-1}\right\}+lg\left(1+\frac{n}{\mu}\right)^\mu-lg\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)^\mu$$
$$+\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\mu}\left\{(n+\varrho)\,lg\left(1-\frac{1}{n+\varrho}\right)-(\nu+\varrho)\,lg\left(1-\frac{1}{\nu+\varrho}\right)\right\}.$$

Lässt man hierin μ über alle Grenzen wachsen, so ergiebt sich daraus

$$lg\, fac\,\nu-lg\, fac\, n=(\nu+1)\,lg\,\nu-(n+1)\,lg\,n+n-\nu$$
$$+\sum\left\{(n+m)\,lg\left(1-\frac{1}{n+m}\right)-(\nu+m)\,lg\left(1-\frac{1}{\nu+m}\right)\right\}$$
$$=(\nu+1)\,lg\,\nu-(n+1)\,lg\,n+n-\nu-\tfrac{1}{2}\Psi(\nu)+\tfrac{1}{2}\Psi(n)-\Omega(n)+\Omega(\nu),$$

wo

$$\Omega(x)=\sum\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+m)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(x+m)^4}+\ldots\right\}$$

ist. Fassen wir Alles, was von ν abhängt, in eine additive Constante zusammen, was möglich ist, weil die vorkommenden Summen (abgesehen von singulären Stellen) absolut convergent sind, so erhalten wir

$$-lg\, fac\, n=-(n+1)\,lg\,n+n+\tfrac{1}{2}\Psi(n)-\Omega(n)-lg\,c,$$

und mit Rücksicht auf die oben gefundene Gleichung 5) das Resultat

$$-\lg fac\,n = -(n+\tfrac{1}{2})\lg n + n + \tfrac{1}{2}H(n) - \Omega(n) - \lg c,$$
$$fac\,n = c\,n^n \sqrt{n}\, e^{-n-\frac{1}{2}H(n)+\Omega(n)},$$

worin $H(n)$ und $\Omega(n)$ im Gebiete N_1 mit wachsendem n gegen Null convergiren und die Constante c noch zu bestimmen ist. Sie wird in folgender Weise erhalten.

Es sei n' reell, so ist

$$fac(in')\,fac(-in') = \pi i n' : \sin i\pi n' = c^2 e^{in'\lg(n'i) - in'\lg(-in') + \lg n' + Z(n')}$$
$$= c^2 n' e^{in'(\lg i - \lg(-i)) + Z(n')} = c^2 n' e^{-n'\pi + Z(n')},$$

worin $Z(n')$ mit wachsendem n' gegen Null convergirt. Es ist also

$$\frac{2\pi}{e^{\pi n'} - e^{-\pi n'}} = c^2 e^{-n'\pi + Z(n')}, \quad \frac{2\pi}{1 - e^{-2\pi n'}} = c\,c\,e^{Z(n')}$$

und für $\lim n' = \infty$

$$2\pi = cc, \quad c = \sqrt{2\pi},$$

so dass nun die Stirling'sche Formel erhalten wird

$$6) \qquad fac\,n = \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n+\theta(n)}, \quad \lim \Theta(n) = 0,$$

in der n in N_1 (oder auch, wie leicht zu erweisen, in N_2) über alle Grenzen wächst und das Wurzelzeichen positiv zu nehmen ist.

Mittels der Facultät kann man nun jede zweigliedrige Recursionsformel von der Form 2), wenn A und B ganze Functionen von n sind, vollständig lösen. Zerlegen wir A und B in Factoren

$$A = x(n+\alpha)(n+\alpha')\dots(n+\alpha^{(\mu)}), \quad B = (n+\beta)(n+\beta')\dots(n+\beta^{(\nu)}),$$

so ist die allgemeine Lösung der Gleichung $A\,\varphi(n+1) = B\,\varphi(n)$

$$7) \quad \varphi(n) = \frac{p(n)\,fac(n+\beta-1)\,fac(n+\beta'-1)\dots fac(n+\beta^{(\nu)}-1)}{x^n\,fac(n+\alpha-1)\,fac(n+\alpha'-1)\dots fac(n+\alpha^{(\mu)}-1)},$$

worin $p(n)$ eine willkürliche periodische Function von n ist.

Man hat jedoch noch ein anderes Mittel, zur Lösung zu gelangen. Man kann nämlich die vorgelegte Gleichung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Facultätenreihe entwickeln, in welcher die Argumente der Facultät um eine Einheit zu- oder abnehmen. Hierzu setzt man

$$\varphi(n) = \Sigma a_\mu k^\mu\, fac(n+\mu-1) : fac(n+\lambda-1),$$

worin λ einer beliebigen Constanten oder auch $-n$ gleich gesetzt werden kann, während k häufig dazu dient, die Lösung bequemer zu machen, häufig aber auch gleich Eins gemacht werden kann.

Die Summe aber ist so zu verstehen, dass μ von einer bestimmten Zahl ab fortwährend um eine Einheit wächst oder um eine Einheit abnimmt. Da solche Zahlenreihen hier häufiger vorkommen, so wollen wir die Zahlen n, für welche $fac(n+\alpha)$ unendlich gross wird, die Folge α nennen, die Zahlen n, für welche $\sin(n+\alpha)\pi\,fac(n+\alpha)$ verschwindet, die α conjugirte Folge, während die Zahlen n, für welche $\sin(n+\alpha)\pi$ verschwindet, die complete Folge α heissen möge. Es werden also

die Zahlen μ in obiger Summe die Folge einer Zahl oder die ihr conjugirte Folge zu durchlaufen haben.

Von dieser Methode machen wir zuerst Anwendung auf die Gleichung

$$8)\qquad (n+\alpha)\,\varphi(n+1) = (n+\beta)\,\varphi(n).$$

Setzen wir in diese Gleichung, λ constant wählend, die Summe

$$\Sigma a_\mu\, fac(n+\mu-1) : fac(n+\lambda-1)$$

ein, so muss identisch

$$\sum \frac{a_\mu}{fac(n+\lambda-1)}\{(n+\alpha)\,fac(n+\mu) - (n+\lambda)(n+\beta)\,fac(n+\mu-1)\} = 0$$

werden. Lassen wir hierin den Factor $1 : fac(n+\lambda-1)$ fort und setzen

$$(n+\alpha)\,fac(n+\mu) = (n+\mu+1+\alpha-\mu-1)\,fac(n+\mu)$$
$$= fac(n+\mu+1) - (\mu+1-\alpha)\,fac\,(n+\mu),$$
$$(n+\lambda)(n+\beta)\,fac(n+\mu-1)$$
$$= fac(n+\mu+1) - (2\mu-\beta-\lambda-1)\,fac(n+\mu) + (\mu-\lambda)(\mu-\beta)\,fac(n+\mu-1),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\Sigma a_\mu\{(\mu+\alpha-\beta-\lambda)\,fac(n+\mu) - (\mu-\beta)(\mu-\lambda)\,fac(n+\mu-1)\} = 0.$$

Dieselbe wird dadurch erfüllt, dass man den Coefficienten von $fac(n+\mu)$ gleich Null setzt, woraus folgt

$$a_\mu(\mu+\alpha-\beta-\lambda) = a_{\mu+1}(\mu-\lambda+1)(\mu-\beta+1),$$
$$a_\mu = (-1)^\mu : fac(\mu-\beta)\,fac\,(\mu-\lambda)\,fac\,(\lambda+\beta-\alpha-\mu).$$

Ist μ' das höchste vorkommende μ der Summe, dieselbe als absteigend vorausgesetzt, so muss $a_{\mu'+1}$ Null sein, was dadurch erreicht wird, dass $\mu' = \lambda+\beta-\alpha$ gemacht wird, so dass nun, wenn μ durch $\lambda+\beta-\alpha-m$ ersetzt wird, als Lösung von 8) die Summe erhalten wird

$$9)\quad \varphi(n) = \sum \frac{(-1)^n\,fac(m+\alpha-\lambda-1)\,fac(m+\alpha-\beta-1)}{fac\,m\,fac(m+\alpha-\lambda-\beta-n)\,fac(n+\lambda-1)}$$
$$= \frac{(-1)^n\,fac(\alpha-\lambda-1)\,fac(\alpha-\beta-1)}{fac(\alpha-\lambda-\beta-n)\,fac(n+\lambda-1)}\,F(\alpha-\lambda,\,\alpha-\beta,\,\alpha-\lambda-\beta-n+1,\,1).$$

Andererseits haben wir die unmittelbare Lösung

$$9\text{a})\qquad \varphi(n) = fac\,(-\alpha-n) : fac(-\beta-n)$$

und es können sich 9) und 9a) nur durch einen periodischen Factor unterscheiden, woraus, nach Einrechnung eines periodischen Factors in $p(n)$, die Gleichung fliesst

$$F(\alpha-\lambda,\,\alpha-\beta,\,\alpha-\lambda-\beta-n+1,\,1) = \frac{p(n)\,fac\,(\alpha-\lambda-\beta-n)\,fac(-\alpha-n)}{fac(-\beta-n)\,fac(-\lambda-n)}.$$

Setzt man hierin $n-n'$ für n und lässt n' als ganze positive Zahl $(p(n-n') = p(n))$ zur Grenze ∞ übergehen, so erkennt man sofort, dass $p(n) = 1$ sei. Macht man noch

$$\alpha-\lambda = a,\quad \alpha-\beta = b,\quad \alpha+1-\lambda-\beta-n = a+b-\alpha-n+1 = c,$$

so lässt sich das Resultat schreiben

$$10)\quad \begin{gathered} F(a, b, c, 1) = \frac{fac(c-1)\, fac(c-a-b-1)}{fac(c-a-1)\, fac(c-b-1)}, \\ F_a\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = F(a+b, a+b', a-a'+1, 1) = \frac{fac(a-a')\, fac(-a-a'-b-b')}{fac(-a'-b)\, fac(-a'-b')} \end{gathered}$$

oder

$$11)\quad fac(x-1) : fac(y-1)\, fac(z-1)$$

$$= \frac{1}{fac(z-x-1)\, fac(y-x-1)} \sum \frac{fac(m+z-x-1)\, fac(m+y-x-1)}{fac\, m\, fac(m+y+z-x-1)}.$$

Setzt man die hieraus für

$$fac(\mu+a+b-1) : fac(\mu+a-a')\, fac(\mu+a-a'')$$

sich ergebende Summe in die Reihe

$$\sum \frac{fac(m+a+b-1)\, fac(m+a+b'-1)\, fac(m+a+b''-1)}{fac\, m\, fac(m+a-a')\, fac(m+a-a'')}$$

ein, so findet man, wenn zur momentanen Abkürzung s für $a+a'+a''+b+b'+b''$ geschrieben wird, für dieselbe den Ausdruck

$$\sum \frac{fac(m+a+b'-1)\, fac(m+a+b''-1)}{fac(-a'-b)\, fac(-a''-b)\, fac\, m} \sum \frac{fac(m'-a'-b)\, fac(m'-a''-b)}{fac(m')\, fac(m+m'+a-a'-a''-b+1)}$$

$$= \sum \frac{fac(m'-a'-b)\, fac(m'-a''-b)}{fac(-a'-b)\, fac(-a''-b)\, fac\, m'} \sum \frac{fac(m+a+b'-1)\, fac(m+a+b''-1)}{fac\, m\, fac(m+m'+a-a'-a''-b+1)}$$

$$= \frac{fac(a+b'-1)\, fac(a+b''-1)}{fac(-a'-b)\, fac(-a''-b)} \sum \frac{fac(m-a'-b)\, fac(m-a''-b)\, fac(m-s+1)}{fac\, m\, fac(m+1-a'-a''-b-b')\, fac(m+1-a'-a''-b-b'')}$$

oder in der in der Einleitung gegebenen Bezeichnungsweise

$$12)\quad F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = \frac{fac(a-a')\, fac(a-a'')\, fac(1-s)}{fac(a+b-1)\, fac(1-a'-a''-b-b')\, fac(1-a'-a''-b-b'')}$$
$$\times F_{-b}\begin{pmatrix} -b, & a'+a''+b'-1, & a'+a''+b''-1 \\ 1-a', & 1-a'', & 2-s+b \end{pmatrix}.$$

Die hierdurch in Bezug auf die Reihe F gefundene Transformation lässt sich auf die transformirte Reihe noch einmal anwenden und liefert so die neue Beziehung

$$13)\quad F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{fac(a-a'')\, fac(1-s)}{fac(-a''-b)\, fac(1-a'-a''-b'-b'')} F_a\begin{pmatrix} a, & a', & s-b-1 \\ b, & 1-a-a'-b', & 1-a-a'-b'' \end{pmatrix}.$$

Art. II. Die dreigliedrige Recursionsformel.

Auch drei- (und mehr-) gliedrige Recursionsformeln von der Form

$$A_n \varphi(n+2) + B_n \varphi(n+1) + C_n \varphi(n) = 0$$

lassen sich, wenn A_n, B_n, C_n in n ganze Functionen sind, mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten durch Facultätenreihen lösen. Im Allgemeinen freilich werden die Coefficienten wieder durch Recursionsformeln bestimmt, deren Lösung dieselben, vielleicht noch mehr

Schwierigkeiten macht, als die vorgelegte Formel selbst. Allein ein Gewinn ist, abgesehen davon, dass in speciellen Fällen diese Methode völlig zum Ziele führt, doch dabei. Die letzteren Recursionsformeln brauchen nämlich nur für eine Folge ganzer Zahlen gelöst zu werden, und man kann daher von den Coefficienten jedesmal soviele wirklich ausrechnen, als man will. Die Reihe, auf welche die Methode der unbestimmten Coefficienten führt, ist hingegen eine Function der complexen Veränderlichen n, und deshalb ist diese Darstellung wichtig. In manchen Fällen aber ist die zur Lösung der gegebenen Formel nöthige Hilfsrecursionsformel einfacher als jene, und kann völlig gelöst werden, wie in dem hier zu betrachtenden Falle, in welchem A_n, B_n, C_n in n linear sind. Alsdann erhalten wir auch für die vorgelegte Formel die vollständige Lösung.

Zuerst erinnern wir an den bekannten, völlig elementar zu erweisenden Satz, dass zwischen je drei Lösungen einer dreigliedrigen Recursionsformel eine lineare homogene Gleichung besteht mit periodischen Coefficienten. — In der That, es seien $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, $\varphi_3(n)$ drei Lösungen, so ist

$$A_n(\varphi_3(n+2)\,\varphi_\mu(n+1)-\varphi_\mu(n+2)\,\varphi_3(n+1))$$
$$=C_n(\varphi_3(n+1)\,\varphi_\mu(n)-\varphi_\mu(n+1)\,\varphi_3(n))$$

für $\mu=1$ oder $\mu=2$. Setzen wir

$$\varDelta_\mu(n)=\varphi_3(n+1)\,\varphi_\mu(n)-\varphi_\mu(n+1)\,\varphi_3(n),$$

so ist $\varDelta_1(n)$ sowohl, als auch $\varDelta_2(n)$ eine Lösung der Recursionsformel $A_n\,\varDelta(n+1)=C_n\,\varDelta(n)$ und es können sich deshalb $\varDelta_1(n)$ und $\varDelta_2(n)$ nur durch einen periodischen Factor unterscheiden, oder es ist $\varDelta_2(n)=p(n)\,\varDelta_1(n)$. Daraus folgt weiter

$$\varphi_3(n+1)\,(\varphi_2(n)-p(n)\,\varphi_1(n))=\varphi_3(n)\,(\varphi_2(n+1)-p(n+1)\,\varphi_1(n+1)).$$

Diese zweigliedrige Recursionsformel wird identisch erfüllt, wenn

$$\varphi_3(n)=q_2(n)\,(\varphi_2(n)-p(n)\,\varphi_1(n))=q_2(n)\,\varphi_2(n)+q_1(n)\,\varphi_1(n)$$

gesetzt wird, und wenn $q_2(n)$ und folglich $q_1(n)=p(n)\,q_2(n)$ periodische Functionen sind. Es ist also $\varphi_3(n)$ nothwendig als Summe von $\varphi_1(n)$ und $\varphi_2(n)$ mit willkürlichen periodischen Factoren darstellbar, oder es besteht zwischen $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ und $\varphi_3(n)$ eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten, w. z. b. w.

Verstehen wir unter A, B, C, α, α', v Constanten, so kann die dreigliedrige Recursionsformel im Allgemeinen auf die Form gebracht werden

$$14)\quad A(n+\alpha+1)\,\varphi(n+2)+B(n+v)\,\varphi(n+1)+C(n+\alpha')\,\varphi(n)=0.$$

Die Ausnahmefälle würden als Grenzfälle zu behandeln sein.

Die Anzahl der in dieser Formel enthaltenen Constanten lässt sich vermindern durch die einfache Substitution

$$\varphi(n)=k^n\,\varphi'(n).$$

Um zu erkennen, wie k bestimmt werden muss, damit die Lösung vereinfacht werde, setzen wir

$$\varphi(n) = k^n \,\Sigma a_\mu \, fac(n+\mu-1) : fac(n+\alpha-1)$$

in die Formel 14) ein, wodurch wir [unter Fortlassung des Factors $k^n : fac(n+\alpha)$] zu der Bedingung gelangen

$$\Sigma a_\mu \{ A k^2 fac(n+\mu+1) + B(n+v)\, fac(n+\mu) \\ + C(n+\alpha)(n+\alpha')\, fac n+\mu-1 = 0.$$

Transformirt man noch durch die Gleichungen

$$(n+v)\, fac(n+\mu) = fac(n+\mu+1) - (\mu+1-v)\, fac(n+\mu),$$

$$(n+\alpha)(n+\alpha')\, fac(n+\mu-1)$$
$$= fac(n+\mu+1) - (2\mu+1-\alpha-\alpha')\, fac(n+\mu) + (\mu-\alpha)(\mu-\alpha')\, fac(n+\mu-1),$$

so nimmt die Bedingung die Form an

$$0 = \Sigma a_\mu \{ L\, fac(n+\mu+1) - M_\mu\, fac(n+\mu) + C(\mu-\alpha)(\mu-\alpha')\, fac(n+\mu-1),$$

worin zur augenblicklichen Abkürzung L und M_μ bez. für

$$Akk + Bk + C, \quad Bk(\mu+1-v) + C(2\mu+1-\alpha-\alpha')$$

geschrieben wurde. Diese Bedingung vereinfacht sich, wenn k so eingerichtet wird, dass

$$L = Akk + Bk + C = 0$$

wird, also wenn

$$k = (-B \pm \sqrt{(BB - 4AC)}) : 2A$$

angenommen wird. In diesem Falle bleibt die Bedingung zu erfüllen

$$\Sigma a_\mu \{ C(\mu-\alpha)(\mu-\alpha')\, fac(n+\mu-1) - M_\mu\, fac(n+\mu) \} = 0,$$

woraus auf Grund der Methode der unbestimmten Coefficienten die Gleichung entspringt

$$a_\mu M_\mu = a_{\mu+1}(\mu+1-\alpha)(\mu+1-\alpha').$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$a_\mu = \frac{p(\mu)\left(\dfrac{Bk+2C}{C}\right)^\mu fac\left(\mu + \dfrac{Bk(1-v) - C(\alpha+\alpha'-1)}{Bk+2C}\right)}{fac(\mu-\alpha)\, fac(\mu-\alpha')}.$$

Schreiben wir x für $(Bk+2C) : C$ und $\beta - 1$ für

$$((1-v)Bk + (1-\alpha-\alpha')C) : (Bk+2C),$$

so können wir für a eine der beiden Formen wählen

$$15) \qquad \frac{x^\mu\, fac(\mu+\beta-1)}{fac(\mu-\alpha)\, fac(\mu-\alpha')}, \quad \frac{(-x)^\mu}{fac(-\mu-\beta)\, fac(\mu-\alpha)\, fac(\mu-\alpha')},$$

die sich nur durch einen in μ periodischen Factor unterscheiden.

Wird die Reihe $\Sigma a_\mu\, fac(n+\mu-1) : fac(n+\alpha-1)$ als aufsteigende angenommen, und ist μ' das kleinste vorkommende μ, so muss $a_{\mu'-1}$ Null sein, was eintritt, wenn μ' entweder gleich α oder gleich α' gemacht wird. Diese beiden Fälle liefern für $\varphi(n)$ die Lösungen

$$16)\ \sum \frac{k^n\, fac(m+\alpha+\beta-1)\, fac(m+\alpha+n-1)\, x^{\alpha+m}}{fac\, m\, fac(m+\alpha-\alpha')\, fac(n+\alpha-1)} = \frac{k^n\, fac(\alpha-\alpha')}{fac(\alpha+\beta-1)} F_\alpha \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & n \end{pmatrix} x \Bigg),$$

$$17)\ \sum \frac{k^n\, x^{\alpha'+m}\, fac(m+\alpha'+\beta-1)\, fac(m+\alpha'+n-1)}{fac\, m\, fac(m+\alpha'-\alpha)\, fac(n+\alpha-1)}$$
$$= \frac{k^n\, fac(n+\alpha'-1)\, fac(\alpha'+\beta-1)}{fac(n+\alpha-1)\, fac(\alpha'-\alpha)} . F_{\alpha'} \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & n \end{pmatrix} x \Bigg),$$

Zur Convergenz dieser Reihen ist es im Allgemeinen nöthig, dass $abs\, x < 1$ sei. Unter dieser Voraussetzung bilden aber 16) und 17) zusammen eine vollständige Lösung der Recursionsformel 14), d. h. es besteht zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten, oder ihr Quotient ist keine periodische Function. — Der Quotient der beiden Ausdrücke 16) durch 17) ist nämlich eine Function von n, die in der Folge $\alpha-1$ unendlich gross wird, während sie in der $\alpha-1$ conjugirten Folge endlich bleibt, und kann daher keine periodische Function von n sein, da diese, wenn sie für $n=-\alpha+1$ unendlich gross würde, in der ganzen zu α gehörenden completen Folge unendlich gross werden müsste.

Die Recursionsformel 14) wird nun, wie schon oben bemerkt, dadurch ärmer an Constanten und somit einfacher, dass wir $\varphi'(n)$ an Stelle von $\varphi(n)\, k^{-n}$ setzen oder, was dasselbe ist und was daher die Allgemeinheit nicht beschränkt, dadurch, dass wir A, B, C so einrichten, dass ein Werth von k gleich Eins wird. — Es wurde $x=(Bk+2C):C$ gesetzt und es muss also, wenn $k=1$ sein soll,

$$B:C = x-2, \quad A+B+C = A+C(x-1) = 0, \quad A = C(1-x)$$

sein, wodurch die Recursionsformel die Gestalt annimmt

$$18)\quad 0 = (1-x)(n+\alpha+1)\,\varphi(n+2) + (n+\alpha')\,\varphi(n)$$
$$-\,((2-x)n + x(\beta-1) + (\alpha+\alpha'+1))\,\varphi(n+1).$$

Geht man an die Lösung dieser Gleichung mit denselben Mitteln, wie oben an die Gleichung 14), so hat man für die dort auftretende Grösse k wegen des doppelten Zeichens zwei Werthe, von denen der eine natürlich Eins ist, weil k durch die Gleichung

$$kk(1-x) - k(2-x) + 1 = 0$$

zu bestimmen ist. Der zweite Werth ist $1:(1-x)$ und es genügt $\psi(n)=(1-x)^n\,\varphi(n)$ der Recursionsformel

$$\frac{n+\alpha-1}{1-x}\,\psi(n+2)$$
$$-\frac{(2-x)n + x(\beta-1)+\alpha+\alpha'+1}{1-x}\,\psi(n+1) + (n+\alpha')\,\psi(n) = 0$$

oder der Formel

$$19)\qquad \left(1-\frac{x}{x-1}\right)(n+\alpha-1)\,\psi(n+2)+(n+\alpha')\,\psi(n)$$
$$-\left(\left(2-\frac{x}{x-1}\right)n+\frac{x}{x-1}\,(1-\alpha-\alpha'-\beta-1)+\alpha+\alpha'+1\right)\psi(n+1)=0.$$

Bezeichnen wir die allgemeine Lösung $\varphi(n)$ von 18) mit $f\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & n & x\end{pmatrix}$, so wird die Lösung $\psi(n)$ von 19) mit

$$f\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & n & \overline{x-1}\end{pmatrix}$$

zu bezeichnen sein, und da $\psi(n)=(1-x)^n\,\varphi(n)$ ist, so wird die Gleichung angesetzt werden können

$$20)\qquad f\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & n & x\end{pmatrix}=(1-x)^{-n}\,f\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x \\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & n & \overline{x-1}\end{pmatrix},$$

die jedoch nicht so ganz wörtlich zu nehmen ist. Sie bedeutet nur, dass eine Lösung der Gleichung 18), durch die Gleichung 20) transformirt, wieder eine Lösung der Gleichung 18) ist. Daraus folgt noch nicht, dass die transformirte und die ursprüngliche Lösung einander wirklich gleich seien, weil ja erst zwischen drei Lösungen der Recursionsformel eine Gleichung zu bestehen braucht. Dass aber die Transformation 20) zu einer wirklichen Gleichung führt, wenn man sie, nach Hinzufügung eines einfachen Factors, auf die Lösung 16) anwendet, kann leicht direct bewiesen werden.

Zur Abkürzung werde

$$1-\alpha-\alpha'-\beta=\delta \quad\text{und}\quad \Delta=fac(\alpha-\alpha'):fac(\alpha+\delta-1)\,fac(\alpha+n-1)$$

gesetzt, alsdann ist

$$(1-x)^{-n}\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x \\ \delta, & n & \overline{x-1}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{(-x)^\alpha\,\Delta}{(1-x)^{\alpha+n}}\sum\frac{x^m\,fac(m+\alpha+\delta-1)\,fac(m+\alpha+n-1)}{(x-1)^n\,fac\,m\,fac(m+\alpha-\alpha')}.$$

Hierfür kann man schreiben, wenn man $(1-x)^{-\alpha-n-m}$ nach dem binomischen Satze entwickelt,

$$(-x)^\alpha\sum\frac{(-x)^m\,\Delta\,fac(m+\alpha+\delta-1)}{fac\,m\,fac(m+\alpha-\alpha')}\sum\frac{x^{m'}\,fac(m+m'+\alpha+n-1)}{fac\,m'}$$
$$=(-x)^\alpha\,\Delta\sum\frac{x^m\,fac(m+\alpha+n-1)}{fac\,m}\sum\frac{fac(m'+\alpha+\delta-1)\,(-m,m')}{fac\,m'\,fac(m'+\alpha-\alpha')}$$
$$=(-x)^\alpha\sum\frac{x^m\,fac(m+\alpha+n-1)}{fac\,m\,fac(\alpha+n-1)}\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' \\ \delta, & -m-\alpha'\end{pmatrix}$$
$$=(-x)^\alpha\sum\frac{x^m\,fac(m+\alpha+n-1)\,fac(m-\alpha'-\delta)\,fac(\alpha-\alpha')}{fac\,m\,fac(m+\alpha-\alpha')\,fac(\alpha+n-1)\,fac(-\alpha'-\delta)}$$
$$=(-1)^\alpha F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ 1-\alpha-\alpha'-\delta, & n & x\end{pmatrix}=(-1)^\alpha\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \\ \beta, & n & x\end{pmatrix},$$

wobei 10) angewandt würde. — Da in der somit gewonnenen Gleichung

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & x\\ \beta, n & \end{pmatrix} = (-1)^{-\alpha}(1-x)^{-n} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & n & \end{pmatrix}$$

links β mit n vertauscht werden kann, so muss auch

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & x\\ \beta, n & \end{pmatrix} = (-1)^{-\alpha} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ \beta, & 1-\alpha-\alpha'-n & \end{pmatrix}(1-x)^{-\beta}$$

sein, also muss, $x:(x-1)=z$ gesetzt,

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & z\\ \delta, n & \end{pmatrix} = (1-z)^{1-\alpha-\alpha'-\delta-n} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & z\\ 1-\alpha-\alpha'-\delta, & 1-\alpha-\alpha'-n & \end{pmatrix}$$

sein. Ersetzen wir hierin z durch x, δ durch β, so gewinnen wir vier in der Form verschiedene, aber einander gleiche Grundformen für die hypergeometrische Reihe, nämlich

$$21)\quad F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & x\\ \beta, n & \end{pmatrix} = F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x\\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & 1-\alpha-\alpha'-n & \end{pmatrix}(1-x)^{1-\alpha-\alpha'-\beta-n}$$

$$= (-1)^{-\alpha} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ 1-\alpha-\alpha'-\beta, & n & \end{pmatrix}(1-x)^{-n}$$

$$= (-1)^{-\alpha} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ 1-\alpha-\alpha'-n, & \beta & \end{pmatrix}(1-x)^{-\beta}.$$

Die erste dieser Gleichungen könnte übrigens mittels 11) auch leicht direct hergeleitet werden, was nur beiläufig erwähnt werden mag.

Art. III. Die verschiedenen Formen der Lösungen. Grenzwerthe.

Die Gleichungen 21) enthalten vier Lösungen der Recursionsformel 18), vier Lösungen erhält man, wenn man auf 17) dieselben Transformationen anwendet, als die sind, durch welche die Formen 21) aus 16) gefunden wurden. Die hieraus fliessenden einander gleichen Lösungen sind

$$22)\quad \frac{fac(n+\alpha'-1)}{fac(n+\alpha-1)} F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & x\\ \beta, n & \end{pmatrix} = \frac{(1-x)^{\varrho-n} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n+\alpha-1)} F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & x\\ \varrho, \varrho' & \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{-\alpha'} fac(n+\alpha'-1)}{(1-x)^n fac(n+\alpha-1)} F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ \varrho, n & \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{-\alpha'} fac(n+\alpha'-1)}{(1-x)^\beta fac(n+\alpha-1)} F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, \alpha' & \frac{x}{x-1}\\ \varrho', \beta & \end{pmatrix},$$

$$\varrho = 1-\alpha-\alpha'-\beta, \quad \varrho' = 1-\alpha-\alpha'-n.$$

Die Brauchbarkeit dieser acht Formen hängt von dem letzten Elemente der hypergeometrischen Reihe ab. Vier von ihnen sind brauchbar, so lange $abs\, x < 1$ ist, die vier anderen, so lange $abs\, x:(x-1) < 1$ ist. Demnach giebt es in Bezug auf x ein Werthgebiet, in welchem alle acht Lösungen brauchbar sind, nämlich das Gebiet, welches in der x-Ebene sowohl dem um den Punkt mit dem Radius Eins geschlagenen Kreise, als auch der Halbebene angehört, welche die x enthält, deren reeller Theil $< \frac{1}{2}$ ist. In dem Gebiete hingegen, welches sowohl ausserhalb des Einheitskreises, als auch ausserhalb jener Halbebene liegt, sind alle acht

Lösungen unbrauchbar, man ist daher genöthigt, sich nach weiteren Lösungen umzusehen. Wir finden aber sofort eine Lösung, die brauchbar ist, so lange $abs\, x > 1$ ist, wenn wir die Reihe $\Sigma a_\mu\, fac(n+\mu-1) : fac(n+\alpha-1)$, durch welche wir 18) integrirten, eine absteigende sein lassen. Dann ist $(-x)^\mu : fac(-\mu-\beta)\, fac(\mu-\alpha)\, fac(\mu-\alpha')$ für a_μ zu setzen [vergl. 15)] und für μ', das höchste in der Reihe vorkommende μ, ist $-\beta$ zu wählen, damit $a_{\mu'+1} = 0$ sei. Schreiben wir noch $-m-\beta$ für μ, so gewinnen wir die Lösung

$$\Sigma(-x)^{-m-\beta} fac(n-m-\beta-1) : fac\, m\, fac(-m-\alpha-\beta)\, fac(-m-\alpha'-\beta)\, fac(n+\alpha-1)$$
$$= p(n) \sum \frac{x^{-m-\beta} fac(-n-\alpha)\, fac(m+\alpha+\beta-1)\, fac(m+\alpha'+\beta-1)}{fac\, m\, fac(m+\beta-n)}$$

oder mit Unterdrückung eines periodischen Factors

$$\frac{fac(-n-\alpha)}{fac(\beta-n)} F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der in 21) enthaltenen Transformationen erhalten wir hieraus die vier neuen einander gleichen Lösungen

$$23)\quad \begin{aligned}\frac{fac(-n-\alpha)}{fac(\beta-n)} F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix} &= \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\varrho-n} fac(-\alpha-n)}{fac(\beta-n)} F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{x}\\ \sigma, & \sigma' & \end{pmatrix},\\ &\frac{(-1)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha'} fac(-\alpha-n)}{fac(\beta-n)} F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{1-x}\\ \sigma, & \alpha' & \end{pmatrix}\\ &= \frac{(-1)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} fac(-\alpha-n)}{fac(n-\beta)} F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & n & \frac{1}{1-x}\\ \alpha, & \sigma' & \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\sigma = 1-\alpha-\beta-n,\quad \sigma' = 1-\alpha'-\beta-n,\quad \varrho = 1-\alpha-\alpha'-\beta.$$

Löst man ebenso die Recursionsformel 19) durch eine absteigende Reihe und multiplicirt die Lösung mit $(1-x)^{-n}$, wodurch sie zu einer Lösung von 18) wird, so erhält man die vier neuen Lösungen ($\varrho = 1 - \alpha - \alpha' - \beta$)

$$24)\quad \begin{aligned}&\frac{(1-x)^{-n} fac(-\alpha-n)}{fac(\varrho-n)} F_\varrho\begin{pmatrix}\varrho, & n & 1-\frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix}\\ &= \frac{(1-x)^{-n}}{x^{\beta-n}} \frac{fac(-\alpha-n)}{fac(\varrho-n)} F_\varrho\begin{pmatrix}\varrho, & n & 1-\frac{1}{x}\\ \beta+\alpha-n, & \beta+\alpha'-n & \end{pmatrix}\\ &= \frac{(-1)^{-\varrho} x^{\alpha'}}{(1-x)^n} \frac{fac(-\alpha-n)}{fac(\varrho-n)} F_\varrho\begin{pmatrix}\varrho, & n & 1-x\\ \alpha'+\beta-n, & \alpha' & \end{pmatrix}\\ &= \frac{(-1)^{-\varrho} x^{\alpha} fac(-\alpha-1)}{(1-x)^n fac(\varrho-n)} F_\varrho\begin{pmatrix}\varrho, & n & 1-x\\ \alpha, & \alpha+\beta-n & \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit sind die Lösungen der Gleichung 18) durch hypergeometrische Reihen noch nicht erschöpft. Man findet vielmehr leicht noch die acht Lösungen

$$\frac{(1-x)^{-n} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\beta)} F_{-\beta}\begin{pmatrix}-\beta, & -n & \frac{1}{x}\\ 1-\alpha, & 1-\alpha' & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{(1-x)^n}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\varrho-n}} \frac{fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\beta)} F_{-\beta}\begin{pmatrix}-\beta, & -n & \frac{1}{x}\\ \alpha+\beta+n, & \alpha'+\beta+n & \end{pmatrix}$$

$$25)\quad =\frac{(1-x)^{-n}(-1)^{\beta}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha'-1}} \frac{fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\beta)} F_{-\beta}\begin{pmatrix}-\beta, & -n & \frac{1}{1-x}\\ \alpha+\beta+n, & 1-\alpha' & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{(1-x)^{-n}(-1)^{\beta}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}} \frac{fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\beta)} F_{-\beta}\begin{pmatrix}-\beta, & -n & \frac{1}{1-x}\\ 1-\alpha, & \alpha'+\beta+n & \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\varrho)} F_{-\varrho}\begin{pmatrix}-\varrho, & -n & 1-\frac{1}{x}\\ 1-\alpha, & 1-\alpha' & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{x^{-\beta-n} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\varrho)} F_{-\varrho}\begin{pmatrix}-\varrho, & -n & 1-\frac{1}{x}\\ 1-\alpha'-\beta+n, & 1-\alpha-\beta+n & \end{pmatrix}$$

$$26)\quad =\frac{(-1)^{\varrho} x^{1-\alpha} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\varrho)} F_{-\varrho}\begin{pmatrix}-\varrho, & -n & 1-x\\ 1-\alpha'-\beta+n, & 1-\alpha' & \end{pmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{\varrho} x^{1-\alpha'} fac(n+\alpha'-1)}{fac(n-\varrho)} F_{-\varrho}\begin{pmatrix}-\varrho, & -n & 1-x\\ 1-\alpha-\beta+n, & 1-\alpha & \end{pmatrix}.$$

Um zu diesen Formen zu gelangen, machen wir in 18) die Substitution $n=-n_1-2$, wodurch diese Gleichung die Gestalt erhält

$$(1-x)(n_1+1-\alpha)\,\varphi(-n_1)$$
$$-\{(2-x)n_1+x(-\beta-1)-\alpha-\alpha'+3\}\,\varphi(\overline{-n_1+1})+(n_1+2-\alpha')\,\varphi(\overline{-n_1+2})=0.$$

Schreiben wir weiter α'_1 für $1-\alpha$, α_1 für $1-\alpha'$, β_1 für $-\beta$, und multipliciren mit $(1-x)^{-n_1-1}$, so erhalten wir die Gleichung

$$(n_1+\alpha_1)\,\varphi(-n_1)(1-x)^{-n_1}-\{\overline{2-x}\,n_1+x\,\overline{\beta_1-1}+\alpha_1+\alpha'_1+1\}\,\varphi(\overline{-n_1+1})(1-x)^{-n_1-1}$$
$$+(1-x)(n_1+1+\alpha_1)\,\varphi(\overline{-n_1+2})(1-x)^{-n_1-2}=0.$$

Betrachtet man $\varphi(-n_1)(1-x)^{-n_1}$ als Unbekannte, so ist offenbar die Lösung dieser Formel in der Gleichung enthalten

$$\varphi(-n_1)(1-x)^{-n_1}=f\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha'_1 & x\\ \beta_1, & n_1 & \end{pmatrix}$$

und wir erhalten für 18) die Lösung

$$27)\qquad \varphi(n)=f\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x\\ \beta, & \beta' & \end{pmatrix}=\varphi(-n_1-2)$$

$$=(1-x)^{n_1+2} f\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha'_1 & x\\ \beta_1, & n_1+2 & \end{pmatrix}=(1-x)^{-n} f\begin{pmatrix}1-\alpha', & 1-\alpha & x\\ -\beta, & -n & \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ist eine Transformation gewonnen, welche auf 23) angewandt die Lösungen 25), auf 24) angewandt die Lösungen 26) liefert. Wendet man die Transformation auf die erste Form in 21) an, so erhält man die zweite.

Die unter 21) bis 26) aufgestellten 24 Formen enthalten für einen beliebigen Werth von x immer mindestens zwölf brauchbare. Dass sich unter diesen zwölf Lösungen immer von einander unabhängige vorfinden, wird sich im folgenden Artikel von selbst ergeben. Auf den die Convergenz begrenzenden Linien können gelegentlich noch mehr von diesen Formen gleichzeitig brauchbar sein. Es sind diese Formen die einfachsten Darstellungen der Lösungen in Reihenform. Man kann aber durch eine Substitution, die für den speciellen Fall der Kugelfunctionen von Herrn Heine zuerst angewandt ist, eine allerdings complicirtere Reihe erhalten, die einerseits für jeden Werth von x, der nicht rein reell und grösser als Eins ist, convergirt, andererseits einen gewissen Grenzübergang gestattet, der für die Kettenbruchentwickelung wichtig ist. Diese Substitution besteht darin, dass $4z:(1+z)^2$ für x gesetzt wird. Multiplicirt man noch, um einen Parameter zu gewinnen, mit $(1+z)^{-2\delta}$, so erhält man die Gleichung

$$F_0\begin{pmatrix}0, & \alpha' & \dfrac{4z}{(1+z)^2}\\ \beta, & \beta' & \end{pmatrix}(1+z)^{-2\delta}$$
$$=\sum_{(m)}\frac{(\beta,m)(\beta',m)\,4^m z^m)}{(1,m)(1-\alpha',m)}\sum_{(m')}\frac{(-z)^{m'}(2m+2\delta,m')}{(1,m')}.$$

Ordnen wir nach Potenzen von z, m'' für $m+m'$, $m'=m''-m$ setzend, so gewinnen wir hieraus den Ausdruck

$$\sum_{(m)}\frac{(\beta,m)(\beta',m)\,4^m}{(1,m)(1-\alpha',m)}\sum_{(m'')}\frac{(-z)^{m''}fac(m''+m+2\delta-1)(-m'',m)}{fac(m'')\,fac(2m+2\delta-1)}$$
$$=\sum_{(m'')}\frac{(-z)^{m''}fac(m''+2\delta-1)}{fac\,m''\,fac(2\delta-1)}\sum_{(m)}\frac{(\beta,m)(\beta',m)(-m'',m)(m''+2\delta,m)}{(1,m)(1-\alpha',m)(\delta,m)(\delta+\frac{1}{2},m)}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn $\delta=\beta$ angenommen wird, indem er dadurch die Form annimmt

$$\sum\frac{(-z)^m fac(m+2\beta-1)}{fac\,m\,fac(2\beta-1)}F_0\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{2}-\beta, & \alpha'\\ -m, & m+2\beta, & \beta'\end{pmatrix},$$

die vermöge der Gleichung 13) in die Gestalt gebracht wird

$$\frac{fac(-\alpha')}{fac(2\beta-1)}\sum\frac{(-z)^m fac(m+2\beta-1)\,fac(\frac{1}{2}-\alpha'-\beta-\beta')}{fac(m-\alpha')\,fac(\frac{1}{2}-\alpha'-\beta-\beta'-m)}$$
$$\times F_0\begin{pmatrix}0, & \frac{1}{2}-\beta, & m+\alpha'+\beta+\beta'-\frac{1}{2}\\ -m, & \frac{1}{2}+\beta-\beta', & \frac{1}{2}-m-\beta\end{pmatrix}.$$

Zwischen z und x bestehen die Beziehungen

$$4z:(1+z)^2=x,\quad z^2+2\left(1-\frac{2}{x}\right)z+1=0,$$
$$z=(2-x-2\sqrt{x-1}):x=(1-\sqrt{1-x}):(1+\sqrt{1-x}),$$
$$1+z=2(1-\sqrt{1-x}):x.$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass z mit x verschwindet. Der Grenzübergang, der sich in dieser Form leicht ausführen lässt, betrifft die Function

$$F(a+\omega,\ b+\omega,\ c+2\omega,\ x),$$

in der ω (positiv oder negativ) über alle Grenzen wachsen soll. Es liefert nämlich unser obiger Ausdruck die Beziehung

$$\lim_{\omega=\infty} F_0\begin{pmatrix}0, & \alpha'-2\omega & \\ \beta+\omega, & \beta'+\omega & x\end{pmatrix}(1+z)^{-2\beta-2\omega}$$

$$\sum \frac{(-z)^m fac(\frac{1}{2}-\alpha'-\beta-\beta')}{fac\, m\, fac(\frac{1}{2}-\alpha'-\beta-\beta'-m)} F_0\begin{pmatrix}0, & m+\alpha'+\alpha+\beta'-\frac{1}{2} & \\ -m, & \frac{1}{2}+\beta-\beta' & -1\end{pmatrix}$$

$$=\sum \frac{z^m(\alpha'+\beta+\beta'-\frac{1}{2},\ m)}{(1,m)} F_0\begin{pmatrix}0, & m+\alpha'+\beta+\beta'-\frac{1}{2} & \\ -m, & \frac{1}{2}+\beta-\beta' & -1\end{pmatrix}.$$

Vergleicht man diese Summe mit der in der Einleitung gegebenen Formel

$$(1-s)^{-\mu}(1-xs)^{-\nu} = \sum \frac{(\mu,m)\, s^m}{(1,m)} F_0\begin{pmatrix}0, & m+\mu & \\ -m, & \nu & x\end{pmatrix},$$

deren rechte Seite für $x=-1$, $\nu=\frac{1}{2}+\beta-\beta'$, $\mu=\alpha'+\beta+\beta'-\frac{1}{2}$, $s=z$ mit jener Summe übereinstimmt, so findet man $(1+z=2(1-\sqrt{1-x}):x)$

$$28)\qquad \lim_{\omega=\infty} F_0\begin{pmatrix}0, & \alpha'-2\omega & \\ \beta+\omega, & \beta'+\omega & x\end{pmatrix}(1+z)^{-2\beta-2\omega}$$
$$=(1-z)^{\frac{1}{2}-\alpha'-\beta-\beta'}.(1+z)^{\beta'-\beta-\frac{1}{2}}$$

oder in Gauss' Bezeichnung

$$28\text{a})\qquad \lim F(a+\omega,\ b+\omega,\ c+2\omega,\ x)(1+z)^{-2\omega}$$
$$=(1+z)^{a+b-\frac{1}{2}}.(1-z)^{c-a-b-\frac{1}{2}},$$

wobei es gleichgiltig ist, ob ω positiv oder negativ über alle Grenzen wächst.

Im nächsten Artikel werden wir noch von einem andern Grenzwerthe Gebrauch machen, dessen Herleitung deshalb hier folgt. — Es ist evident, dass

$$\lim F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'-\omega & \\ \beta, & \beta' & x\end{pmatrix} = x^\alpha, \quad abs\, x<1$$

wird, wenn der reelle Theil von ω positiv über alle Grenzen wächst. Wenn aber ω negativ reell über alle Grenzen wächst, in welchem Falle wir $-\omega$ für ω schreiben wollen, so würde das allgemeine Glied der hypergeometrischen Reihe

$$\frac{fac(\alpha+\beta+m-1)\, fac(\alpha+\beta'+m-1)\, fac(\alpha-\alpha'-\omega)\, x^{m+\alpha}}{fac(\alpha+\beta-1)\, fac(\alpha+\beta'-1)\, fac\, m\, fac(\alpha-\alpha'+m-\omega)}$$

zu untersuchen sein. Für bestimmte endliche Werthe von m, $m>0$, convergirt dieser Ausdruck gegen Null, wenn ω positiv über alle Grenzen wächst. Ist hingegen der Ausdruck m grösser als ω, so kann der Ausdruck mit wachsendem ω sehr gross werden, woraus der Untersuchung erhebliche Schwierigkeiten entspringen. Wendet man aber die Gleichung an $(\varrho=1-\alpha-\alpha'-\beta)$

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'+\omega & \\ \beta, & \beta' & x\end{pmatrix} = (-1)^\alpha(1-x)^{-\beta'} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'+\omega & \\ \varrho-\omega, & \beta' & \frac{x}{x-1}\end{pmatrix}$$

und setzt man voraus, dass nicht blos $abs\,x < 1$, sondern auch $abs\,x:(x-1) < 1$ sei, so lässt sich die rechte Seite leicht untersuchen. Es ist nämlich

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'+\omega & \dfrac{x}{x-1}\\ \varrho-\omega, & \beta' & \end{pmatrix}=\sum\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+\alpha}\frac{(\varrho-\omega,m).(\alpha+\beta',m)}{(1,m)(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)}$$

$$=\sum\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+\alpha}\frac{(\alpha+\beta',m)}{(1,m)}+\sum\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+\alpha}\frac{(\alpha+\beta',m)}{(1,m)}\left\{\frac{(\varrho-\omega,m)}{(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)}-1\right\}$$

$$=(-1)^\alpha x^\alpha(1-x)^{\beta'}+\sum\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+\alpha}\frac{(\alpha+\beta',m)}{(1,m)}\left\{\frac{(\varrho-\omega,m)}{(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)}-1\right\}.$$

Unter der Annahme, dass $\alpha-\alpha'+1-\omega$ nicht gerade eine ganze negative Zahl sei, wird, wenn m einen bestimmten endlichen Werth bedeutet,

$$(\varrho-\omega,m):(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)-1$$

für wachsende ω beliebig klein. Für grössere Werthe von m, die zu ω in ein endliches Verhältniss treten, wird $(x:(x-1))^m$ sehr klein, und das Product dieser Potenz in seinen Coefficienten in der obigen Summe convergirt ebenfalls gegen Null. Demnach wird die Summe

$$\sum\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\alpha+m}\frac{(\alpha+\beta,m)}{(1,m)}\,\frac{(\varrho-\omega,m)-(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)}{(\alpha-\alpha'+1-\omega,m)}$$

für wachsende ω, unter der Annahme

$$abs\,x<1,\quad abs(x:(x-1))<1,$$

gegen Null convergiren, und man erhält die Grenzwerthe

$$\text{29)}\qquad lim\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'+\omega & x\\ \beta, & \beta' & \end{pmatrix}=x^\alpha,\quad lim\,\omega=+\infty.$$

Es stimmt also dieser Grenzwerth unter der in Bezug auf x gemachten Bedingung mit dem überein, der für negativ wachsende ω erhalten wird.

Bemerkung. Mit Hilfe der evidenten Formel

$$\text{30)}\qquad F_{\varepsilon+\varepsilon'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha' & x\\ \beta, & \beta' & \end{pmatrix}=x^{\varepsilon'}F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha-\varepsilon', & \alpha'-\varepsilon' & x\\ \beta+\varepsilon', & \beta'+\varepsilon' & \end{pmatrix}$$

findet man

$$F_{-\beta}\begin{pmatrix}-\beta, & n & \dfrac{1}{x}\\ \alpha+\beta+n, & \alpha+\beta'+n & \end{pmatrix}=x^{n+\beta}F_n\begin{pmatrix}n, & \beta & \dfrac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha' & \end{pmatrix},$$

womit die zweite der Formen unter 25) vereinfacht werden kann.

Kleinere Mittheilungen.

XXI. Ueber die Sturm'sche Methode der Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung.

Die Sturm'sche Methode zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\varDelta x}+\frac{dy}{\varDelta y}=0,\qquad \varDelta x=\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}$$

besteht bekanntlich darin, dass nach Fortschaffung der Nenner die Gleichung durch $1-k^2x^2y^2$ dividirt und dann nach Theilen integrirt wird, wodurch man zuletzt auf die Formeln

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{\varDelta x}+\int\limits_0^y\frac{dy}{\varDelta y}=\int\limits_0^z\frac{dz}{\varDelta z},\qquad z=\frac{x\,\varDelta y+y\,\varDelta x}{1-\varkappa^2x^2y^2}$$

kommt. Diese Methode besitzt allerdings die Vorzüge, dass sie das Problem der Addition zweier elliptischen Integrale erster Gattung direct löst und auch an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig lässt. Indessen leidet sie an einem Mangel, den auch Durège in seiner Theorie der elliptischen Functionen rügt und von dem er sagt, derselbe bewirke, dass diese Methode beim ersten Studium keine rechte Befriedigung gewähre. Man fragt sich nämlich vergebens, aus welchem Grunde man vor der Integration durch den Ausdruck $1-k^2x^2y^2$ dividiren muss, um eine integrirbare Gleichung zu erhalten.

Der angeführte Mangel lässt sich nun leicht dadurch beseitigen, dass man die gegebene Differentialgleichung

$$\varDelta y\,dx+\varDelta x\,dy=0$$

behufs Integration mit einem vorläufig unbekannten Factor multiplicirt und diesen nachher zweckmässig bestimmt.

Aus der Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{dx}{\varDelta x}+\frac{dy}{\varDelta y}=0$$

ergiebt sich einerseits

$$2)\qquad \int\limits_0^x\frac{dx}{\varDelta x}+\int\limits_0^y\frac{dy}{\varDelta y}=\int\limits_0^z\frac{dz}{\varDelta z}$$

und andererseits

3) $$\Delta y . dx + \Delta x . dy = 0.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, multiplicire man ihn mit einem vorläufig unbekannten Factor F. Man erhält

$$F \Delta y . dx + F \Delta x . dy = 0$$

und hieraus durch Integration nach Theilen, wenn C eine Constante ist,

4) $$(x \Delta y + y \Delta x) F - \int [x\, d(F \Delta y) + y\, d(F \Delta x)] = C.$$

Bestimmt man nun die Function F so, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwindet, so bleibt als Integral der Differentialgleichung 1) resp. 3) die Gleichung

5) $$(x \Delta y + y \Delta x) F = C.$$

Da der Ausdruck unter dem Integralzeichen symmetrisch nach x und y ist, so lässt sich erwarten, dass auch F eine symmetrische Function von x und y sein wird. Nimmt man als eine der einfachsten dieser Functionen

$$F = \varphi(xy),$$

so erhält man nach obiger Bedingung

$$x\, d[\varphi(xy) . \Delta y] + y\, d[\varphi(xy) . \Delta x] = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiationen

6) $$M \varphi'(xy) + N \varphi(xy) = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$M = (x \Delta y + y \Delta x)(x\, dy + y\, dx), \quad N = x . d \Delta y + y . d \Delta x$$

gesetzt ist. Die Grössen M und N lassen sich folgendermassen umformen. Es ist

$$M = x^2 \Delta y\, dy + y^2 \Delta x\, dx + xy (\Delta y\, dx + \Delta x\, dy)$$

oder mit Rücksicht auf 1) resp. 3)

$$M = (y^2 \Delta^2 x - x^2 \Delta^2 y) \frac{dx}{\Delta x}.$$

Hieraus wird mit Benützung der Werthe von Δx und Δy nach einigen Umformungen

7) $$M = (y^2 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2 y^2) \frac{dx}{\Delta x}.$$

Ferner ist

$$N = xy \left[\frac{2\varkappa^2 y^2 - (1 + \varkappa^2)}{\Delta y} dy + \frac{2\varkappa^2 x^2 - (1 + \varkappa^2)}{\Delta x} dx \right]$$

$$= xy \left[2\varkappa^2 \left(y^2 \frac{dy}{\Delta y} + x^2 \frac{dx}{\Delta x} \right) - (1 + \varkappa^2) \left(\frac{dy}{\Delta y} + \frac{dx}{\Delta x} \right) \right],$$

also wegen 1)

8) $$N = -2\varkappa^2 xy (y^2 - x^2) \frac{dx}{\Delta x}.$$

Setzt man die Werthe von M und N aus 7) und 8) in 6) ein und dividirt die sich ergebende Gleichung durch den gemeinsamen Factor $(y^2-x^2)\frac{dx}{\varDelta x}$, so erhält man

$$(1-\varkappa^2 x^2 y^2)\,\varphi'(xy) - 2\varkappa^2 xy\,\varphi(xy) = 0.$$

Für $xy = u$ wird hieraus

$$(1-\varkappa^2 u^2)\,\varphi'(u) - 2\varkappa^2 u\,\varphi(u) = 0$$

oder

$$(1-\varkappa^2 u^2)\,d\varphi(u) + \varphi(u)\,d(1-\varkappa^2 u^2) = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber das vollständige Differential der Function $(1-\varkappa^2 u^2)\,\varphi(u)$, also ist, wenn C' eine zweite Constante bedeutet,

$$(1-\varkappa^2 u^2)\,\varphi(u) = C'$$

oder wegen $u = xy$ und $F = \varphi(xy)$

$$F = \frac{C'}{1-\varkappa^2 x^2 y^2}.$$

Wird der Werth von F in 5) eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{x\varDelta y + y\varDelta x}{1-\varkappa^2 x^2 y^2} = \frac{C}{C'} = c.$$

Aus 2) folgt aber, dass für $x=0$ zugleich $y=z$ wird; substituirt man diese speciellen Werthe für x und y in die letzte Gleichung, so wird $c=z$; die Gleichung

$$z = \frac{x\varDelta y + y\varDelta x}{1-\varkappa^2 x^2 y^2}$$

enthält also die Bedingung für die Existenz der Integralgleichung 2).

Hamm i. W. MUCH.

XXII. Ueber ein Analogon des Kater'schen Pendels und dessen Anwendung zu Gravitationsmessungen.

Von Prof. Dr. FINGER in Wien.

Das zu Gravitationsmessungen gewöhnlich zur Verwendung kommende Kater'sche Reversionspendel hat den Nachtheil, dass dasselbe zweischneidig ist, wodurch gewisse schwer berechenbare und nicht vollständig eliminirbare Fehlerquellen entstehen, die durch die bei beiden Schneiden ungleiche Abstumpfung, durch den nicht strengen Parallelismus der Schneiden u. s. w. veranlasst werden.

Der Verfasser empfiehlt nun ein in besonderer Weise eingerichtetes einschneidiges Pendel, das auf der Commutirung zweier mit dem Pendel mitschwingender ungleicher Massen, durch deren Umsetzung die Schwingungszeit t nicht beeinflusst wird, beruht und das die Vortheile des Kater'schen und Bessel'schen Pendels verbindet.

Befindet sich nämlich der Schwerpunkt der einen Masse m_1 im Abstande x_1, der zweiten ungleichen Masse m_2 im Abstande x_2 von der Drehaxe und wird die Schwingungszeit t trotzdem, dass die mitschwingenden Massen m_1 und m_2 und dadurch auch die Schwerpunktsdistanzen x_1 und x_2 commutirt werden, nicht verändert, so ist die reducirte Pendellänge $l = x_1 + x_2$, und zwar besteht dies Gesetz auch für Schwingungen in einem widerstehenden Mittel, wofern nur m_1 und m_2 genau gleich geformt sind.

Es ist sonach analog dem Kater'schen Pendel die Messung von l unabhängig gemacht von der Bestimmung der Trägheitsmomente und des Luftwiderstandes und zurückgeführt auf gleichen Schwingungszeiten entsprechende Distanzmessungen von der Drehaxe.

Man kann aber auch, wie weiter gezeigt wird, den Einfluss der Abstumpfung der Schneide und der Reibung auf der Unterlage beheben, wenn man analog dem Bessel'schen Pendel die Messung reducirt auf die Bestimmung der Schwingungszeit jenes Pendels, dessen Länge der messbaren Differenz zweier Pendellängen, deren Schwingungszeiten gemessen wurden, gleich ist.

Andere Vortheile beruhen darin, dass die Messung nicht, wie beim Reversionspendel, auf eine unabänderliche Schwingungszeit beschränkt ist, sondern man mit demselben Pendel Messungen der verschiedensten Schwingungszeiten vornehmen kann, wodurch der Genauigkeitsgrad des durch diese Messungen gefundenen wahrscheinlichsten Werthes der Länge des Secundenpendels erhöht wird, und dass man ferner in den Stand gesetzt ist, durch Anwendung einer entsprechenden Methode auch den wichtigen Einfluss der Mitschwingungen des Pendelgestells durch Schwingungsversuche allein zu bestimmen, beziehungsweise zu eliminiren.

Weiterhin werden die der entwickelten Theorie dieses Pendels entsprechenden Einrichtungen des Pendelapparates und Methoden der vorzunehmenden Messungen besprochen.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. 1881, XIV.)

XVI.

Grundzüge der mathematischen Chemie.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

Hierzu Taf. VII Fig. 1—3.

II.

2. Sauerstoff.

Atomgewicht: $O = \frac{16}{18,6}$. Moleculargewicht: $OO = \frac{16}{9,3}$.

Wenn die Quantität der trägen Substanz eines Atomes das Sechzehnfache von derjenigen des Wasserstoffatomes, also $\frac{16}{18,6}$ beträgt, so bekommen wir das, was die Chemiker Sauerstoff nennen und mit O bezeichnen.

Ist ein solches Atom inmitten des äthererfüllten Raumes gegeben, so werden sich zwei Aethertheilchen darauf niederlassen und als gebundene Aethertheilchen auf seiner Oberfläche zwei einander diametral gegenüberstehende Plätze einnehmen. Diejenigen freien Aethertheilchen, welche sich ausserhalb der so entstandenen Verbindung zunächst um diese herum gruppiren, thun dieses in derjenigen Ebene, welche auf der Verbindungslinie der zwei gebundenen Aethertheilchen senkrecht steht und durch den Mittelpunkt des Massentheilchens gelegt ist. Die Verbindung des Massentheilchens mit den beiden Aethertheilchen, das Sauerstoffatom, wirkt auf sämmtliche Aethertheilchen der Umgebung abstossend, und wenn der äussere Aetherdruck nicht wäre, so würden sich die Aethertheilchen mehr und mehr entfernen; allein aus dem angegebenen Grunde geschieht dieses nicht. Der Aetherdruck ist bei grösseren kugelförmigen Räumen dem Kugelradius proportional, doch kann bei kleineren Kugeln die Genauigkeit dieses Satzes durch die unregelmässige Gruppirung der Aethertheilchen der nächsten Umgebung etwas beeinträchtigt werden, und um Vergleichungen anstellen zu können, habe ich es für am besten gehalten, unter Voraussetzung der Genauig-

keit des erwähnten Satzes die Zusammenstellung der Theilchen, die sich in einem sonst von Aether entleerten Raume befinden, und deren Wirkung untersucht werden soll, nach Thunlichkeit gleich zu machen, so dass bei Vergleichung der Resultate die durch die abnorme Gruppirung des umliegenden Aethers entstehenden Ungenauigkeiten sich möglichst eliminiren. Zu diesem Zwecke untersuche ich jedesmal das Zusammenwirken von drei in einer Geraden befindlichen Theilchen, von denen der Mittelpunkt des mittleren als Mittelpunkt der Kugel gilt, deren Radius dem Aetherdrucke proportional ist.

Befindet sich das Sauerstoffatom im äthererfüllten Raume, so wird es durch die Abstossung seiner gebundenen Aethertheilchen den Aether in einiger Entfernung von sich halten, und es soll zunächst untersucht werden, wie weit von ihm zwei Aethertheilchen sich anlagern, die sich diametral entgegengesetzt in einer Geraden sind, welche man senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden gebundenen Aethertheilchen durch den Mittelpunkt des Massentheilchens ziehen kann.

Nach dem, was ich in meiner ersten Abhandlung hierüber erwähnte, ist die Gleichgewichtsbedingung eines jeden der beiden freien Aethertheilchen gegeben durch

$$1)\qquad \frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{4R^2}+R=0.$$

In dieser Gleichung bedeutet R die Entfernung eines äussern (freien) Aethertheilchens von dem Massenmittelpunkte, während r die Entfernung der beiden gebundenen Aethertheilchen von dem nämlichen Mittelpunkte angiebt. Der Werth von r ist nach der in der ersten Abhandlung (25. Jahrg. S. 365) gegebenen Bestimmung 0,37296, wenn die Aetherdistanz als Einheit gesetzt wird. Das erste Glied der vorstehenden Gleichung bezeichnet die von dem Massentheilchen auf eines der äusseren Aethertheilchen ausgeübte Anziehung, das zweite Glied giebt die Abstossung, welche die beiden gebundenen Aethertheilchen auf das freie bethätigen. Das dritte Glied giebt die gegenseitige Abstossung der beiden freien Aethertheilchen und das vierte Glied endlich den Aetherdruck. Der gemeinschaftliche Factor $b\mu^2$, welcher die Abstossungsconstante zweier Aethertheilchen bedeutet, ist in dieser, wie in den folgenden Gleichungen weggelassen.

Aus 1) ergiebt sich $R = 1{,}0141$. Das nächste Aethertheilchen befindet sich also in einer Entfernung von dem Sauerstoffatom, welche sich zu der Aetherdistanz verhält wie 1,0141 zu 1. In geringerer Entfernung als 1,0141 kann kein freies Aethertheilchen sich befinden, denn das Minimum der Abstossung ist jedenfalls in der vorausgesetzten, auf der Axe der gebundenen Aethertheilchen senkrecht stehenden Ebene.

Von den beiden freien Aethertheilchen des eben besprochenen Falles kann nun das eine durch ein weiteres Sauerstoffatom ersetzt werden,

welches so gestellt ist, dass die von dem bereits vorhandenen Atom auf das neuangekommene ausgeübte Abstossung ein Minimum ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Axen der beiden Atome, d. h. die Verbindungslinien der gebundenen Aethertheilchen, gleichzeitig auf einander und den Verbindungslinien der beiden Sauerstoffatome senkrecht stehen. Es ergeben sich nun die beiden Gleichungen

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{16}{18,6}\left(\frac{4R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}} \\ \qquad\qquad -\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{21,2}{18,6}R=0 \\ \text{und} \\ \frac{16}{18,6}\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{(R+R_1)^2}\right)-\frac{2R_1}{(R_1{}^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+R_1=0. \end{array}\right.$$

Hier bedeutet R die Distanz der beiden Sauerstofftheilchen, R_1 diejenige des in der Mitte befindlichen Atomes und des Aethertheilchens, das nach Ersetzung des einen von den beiden des ersten Falles noch vorhanden ist. Bezüglich des Aetherdruckes gilt Folgendes. Das peripherische Massentheilchen befindet sich in der Entfernung R von dem Mittelpunkte, und wäre es ein Aethertheilchen, so wäre die Wirkung des äussern Aethers auf dasselbe gleich R, wäre nach dem, was ich bereits früher erwähnte, so, als sei der allgemeine Raum leer, dafür aber der wirklich leere oder nach gesonderter Einrechnung des Inhaltes als leer betrachtete Raum mit einer Substanz erfüllt, die nach dem nämlichen Gesetze wirkt, wie der Aether, aber in entgegengesetztem Sinne. Wir hätten also eine Kraft, die mit der Grösse R das Aethertheilchen gegen den Kugelmittelpunkt führen würde. Wäre das Aethertheilchen durch ein Massentheilchen ersetzt, dessen Quantität der trägen Substanz so gross ist, dass $\frac{16}{18,6}$ eines Aethertheilchens dadurch neutralisirt werden, wie dieses bei der Sauerstoffkugel der Fall ist, so ist die äussere Aetherwirkung ausgedrückt durch $-\frac{16}{18,6}R$. Die beiden gebundenen Aethertheilchen des Sauerstoffatoms befinden sich in einer Entfernung $\sqrt{R^2+r^2}$ von dem Mittelpunkte und sie erfahren also jedes den Druck $\sqrt{R^2+r^2}$ gegen den Mittelpunkt hin. Die Componirende in der Richtung Massentheilchen — Mittelpunkt ist $\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}$, und es ergiebt sich als Wirkung des äussern Aethers auf das gesammte peripherische Sauerstoffatom $\left(2-\frac{16}{18,6}\right)R$ $=\frac{21,2}{18,6}R$. Das in der neuen Zusammenstellung aus 1) noch übrige Aethertheilchen ist in der Entfernung R_1 von dem Mittelpunkte und die Einwirkung des äussern Aethers auf dasselbe ist also ausgedrückt durch R_1.

Der Werth von R, welcher sich aus den Gleichungen 2) ergiebt, ist 0,8930, während sich für R_1 1,0324 entziffert. R ist in diesem Falle erheblich kleiner, als im Falle der Gleichung 1), es wird also ein Sauerstoffatom von einem andern noch in einer Entfernung angezogen, in welcher ein Aethertheilchen in Ruhe ist, oder wenn man will, das Aethertheilchen wird in einer Entfernung abgestossen, in welcher das Sauerstoffatom in Ruhe ist. Daraus ergiebt sich, dass, wenn in einem Raume Sauerstoffatome und Aethertheilchen durcheinander gemengt sind, die Abstossungen zwischen je zwei in geeigneter gegenseitiger Stellung befindlichen Sauerstoffatomen kleiner sind, als diejenigen zwischen je einem Atom und einem Aethertheilchen; dass aber zwei Nachbartheilchen die geeignete Stellung gegen einander einnehmen können, wird durch die stets vorhandenen Oscillationen bewirkt. Die nächste Folge davon ist, dass die Atome sich einander nähern und die zwischenliegenden Aethertheilchen verdrängen. Sie bleiben darauf in einer gegenseitigen Entfernung, welche kleiner ist als die Aetherdistanz, stehen und bilden so das, was man ein Sauerstoffmolecul nennt.

Man kann sich auch fragen, was geschehe, wenn drei Sauerstoffatome zusammenkommen, wenn also auch das zweite Aethertheilchen von 1) durch Sauerstoff ersetzt wird.

Diese drei Atome ordnen sich in einer Reihe hinter einander, die Axen der beiden äusseren sind gleichgestellt und gegen die des mittlern gekreuzt. Ist R die Entfernung eines äussern Theilchens von dem mittlern, so entsteht die Gleichung

$$3)\quad \frac{16}{18,6}\left(\frac{4R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{8R}{(4R^2+r^2)^{3/2}}\right)-\left(\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{4R}{(R^2+2r^2)^{3/2}} -\frac{R}{2(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{21,2}{18,6}R=0.$$

Der Werth von R ist hier 0,9191. Es ist also wieder R kleiner als die Aetherdistanz, und darum ist die Verbindung möglich, denn das Aethertheilchen, das in 2) dem Sauerstoff gegenüberliegt, wird von einem weitern äussern Sauerstoffatom verdrängt werden. Andererseits würden, wenn von der Verbindung der drei Sauerstoffatome eines weg käme, die beiden anderen näher zusammenrücken können, und es muss also die Neigung bestehen, dass unter Umständen eine Aenderung von $2\,O_3$ in $3\,O_2$ vor sich geht. Wenn infolge von Schwingungen das eine äussere Theilchen sich von dem mittlern entfernt, so ergiebt sich eine Neigung des andern äussern, sich dem mittlern zu nähern, weil es in dieser Richtung eine geringere Abstossung erfährt. Diese Annäherung verursacht ihrerseits eine Verstärkung der Abstossung, welche das erste Atom bereits erfährt, und Schwingungen (Temperaturerhöhung) müssen dem Zerfallen der Verbindung O_3 günstig sein.

In O_3 haben wir das Ozon, während O_2 den gewöhnlichen, nicht activen Sauerstoff bildet.

Die Art des Ueberganges von $2\,O_3$ in $3\,O_2$ näher zu erläutern, möge mir für jetzt erlassen werden, weil ich mir vorher durch Vergleichung anderer derartiger Vorkommnisse ein sichereres Urtheil darüber bilden möchte.

Es kann nun weiter untersucht werden, ob nicht auch vier Sauerstoffatome zusammentreten können. Diese Frage lässt sich jedoch dahin beantworten, dass, wenn eine Verbindung O_4 sich bilden würde, jedenfalls bei der ersten Schwingung ein Zerfallen in $2\,O_2$ eintreten müsste, denn sowie infolge von Schwingungen die zwei Atome der einen Seite sich näher rücken, muss die Abstossung zwischen dem zweiten und dritten Atom wachsen, und es muss eine Trennung erfolgen, weil dabei beiderseits die zwei Atome einander nach 2) noch näher treten können. Je mehr aber die Glieder der einzelnen Paare sich unter einander nähern, um so grösser wird die gegenseitige Abstossung der ganzen Paare und die Trennung derselben wird eine vollständige.

Sauerstoff und Wasserstoff.

Wenn bei der durch 1) vorausgesetzten Zusammenstellung das eine Aethertheilchen oder bei 2) das äussere Sauerstoffatom durch ein Atom Wasserstoff ersetzt wird, so dass sich die Reihenfolge Wasserstoff, Sauerstoff, Aether ergiebt, so richtet sich der Wasserstoff so, dass sein Massentheilchen dem Sauerstoff zu-, sein Aethertheilchen dagegen abgewendet ist. Beide Theilchen befinden sich in der Aequatorialebene des Sauerstoffs. Es ergeben sich nun nachstehende zwei Gleichungen:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{2R}{18{,}6\,(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{1}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{R^2}\\ &\qquad-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}+\frac{17{,}6}{18{,}6}R+r=0\\ &\text{und}\\ &\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}-\frac{2R_1}{(R_1{}^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{(R+R_1+r)^2}+R_1=0.\end{aligned}\right.$$

Hier bedeutet R die Entfernung der Wasserstoffkugel, R_1 die Entfernung des freien Aethertheilchens von dem Sauerstoffe. Der Aetherdruck ist gegeben auf Seite des Wasserstoffs durch den Druck auf das Massentheilchen $\left(-\frac{R}{18{,}6}\right)$ und denjenigen auf das Aethertheilchen $(R+r)$, auf Seite des freien Aethertheilchens durch R_1.

Es entsprechen diesen Gleichungen die Werthe $R=0{,}6228$ und $R_1=1{,}0072$.

Ersetzt man das freie Aethertheilchen der vorstehenden Combination durch ein zweites Wasserstoffatom, bei welchem wieder das Massentheilchen dem Sauerstoff zugewendet ist, so ergiebt sich

$$5)\quad \begin{aligned} &\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{1}{(2R+r)^2} \\ -&\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{1}{4.18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}-\frac{1}{4(R+r)^2}+\frac{17,6}{18,6}R+r=0. \end{aligned}$$

Der Werth von R ist 0,6158. Durch Vergleichung findet sich sofort, dass, weil sich bei dem Wasser (H_2O) der Wasserstoff dem Sauerstoff erheblich mehr nähert, als bei dem Wasserstoffsuperoxyd (HO), ersteres eine festere Verbindung sein wird, als letzteres, und dass bei letzterem eine Neigung bestehen muss, in ersteres überzugehen. Andererseits zeigt sich, dass der Abstand von Sauerstoff und Wasserstoff beidemal um Vieles kleiner ist, als die bisher gefundenen Werthe, und es fragt sich, ob es eine so grosse Differenz gebe zwischen der chemischen Verwandtschaft, infolge deren zwei verschiedene Atome beisammen sind, und der Molecularattraction, die nur zwei Atome derselben Art zusammenhält, wie dieses oben bei dem Sauerstoff der Fall war. Aus den paar Fällen, die bisher zu Gebote stehen, lässt sich hierüber ein sicheres Urtheil noch nicht abgeben; doch möchte ich glauben, dass trotz der grossen Differenz der Werthe von R in den Gleichungen 2) und 3) einer- und 3) und 4) andererseits in der Wirklichkeit keine so grosse Verschiedenheit besteht und dass zwischen dem, was ich chemische Verwandtschaft und Molecularattraction nannte, wohl kein Unterschied ist. Bereits in meiner vorigen Abhandlung habe ich (XXV, S. 366) darauf hingewiesen, dass die Grösse r, d. h. die Distanz der Mittelpunkte der Massenkugel und des mit ihr unmittelbar verbundenen Aethertheilchens, nicht constant sei, und es ist in der That im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass das Wasserstoffatom gerade soviel Volumen habe, als das Sauerstoffatom. Nimmt die Wasserstoffkugel einen kleineren Raum ein, als die Sauerstoffkugel, so ist auch das r des Wasserstoffs kleiner, und aus diesem Grunde habe ich die Gleichungen 4) und 5) auch unter der Voraussetzung berechnet, dass das r des Wasserstoffatoms nur den halben Werth von 0,37296, also 0,18648 habe. Alsdann ist für

die Gleichungen 4): $R = 0,8173$, $R_1 = 1,0080$,
die Gleichung 5): $R = 0,8112$.

Man sieht, dass nunmehr die Werthe von R sich schon mehr denen in 2) und 3) anschliessen, dass aber auch hier wieder das Wasser sich als die constantere Verbindung darstellt, als das Wasserstoffsuperoxyd.

Im Nachstehenden soll bis auf Weiteres, wenn keine besondere Bemerkung beigefügt ist, die Grösse r stets gleich 0,37296 genommen werden.

Kann ein Atom Sauerstoff sich nicht mit mehr als zwei Atomen Wasserstoff, kann ein Atom Wasserstoff sich nicht mit mehr als einem Atom Sauerstoff verbinden?

Wenn ein Atom Sauerstoff sich mit drei Atomen Wasserstoff verbinden soll, so kann dieses nur in der Weise geschehen, dass in der Aequatorialebene des ersteren die Wasserstoffatome sich so lagern, dass ihre Verbindungslinien mit dem Sauerstoffmittelpunkte unter sich Winkel von 120 Graden einschliessen. Jedesmal ist bei den Wasserstoffatomen die Massenkugel gegen den Sauerstoff gewendet. Diese Gruppirung weicht zwar von der oben vorausgesetzten, der zufolge stets drei Theilchen in einer Geraden sich befinden, ab, doch möge dieser Abweichung hier ein Plätzchen gegönnt sein. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$6)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{16}{18,6}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{(R+r)^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{3}{18,6}\cdot\frac{(2R+r)}{(3R^2+3Rr+r^2)^{3/2}} \\ &-\frac{1}{18,6^2}\left(16+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{R^2}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}R+r=0. \end{aligned}$$

Der entsprechende Werth von R ist 0,7205, und es ergiebt sich daraus, dass die Annäherung der Wasserstoffatome weit hinter derjenigen zurückbleibt, die bei dem Wasser beobachtet wird. Der Unterschied zwischen H_3O und H_2O ist jedenfalls grösser, als derjenige zwischen H_2O und HO, und da letztere Verbindung schon wenig Festigkeit hat, so dürfte die Darstellbarkeit von H_3O wenig Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Für die Verbindung HO_2 giebt es zwei Möglichkeiten, insofern sich auf der dem ersten Sauerstoffatom abgewendeten Seite des Wasserstoffs noch ein neues Sauerstoffatom anlagert, oder insofern dieses auf der Sauerstoffseite angefügt wird.

Was den ersten dieser beiden Fälle anbelangt, so ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Wasserstoffatom so gelagert ist, dass sein Massentheilchen dem ersten Sauerstoffatom zu-, sein Aethertheilchen aber davon abgewendet ist. Würde sich noch ein zweites Sauerstoffatom anschliessen, so würde dieses sich zunächst das Aethertheilchen des Wasserstoffes haben, und es würden sich die Formeln ergeben

$$7)\quad \begin{cases} -\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R+r)^2}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}} \\ -\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{4.16}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4(R+R_1)}{((R+R_1)^2+2r^2)^{3/2}} \\ +\frac{21,2}{18,6}R=0 \\ \text{und} \\ -\frac{16}{18,6^2}\cdot\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{2}{18,6}\cdot\frac{R_1}{(R_1{}^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18,6}\cdot\frac{1}{(R_1-r)^2}-\frac{2(R_1-r)}{((R_1-r)^2+r^2)^{3/2}} \\ -\frac{16^2}{18,6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2}+\frac{4.16}{18,6}\cdot\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4(R+R_1)^2}{((R+R_1)^2+2r^2)^{3/2}} \\ +\frac{21,2}{18,6}R_1=0. \end{cases}$$

R bedeutet die Entfernung des auf der Massentheilchenseite liegenden Sauerstoffatoms von dem Wasserstoffatom, R_1 diejenige des gegenüberliegenden Sauerstoffatoms, und es ergeben sich die Werthe $R = 0{,}7804$ und $R_1 = 1{,}1234$. Beide sind so gross, dass von Bildung von HO_2 auf diese Art gar nicht die Rede sein kann. Man könnte sich auch fragen, wie die Entfernungen ausfielen, wenn der Wasserstoff senkrecht auf der Verbindungslinie OHO stände; allein es giebt hier keine Lage des stabilen Gleichgewichts.

Die Verbindung HO ist auf der Wasserstoffseite abgeschlossen, weil sein Aethertheilchen gegen aussen gelagert ist; es kann aber auf der Sauerstoffseite noch ein Sauerstoffatom sich anlagern, so dass sich die Reihe OOH ergiebt. Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$8)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{2}{18{,}6}\cdot\frac{R}{(R^2+r^2)^{3/2}}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2} \\ & +\frac{2}{18{,}6}\cdot\frac{(R+R_1)}{((R+R_1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+r)^2}-\frac{2(R+r)}{((R+r)^2+r^2)^{3/2}} \\ & +\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1+r)^2}-\frac{2(R+R_1+r)}{((R+R_1+r)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{17{,}6}{18{,}6}\cdot R+r=0 \\ & \text{und} \\ & -\frac{16^2}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{R_1^2}+\frac{4.16}{18{,}6}\cdot\frac{R_1}{(R_1^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4R_1}{(R_1^2+2r^2)^{3/2}}-\frac{16}{18{,}6^2}\cdot\frac{1}{(R+R_1)^2} \\ & +\frac{2}{18{,}6}\cdot\frac{R+R_1}{((R+R)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{16}{18{,}6}\cdot\frac{1}{(R+R_1+r)^2}-\frac{2(R+R_1+r)}{((R+R_1+r)^2+r^2)^{3/2}} \\ & +\frac{21{,}2}{18{,}6}\cdot R=0. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet R die Entfernung des Massentheilchens des Wasserstoffs von dem mittleren Sauerstoff und hat den Werth 0,6402, während R_1, die Entfernung der beiden Sauerstoffatome von einander, die Grösse 0,8843 hat. Die Vergleichung des Werthes von R mit denjenigen, welche sich aus 4) und 5) ableiten, zeigt, dass die Verbindung HO_2 eine viel lockerere sein muss, als selbst HO, noch mehr aber als H_2O, und wenn die Erfahrung zeigt, dass die Beständigkeit von HO schon eine sehr geringe ist, so muss HO_2 gar nicht mehr möglich sein. Die Grösse R_1 ist in 8) etwas kleiner, als R in 2), und es würden also in 8) die Sauerstoffatome in einer constanteren Verbindung sein, als im Sauerstoffmolecul. Der sich so ergebende Widerspruch dürfte sich am besten dadurch lösen, dass das äussere Sauerstoffatom noch ein Atom Wasserstoff aufnimmt, so dass die Reihe H, O, O, H zum Vorschein kommt, und das Wasserstoffsuperoxyd würde also ein Doppelmolecul $2(HO)$ vorstellen. Ich muss übrigens die Berechnung dieser Verbindung zurückstellen, weil die ein kleinstes Theilchen derselben darstellende Reihe zu lang ist. In den bisher besprochenen Verbindungen ist stillschweigend vorausgesetzt, dass ausser den in

Rechnung gezogenen Theilchen nichts mehr in der Kugel sich befindet, die man um das mittlere Theilchen mit einem Radius ziehen kann, der der Entfernung des weitest entfernten gleich ist. Dieser Satz war bisher richtig; wenn aber eine Combination von vier Atomen, die in einer Reihe sich befinden, genommen wird, so sind seitlich derselben noch Aethertheilchen in der Kugel, deren Ort sich zur Zeit nicht bestimmen lässt, was dann wieder die Unberechenbarkeit der Wirkung nach sich zieht. Denkt man sich zwei solcher Molecule von $2(HO)$ gegeben, so muss eine Neigung derselben bestehen, sich in $2(H_2O)+OO$ zu zerlegen, denn wenn dieses geschieht, so findet, wie sich aus der Vergleichung von 5) und 8) ergiebt, eine ganz bedeutende Annäherung von H und O statt, während die zwei O nach 2) und 8) nur ganz unmerklich auseinanderrücken.

In nachfolgender Zusammenstellung finden sich die einzelnen vorbesprochenen Combinationen. Die zwischenstehenden Zahlen geben die jeweiligen Entfernungen; in den mit * bezeichneten Combinationen ist der Werth von r bei dem Wasserstoff 0,18648, in den übrigen 0,37296.

Bestandtheile:					Verbindung:
Aethertheilchen	1,0141	Sauerstoff	1,0141	Aethertheilchen	Sauerstoffatom.
Aethertheilchen	1,0324	Sauerstoff	0,8930	Sauerstoff	Inactiver Sauerstoff.
Sauerstoff	0,9191	Sauerstoff	0,9191	Sauerstoff	Ozon.
Wasserstoff	0,6228	Sauerstoff	1,0072	Aethertheilchen	Wasserstoffhyperoxyd.
Wasserstoff	0,6158	Sauerstoff	0,6158	Wasserstoff	Wasser.
* Wasserstoff	0,8173	Sauerstoff	1,0080	Aethertheilchen	Wasserstoffhyperoxyd.
* Wasserstoff	0,8112	Sauerstoff	0,8112	Wasserstoff	Wasser.
Sauerstoff	0,7804	Wasserstoff	1,1234	Sauerstoff	Unmögliche Verbindung.
Sauerstoff	0,8843	Sauerstoff	0,6402	Wasserstoff	Unmögliche Verbindung.

Die Möglichkeit einer Verbindung ist zunächst abhängig von der Annäherung der Atome an einander. Hat sich eine Verbindung gebildet, so kommt bezüglich ihrer Stabilität die Frage in Betracht, ob nicht eine andere Verbindung mit noch grösserer Annäherung der Atome da ist, in welche die erste übergehen kann.

Das Eis. Wenn eine grosse Anzahl von Wassertheilchen in einem gegebenen Raume so nahe bei einander ist, dass je die Nachbartheilchen

(abgesehen von der Schwere) auf einander anders einwirken, als wären sie Aethertheilchen, so dass also die Art ihrer Construction eine Rolle spielt, so gruppiren sie sich so an einander, dass die absolute Summe aller auf ein einzelnes Theilchen ausgeübten Abstossungen ein Minimum wird. So leicht es nun ist, die Nothwendigkeit dieser Bedingung einzusehen, so schwierig ist es zur Zeit, *a priori* diejenige gegenseitige Stellung der Theilchen zu bestimmen, bei welcher die erwähnte Bedingung erfüllt ist. Jedes Wassertheilchen besteht, abgesehen von dem es umgebenden Aether, aus 7 Kugeln (1 *O*, 2 *H*, 4 Aether), und soll seine Wirkung auf ein anderes gesucht werden, so hat man 7.7 verschiedene Anziehungen oder Abstossungen zu bestimmen, und wenn nun nicht 2, sondern ungezählte Wassertheilchen zu berücksichtigen sind, so ergiebt sich leicht, dass es zur Zeit unmöglich ist, der gestellten Aufgabe gerecht zu werden. Ich glaube nicht, dass dieses immer so sein werde, denn die Aufgabe, die gegenseitige Anziehung zweier mit sogenannter schwerer Substanz erfüllten Kugeln zu bestimmen, würde vor 300 Jahren nicht leichter gewesen sein, als heute die Berechnung der Wirkung einer grossen Anzahl von Wassertheilchen; aber für jetzt muss die Schwierigkeit nach Thunlichkeit umgangen und, wenn es nicht angeht, den Eiskrystall *a priori* zu berechnen, sein Bau an der Hand der Beobachtungen abgeleitet werden.

Das Wasser krystallisirt in sechsseitigen Prismen, die durch Pyramiden abgeschlossen werden. Soll nun ein solcher Körper zum Vorschein kommen, so müssen die einzelnen Theilchen in einer bestimmten Ordnung sich an einander schliessen, und man findet leicht, dass sich aus den gegebenen Elementen kein Krystall aufbauen lässt, wenn man nicht die Verbindungslinien von Sauerstoff und Wasserstoff jedes Wassertheilchens parallel macht. Berücksichtigt man diese Bedingung und sieht man zunächst von derjenigen Geraden ab, welche auf der ersteren senkrecht stehend die Aethertheilchen des Sauerstoffatoms mit einander verbindet (Axe des Sauerstoffs), so lagern sich die in einer Ebene befindlichen Wassertheilchen so, dass die gegenseitige Entfernung je zweier Nachbarn stets die gleiche ist, d. h. um ein mittleres Theilchen lagern sich sechs andere so, dass letztere die Ecke eines regelmässigen Sechsecks einnehmen. Durch Fortsetzung dieses Vorganges entsteht ein grösseres Sechseck, welches den Querschnitt des Krystalles darstellt. In Fig. 1 habe ich einen solchen Querschnitt gegeben. Die Ebene der Figur geht durch die Mittelpunkte der Sauerstofftheilchen, welche durch die Kreise dargestellt sind. Die jeweilig zu dem Sauerstoff gehörenden Wasserstoffatome befinden sich senkrecht über und unter den Kreisen. In Ebenen, welche derjenigen der Figur parallel über und unter derselben sich befinden, wiederholt sich diese Stellung im Allgemeinen, es muss jedoch zur Erzielung eines Minimums der Abstossung in der nächstoberen Ebene

die Anordnung so sein, dass die Wassertheilchen nicht senkrecht über denen der ersten Ebene sich befinden, sondern in der Mitte von dreien derselben, also senkrecht über den mit *o* bezeichneten Punkten der Figur. In der nächstunteren Ebene sind die Wassertheilchen senkrecht unter den in der Figur mit *u* bezeichneten Punkten. In jeder dritten Ebene wiederholt sich die Gruppirung so, dass die Wassertheilchen senkrecht über einander stehen.

Zwischen den Wassertheilchen sind in dem Eiskrystalle Aethertheilchen eingestreut, und über die Art dieser Einstreuung muss die Beobachtung insofern Auskunft geben, als man aus dem Brechungscoefficienten des Lichtes einen Anhaltspunkt zur Beurtheilung der Aetherdichtigkeit erhält. Die Geschwindigkeit des Lichtes ist der Quadratwurzel der Aetherdichtigkeit eines Mediums direct proportional. Dieser Satz gilt streng nur für den Aether des allgemeinen Raumes; für die farbenzerstreuenden Medien ist er nur annähernd richtig und die nöthige Correction dürfte sich zu dem Ergebnisse der strengen Regel (allerdings auch wieder nur annäherungsweise) etwa so verhalten, wie die Grösse der Farbenzerstreuung zu dem Brechungscoefficienten. Der Brechungscoefficient des Eises ist 1,3085*, die Farbenzerstreuung ist nicht beträchtlich und die Aetherdichtigkeit wird also von $\frac{1}{1,3085^2}$ nicht weit abweichen. Es fällt nun 1,3085 mit $\sqrt{\frac{7}{4}}$, d. i. 1,3229, so nahe zusammen, dass die Annahme, es seien in dem Eise unter sieben Aethertheilchen je drei durch etwas Anderes ersetzt, jedenfalls ihre Berechtigung hat.

Die Gesammtwirkung einer Sauerstoffkugel mit ihren zwei gebundenen Aethertheilchen ist wegen der entgegengesetzten Thätigkeit beider Bestandtheile gleich derjenigen eines Aethertheilchens von der Grösse $2-\frac{16}{18,6}=\frac{21,2}{18,6}$. Jedes der Wasserstoffatome hat die Wirkung $1-\frac{1}{18,6}=\frac{17,6}{18,6}$, und alle Bestandtheile eines Wassertheilchens zusammen wirken also wie ein Aethertheilchen von der Stärke $\frac{56,4}{18,6}$. Diese Grösse ist fast genau gleich 3; es lässt sich also die Wirkung eines Wassertheilchens nach aussen als Ersatz derjenigen von drei Aethertheilchen betrachten, und wenn dann der Brechungscoefficient $\sqrt{\frac{7}{4}}$ zum Vorschein kommen soll, so müssen im Eiskrystall auf jedes Wassermolecul vier Aethertheilchen treffen.

---

* Radike, Handbuch der Optik. II, 445.

Ausser dem Ersatze der freien Aethertheilchen durch den Ueberschuss der Wirkung der gebundenen über diejenige ihrer Massentheilchen kann noch ein weiterer Umstand auf den Brechungscoefficienten einen Einfluss ausüben, und dieser ist die Art der Gruppirung der Aethertheilchen.

Im allgemeinen Raume lagern sich letztere so, dass für gleiche Dichtigkeit ihre gegenseitige Abstossung ein Minimum wird. Tritt nun ein Theilchen aus der Gleichgewichtslage, so ist die Kraft, mit welcher die Nachbarn es zurückzuführen suchen, kleiner als bei jeder andern Anordnung, und ebenso ist es auch die Geschwindigkeit des Lichtes. Bei jeder andern Gruppirung der Aethertheilchen im allgemeinen Raume würde das Licht schneller gehen, als dieses in der That der Fall ist, und es lässt sich daher sehr gut denken, dass in einem andern Medium mit weniger dichtem Aether die Lichtgeschwindigkeit derjenigen des allgemeinen Raumes gleich oder sogar überlegen, also der Brechungscoefficient $\leqq 1$ ist, indem durch eine andere Gruppirung der Aethertheilchen das wieder ersetzt wird, was an der Dichtigkeit verloren ging. Diese Verschiedenheit in der Gruppirung kann auch bei dem Eise eintreten, und es entsteht darum die Frage, ob nicht durch andere Anordnung die gegenseitige Wirkung der Aethertheilchen des Eises vergrössert und daher trotz des Brechungscoefficienten 1,3085 die Quantität des freien Aethers kleiner sei, als $\sqrt{\frac{4}{7}}$ derjenigen Menge, die in einem dem Eise gleichen Theile des allgemeinen Raumes enthalten ist.

Wenn infolge besonderer Gruppirung die Wirkung einer grösseren Anzahl von Aethertheilchen nach aussen wächst, so beansprucht sie auch ein grösseres Volumen, und diese Zunahme des Volumens dauert so lange, bis die Abstossung der eingeschlossenen Aethertheile auf ein gegebenes Grenztheilchen ebenso gross ist, als der von aussen herein wirkende Druck. Dieser seinerseits ist ebenso gross, als wäre das eingeschlossene Volum mit Aether von normaler Vertheilung und normaler Dichtigkeit erfüllt, und es ist also gerade so, als seien die Aethertheilchen in dem grössern Volum etwas grösser, oder als seien mehr in demselben, als wirklich darin sind. Die Wirkung auf einander bleibt unverändert und darum kann auch keine, jedenfalls keine wesentliche Aenderung des Brechungscoefficienten die Folge sein. Wegen der veränderten Gruppirung beanspruchen die Aethertheilchen einen grössern Raum, es ist so, als sei entweder ihre Zahl oder ihre Abstossungsconstante gewachsen, und dieser Umstand muss seinerseits auf die Geschwindigkeit des Lichtes seinen Einfluss äussern.

Diese Besonderheit der Wirkung der Gruppirung lässt sich übrigens selbstverständlich nur innerhalb eines Körpers wahrnehmen, denn so wie die Entfernungen grösser werden, kann die Art der Verpackung keinen Einfluss mehr ausüben. Denken wir uns der Einfachheit wegen, es sei

ein kugelförmiger Körper gegeben, in dessen Innerem der (nicht neutralisirte) Aether weniger dicht ist, als im allgemeinen Raume, so muss der im Innern fehlende Aether sich zunächst der Oberfläche verdichten, und es muss da eine wenn auch dünne Schichte geben, in der die Brechungserscheinungen des Lichtes in umgekehrtem Sinne als gewöhnlich vor sich gehen, so dass also hier ein Medium sich befindet, welches das Licht weniger bricht, als der allgemeine Weltäther.

Wenn man, wie ich es oben gethan, voraussetzt, dass im Eise der freie Aether $\frac{4}{7}$ der Gesammtheit des nicht neutralisirten betrage, so bin ich von der Annahme ausgegangen, dass durch die Gruppirung bezüglich der gegenseitigen Wirkung der Theilchen das ersetzt wurde, was an Dichtigkeit abgeht. Es wird hier gehen, wie mit vielen derartigen Sätzen, die nahe richtig, aber nicht ganz genau sind. Wäre der Satz ganz genau, so würde es wohl keine Doppelbrechung geben. Eine kleine Ungenauigkeit bei dem Eise lässt sich durch die Verschiedenheit des berechneten Brechungscoefficienten von dem beobachteten erklären. Es ist übrigens nicht unmöglich, dass die Quantität der im Eise befindlichen freien Aethertheilchen zur Gesammtheit der nicht neutralisirten Aethermenge sich nicht wie 4 : 7, sondern wie 5 : 8 verhält; da jedoch hierüber alle Vorarbeiten fehlen, bleibt mir nichts Anderes übrig, als einstweilen den besprochenen Satz als genau anzunehmen.

Von je sieben Aethertheilchen des von dem Eiskrystalle umschlossenen Raumes sind also vier frei und den Werth von drei freien beträgt der Ueberschuss der Wirkung der gebundenen Aethertheilchen über diejenige ihrer Massenkugeln. Das Licht beruht auf Schwingungen der freien Aethertheilchen, die mit den Massentheilchen verbundenen können sich hieran nicht betheiligen, und darum sind sie für das Licht wie gar nicht vorhanden. Durch veränderte Gruppirung vergrösserte Abstossung gleicht sich aus durch Zunahme des beanspruchten Volumens, ohne dass für die Geschwindigkeit des Lichtes eine weitere wesentliche Aenderung eintritt.

Es entsteht nun die weitere Frage, wo die freien Aethertheilchen unterzubringen seien, und man erkennt an einem Modell sofort, dass dieses nicht anders geschehen kann, als wenn man zwischen zwei senkrecht über einander befindlichen Wassertheilchen in (nahe) gleichen Entfernungen von einander vier Aethertheilchen einsetzt. Es kommen also der Reihe nach senkrecht über einander: Wasserstoff, Sauerstoff, Wasserstoff des ersten Wassermoleculs, dann vier Aethertheilchen, hierauf Wasserstoff, Sauerstoff, Wasserstoff des zweiten Wassermoleculs, wieder vier Aethertheilchen u. s. w. Fig. 2 giebt einen Hauptschnitt des Krystalls. Die grösseren Kreise repräsentiren Sauerstoff, die kleineren Wasserstoff, die Punkte Aether. Man erhält den Bau der Eisnadel, wenn man Fig. 2 senkrecht auf Fig. 1 stellt und die Gerade ab beider Figuren und in

diesen Geraden die sich entsprechenden Theile zusammenfallen lässt. Um die Gruppirung der Theilchen in der auf cd (Fig. 1) senkrechten Ebene zu erhalten, lässt man in beiden Figuren die Geraden cd entsprechend congruiren. Das Gleiche gilt für $c_1 d_1$. Mit der Geraden ef (Fig. 1) wird $c_1 d_1$ (Fig. 2) combinirt und ebenso mit $e_1 f_1$ (Fig. 1) cd (Fig. 2) u. s. w. Fig. 3 giebt einen Hauptschnitt des Krystalles senkrecht auf $\alpha\beta$ der Fig. 1.

Es erübrigt nun, den Umstand, dass jedes Atom aus zwei verschiedenen Bestandtheilen, einer Massenkugel und einem oder zwei Aethertheilchen zusammengesetzt ist, einer nähern Betrachtung zu unterziehen.

Der Umstand, dass die Wirkung eines Wassertheilchens nahe, aber nicht ganz gleich derjenigen von drei freien Aethertheilchen ist, dass ferner, auch wenn vollständige Gleichheit wäre, die Vertheilung der Massentheilchen eine andere ist, als diejenige der Aethertheilchen, muss kleinere Verschiedenheiten der einzelnen Distanzen hervorrufen, während in den Fig. 2 und 3 alle Theilchen einer Reihe gleich weit von einander entfernt sind. Die Aethertheilchen, welche durch die Sauerstoffkugeln gebunden sind, stehen senkrecht auf der krystallographischen Axe, und ihre Verbindungslinie muss wieder so gerichtet sein, dass die Abstossungen einen kleinsten Werth erhalten. Es ist leicht zu sehen, dass dieses erzielt ist, wenn die Verbindungslinie der beiden Aethertheilchen mit der Verbindungslinie zweier Sauerstofftheilchen zusammenfällt. Im nächsten Sauerstoffatom ist diese Verbindungslinie gegen die erste um 60^0 gedreht und diese Richtungen sind angegeben durch die Richtungen der Geraden, welche (Fig. 1) in die die Sauerstofftheilchen repräsentirenden Kreise eingezeichnet sind. Die senkrecht über einander stehenden Sauerstoffatome zeigen gleichfalls eine Drehung der Verbindungslinie um 60^0. Alle diese Aenderungen veranlassen ihrerseits wieder kleinere Abänderungen in den durch die Figuren angegebenen Stellungen der einzelnen freien Aethertheilchen und es wäre nun die Aufgabe, die erwähnten in einem Eiskrystalle auftretenden Wirkungen gegen einander abzuwägen und dann zu untersuchen, welche Eigenschaften einem Krystalle zukommen, der in der angegebenen Weise aufgebaut ist. Selbstverständlich können nicht alle besprochenen Störungen in Rechnung gezogen werden und ich begnüge mich mit der Anordnung, welche die Figuren angeben, ich nehme mithin an, dass die Distanzen der einzelnen Glieder der der krystallographischen Hauptaxe parallelen Reihen stets gleich und dass bei den Sauerstoff- und Wasserstoffatomen Massen- und Aethertheilchen mit einander verschmolzen sind, so dass der Actionspunkt eines Atoms mit dem Mittelpunkte seines Massentheilchens zusammenfällt.

Ich denke mir nun aus einem Krystalle einen kugelförmigen Körper herausgeschnitten, welcher die einzelnen auf Fig. 1 errichteten Verticalebenen in den in Fig. 2 angegebenen Curven schneidet, so dass die von

den Curven umschlossenen Theilchen zu dem betrachteten Raume gehören. Der Kreis A (Fig. 2) steht senkrecht auf dem Durchmesser ab in Fig. 1 und ebenso sind es der Reihe nach die Kreise B, B_1, C, C_1, D, die man über den Sehnen cd, c_1d_1, ef, e_1f_1, αg der Fig. 1 als Durchmessern senkrecht auf Fig. 1 errichten kann. Heisst die Entfernung zweier benachbarten, in der nämlichen Horizontalebene befindlichen Sauerstoffatome po' (Fig. 2) $2R$, die Entfernung pp' (Fig. 2) $2R_1$, so ist der ausgeschnittene Raum eine Kugel, und die in Fig. 2 als Kreise gezeichneten Curven sind in der That Kreise, wenn $R=R_1$; wenn aber $R \gtrless R_1$, so geht der ausgeschnittene Raum in ein Rotationsellipsoid über, ohne dass jedoch der Inhalt der einzelnen Ellipsen dadurch ein anderer würde, als der der früheren Kreise.

Die auf ein gegebenes Theilchen, das sich an der Oberfläche des Ellipsoids befindet, ausgeübten Wirkungen sind nun die Abstossungen, die es von dem Inhalte des Ellipsoids erfährt, denen der Aetherdruck das Gleichgewicht halten muss.

Für das Sauerstofftheilchen e (Fig. 1), o' (Fig. 2) ergiebt sich so die Gleichung

$$9)\quad \begin{aligned} &\frac{21,2}{18,6}\cdot\frac{2R_1}{R}\left[1-0,3\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)+\tfrac{9}{56}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^2-\tfrac{5}{48}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^3\right.\\ &\qquad\left.+\tfrac{105}{1408}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^4-\cdots\right]\\ &-\frac{21,2}{18,6}\left[\frac{0,80565}{R^3}+\frac{1}{2(R^2+R_1^2)^{3/2}}+\frac{2}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{1}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{2}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{4}{9}R_1^2)^{3/2}}\right.\\ &\qquad+\frac{4}{(\frac{16}{3}R^2+\frac{1}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{4}{(\frac{16}{3}R^2+\frac{4}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{6}{(\frac{28}{3}R^2+\frac{1}{9}R_1^2)^{3/2}}\\ &\qquad+\frac{6}{(\frac{28}{3}R^2+\frac{4}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}\left(\frac{4}{(4R^2+R_1^2)^{3/2}}+\frac{2}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{16}{9}R_1^2)^{3/2}}\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{4}{(\frac{16}{3}R^2+\frac{16}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{6}{(\frac{28}{3}R^2+\frac{16}{9}R_1^2)^{3/2}}\right)\right]=0. \end{aligned}$$

Für das Theilchen p' (Fig. 2) bekommt man

$$10)\quad \begin{aligned} &\frac{2R_1}{R}\left[1-0,9\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)+\tfrac{45}{56}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^2-\tfrac{35}{48}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^3+\tfrac{945}{1408}\left(\frac{R_1^2-R^2}{R^2}\right)^4-\cdots\right]\\ &-\left[\frac{1,3988}{R_1^3}+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{21,2}{18,6}\,\frac{1}{(R^2+R_1^2)^{3/2}}+\frac{4}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{16}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{5}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{25}{9}R_1^2)^{3/2}}\right.\\ &\qquad+\frac{7}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{49}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{8}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{64}{9}R_1^2)^{3/2}}+\frac{17,6}{18,6}\left(\frac{2}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{4}{9}R_1^2)^{3/2}}\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{10}{(\frac{4}{3}R^2+\frac{100}{9}R_1^2)^{3/2}}\right)\right]=0. \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen entsprechen die Werthe

$$R=1,3502,\quad R_1=1,3815.$$

Bei Berücksichtigung des Umstandes, dass die Actionsmittelpunkte von Massen- und Aethertheilchen nicht zusammenfallen, wie dieses oben vorausgesetzt wurde, würden die Werthe von R und R_1 sich etwas, wenn auch wenig grösser herausgestellt haben.

Gehen wir von dem innern Bau des Krystalles auf seine Gestalt über, so ist zunächst klar, dass sein Querschnitt ein Sechseck sein müsse, das entweder dem in Fig. 1 durch ausgezogene Gerade oder dem durch punktirte angegebenen entspricht. Um nun ein Prisma zu erhalten, braucht man nur die Figuren 2 und 3 beliebig nach oben oder unten fortzusetzen und man hat dann einen Hauptschnitt des Krystalles.

Während sich bei dem Prisma die Querschnitte in unveränderter Grösse wiederholen, findet bei der Pyramide von einem Querschnitte zum andern eine Abnahme statt. Ueber das Maass dieser Abnahme sollten nun die Beobachtungen Auskunft geben; allein es ist mir keine Messung bekannt, welche die Winkel an der Pyramide der Eisnadel angäbe. Einzig und allein finde ich in dem Physikalischen Wörterbuch von Gehler, V, Abth. 1 S. 462, die Notiz, dass Fraunhofer aus der Beobachtung der Sonnenhöfe für den Winkel, welchen zwei sich gegenüberstehende Pyramidenflächen einschliessen, einen Werth von 88^0 insofern abgeleitet habe, als er unter Voraussetzung dieses Winkels eine genügende Erklärung für die Entstehung der Sonnenhöfe zu finden glaubt. Das ist nun eine Bestimmung von sehr zweifelhaftem Werthe, denn einestheils kommt es hier der Natur der Sache nach auf einen Grad hin oder her nicht an und andererseits ist es gar nicht einmal sicher, ob gerade der angegebene Winkel an den Höfen Schuld ist, denn letztere können auch von anderen Umständen, wiederholten Reflexionen und Brechungen u. dergl. hervorgebracht werden, ohne dass der fragliche Winkel dabei ins Spiel käme.

Die einfachste Voraussetzung bezüglich der obenerwähnten Abnahme des Krystallquerschnittes ist wohl die, dass das Ende einer Querreihe (Fig. 2) beiderseits um ein Glied, also um R zurückrückt, wenn man in der Richtung der Hauptaxe von der einen Ebene zur nächsten übergeht, also um R_1 steigt oder herabgeht. Gelangt man also von einer Sauerstoffebene zur andern, so ist man um sieben Ebenen ($7R_1$) aufwärts oder abwärts gegangen und dabei ist die Reihe beiderseits kleiner geworden. Heisst nun der erwähnte Winkel an der Spitze φ, so ist

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{R_1} \quad \text{und} \quad \varphi = 88^0\,41',$$

was also von der Bestimmung Fraunhofer's nur 41′ abweicht. Eine solche Pyramidenfläche giebt die Gerade ae (Fig. 2). Trotz der nahen Uebereinstimmung mit der Fraunhofer'schen Schätzung spricht doch gegen diese Zuspitzung der Umstand, dass die Pyramidenfläche auf die

Wassertheile gar keine Rücksicht nimmt und gewissermassen über Stock und Stein überall hindurchgeht; sie ist, um mich so auszudrücken, durch die Anordnung der Theilchen im Krystall nicht motivirt. Ein Wassertheilchen wird bei dem untern Wasserstoff geschnitten, das andere bei dem obern, und eine derartige Nichtberücksichtigung der Atome ist schwerlich naturgemäss. Mehr für sich haben die Flächen, welche durch Gerade angegeben werden, die man in Fig. 2 von a aus gegen α, β, γ, δ ziehen kann. Nach dem Gesetze der Axenveränderung ist möglicherweise nicht nur eine derselben da, sondern es können mehrere derselben auftreten. Wählt man die Gerade αg, so wird der Winkel φ $79^0\,54'$; nimmt man dagegen $\alpha\delta$, so ergiebt sich $\varphi = 96^0\,20'$. Diese Werthe gelten für 0^0 absolute Temperatur; für Temperaturen, die in der Nähe von 0^0 C. sind, vergrössert sich der Winkel φ in beiden Fällen, und es hat also die Annahme der Geraden αg als Durchschnitt der Pyramidenfläche mit der Ebene des Papieres mehr Wahrscheinlichkeit für sich, als $\alpha\delta$. Die dem Durchschnitte $\alpha\gamma$ entsprechende Fläche steht senkrecht auf der Ebene des Papieres, und da ab (Fig. 2) mit ab (Fig. 1) zusammenfällt, ergiebt sich, dass der Querschnitt der Eisnadel durch das mit punktirten Linien gezeichnete Sechseck angegeben wird.

Es ist auch möglich, dass der Querschnitt der Eisnadel durch das durch ausgezogene Linien angegebene Sechseck (Fig. 1) dargestellt wird. In diesem Falle giebt Fig. 3 einen Hauptschnitt, der auf einer Prismenfläche senkrecht steht. In diesem Falle sind die Pyramidenflächen sehr deutlich angegeben durch $\alpha\gamma$ und $\gamma\delta$; es schneiden dieselben aber die Hauptaxe unter verschiedenen Winkeln, und zwar sind dieselben $25^0\,49'$ und $44^0\,3'$. Letzterer ist fast genau die Hälfte des Fraunhofer'schen und bei der Annahme, dass derselbe nicht nur auf den abwechselnden Seiten der Pyramide auftritt, sondern auf allen, ist der Winkel 88^0 bis auf ein paar Minuten Differenz da. Ich möchte bezweifeln, dass dieses der natürliche Fall ist, bin vielmehr geneigt, das Zusammentreffen für ein zufälliges zu halten. Eher möchte ich annehmen, dass durch Anwachsen der einen oder der andern Art von Flächen rhomboedrische Zuspitzungen der Eisprismen zum Vorschein kommen. Es ist auch möglich, dass zuerst das durch $\alpha\gamma$ angegebene Rhomboeder sich bildet und dann als Zuspitzung von der Kante aus das Rhomboeder $\gamma\delta$. Doch darüber können nur Beobachtungen entscheiden. Sollte es sich durch diese herausstellen, dass die Eisnadeln rhomboedrische Zuspitzungen haben, so würde entschieden das durch ausgezogene Linien angegebene Sechseck einen Querschnitt des Eisnadelprismas repräsentiren.

Cohäsionsverhältnisse der Eiskrystalle. In sämmtlichen Lehrbüchern der Physik ist wenigstens bei den festen Körpern die Rede von einer Cohäsion, deren Amt es ist, einerseits die Körpertheilchen zusammenzuhalten, andererseits deren zu grosser Annäherung an einander

in den Weg zu treten. Die Cohäsion wird als das Ergebniss einer oder mehrerer nach sehr complicirten Gesetzen wirkenden Kräfte betrachtet.

Eine solche Cohäsionskraft giebt es nicht, und die Cohäsion ist nur das Ergebniss des Aetherdruckes, welcher ganz analog dem Luftdrucke thätig ist und ebenso die Körpertheile zusammenhält, wie letzterer den mehr oder weniger evacuirten Recipienten der Luftpumpe auf den Teller drückt. Mag bei der Luft zunächst die Schwere, mag bei dem Aether die gegenseitige Abstossung der Theilchen die nächste Veranlassung sein, beide Medien suchen in jeden für sie leeren Raum hineinzudringen und üben auf diejenigen Gegenstände, die sie daran hindern, einen Druck aus, indem sie dieselben vor sich herzuschieben suchen. Bei der Luft hindert die Substanz des Recipienten das Eindringen in das Innere des letzteren, bei dem Aether ist es die sperrige Anordnung der Körpertheilchen. So hat oben die Rechnung ergeben, dass sowohl R, als R_1 bei dem Eise grösser sind, als die Aetherdistanz, und im Eiskrystalle ist also weniger (durch Massentheile nicht neutralisirter) Aether, als in einem gleich grossen Theile des allgemeinen Raumes.

Der Hauptunterschied zwischen beiden Arten von Druck ist derjenige der Stärke. Der Aetherdruck steht zu der Geschwindigkeit des Lichtes ungefähr in denselben Beziehungen, wie der Luftdruck zu der Geschwindigkeit des Schalles. Die ausserordentliche Geschwindigkeit des Lichtes bedingt eine ungemein grosse Elasticität des Aethers, die wieder auf eine bedeutende gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen zurückführt. Ist aber die Abstossung der Aethertheilchen unter einander sehr gross, so muss es auch ihr Bestreben sein, in einen Raum einzudringen, in dem sie weniger dicht sind, als im allgemeinen Raume. Bei der Luft ist die Elasticität nur gering, die Schwere wird aber durch die Elasticität gemessen, denn wenn der abgeschlossene Recipient der Luftpumpe mit Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit gefüllt ist, hebt deren Elasticität den Druck der äussern Luft auf, man kann den Recipienten ganz leicht von dem Teller abheben.

Es sei angenommen, infolge einer von aussen kommenden Einwirkung werde der Eiskrystall (oder zunächst die oben zum Zwecke der Bestimmung von R und R_1 aus dem Krystall geschnittene Kugel) in der Richtung der optischen Axe so auseinandergezogen, dass der Werth von R_1 um eine Grösse y wächst, oder auch, er werde durch eine im entgegengesetzten Sinne wirkende Thätigkeit zusammengedrückt. Geschieht dieses, so ändert sich in den Gleichungen 9) und 10) nicht nur der Werth von R_1 um y, sondern auch derjenige von R um x, d. h. es gehen gleichzeitig R und R_1 in $R+x$ und R_1+y über, wobei x und y je nach Umständen einen positiven oder negativen Werth haben können. Zu diesem Zwecke habe ich die Ausdrücke 9) und 10) nach fortschreitenden Potenzen von x und y entwickelt und bin dabei bis zur zweiten Potenz der

Augmente gegangen. Ich nehme übrigens Anstand, die ellenlangen Formeln hier vorzuführen, da an ihnen eigentlich nicht viel zu sehen ist, und es möge daher genügen, wenn ich nur die Aenderung angebe, welche die beiden Formeln erfahren. Bezeichnet wieder, wie früher, das Zeichen — eine Thätigkeit, welche die Theilchen nach aussen zu führen strebt, und ist ausserdem die Aenderung des Aetherdruckes durch eckige Klammern eingeschlossen, so ist die Aenderung von 9) gegeben durch

$$\text{a)}\quad \begin{aligned}&[0,5752y - 0,5886x + 0,1518x^2 + 0,1292xy - 0,2712y^2]\\ &+ 0,6824y + 3,7857x - 4,7394x^2 - 1,6969xy - 0,1587y^2.\end{aligned}$$

Die Aenderung von 10) ist

$$\text{b)}\quad \begin{aligned}&[-1,1502y + 1,1770x + 0,5410y^2 - 0,2550xy - 0,3054x^2]\\ &+ 1,3333x + 2,9597y - 0,7960x^2 - 3,1575y^2 - 2,3067xy.\end{aligned}$$

Die Aenderung b) ist hervorgebracht durch einen äussern Zug oder Druck. Es wurde in der Richtung von R_1 gezogen oder gedrückt, und infolge davon ändern sich R und R_1 um x und y, und endlich wird nach geschehener Aenderung ein Ruhezustand eintreten, gegeben durch die Gleichung

$$11)\quad 2,5103x + 1,8059y - 1,1014x^2 - 2,5617xy - 2,6165y^2 \pm H = 0,$$

in welcher H einen Zug bedeutet, wenn es mit dem Zeichen — versehen ist.

In der Richtung von R findet kein Zug oder Druck statt, es haben sich R und R_1 geändert und es muss also auch unter den neuen Verhältnissen Gleichgewicht sein. Dadurch ergiebt sich aus a)

$$12)\quad 1,2576y + 3,1971x - 4,5876x^2 - 1,5677xy - 0,4299y^2 = 0.$$

Diese Gleichung giebt für x den Werth

$$13)\qquad x = -0,3934y + 0,1636y^2.$$

Wenn also der Krystall verlängert oder verkürzt wird, so ändert sich auch sein Querschnitt, er thut dieses in einem der Axenveränderung entgegengesetzten Sinne. Wird der vorstehende Werth von x in die Gleichung 11) eingesetzt, so ändert sich diese um in

$$14)\qquad -1,3685y^2 + 0,8221y \pm H = 0.$$

Wird die Gleichung für das untere Zeichen von H aufgelöst, so ergiebt sich

$$15)\qquad y = \frac{H}{0,8221 - 1,3685y}.$$

Infolge eines in der Richtung der Hauptaxe wirkenden Zuges entsteht eine Verlängerung des letzteren, welche so lange dem Zuge proportional ist, als man $1,3685y$ gegen $0,8221$ vernachlässigen kann; ist dieses jedoch nicht mehr zulässig, so wächst die Ausdehnung rascher, als die ziehende Kraft.

Geht der Zug in einen Druck über, so wechseln H und y gleichzeitig ihr Zeichen und es wird

$$y = \frac{H}{0{,}8221 + 1{,}3685\,y}.$$

Dem Drucke entspricht eine Verkürzung der Axe, die zuerst dem Drucke proportional ist, dann aber langsamer wächst als dieser.

Zieht man an der Eisnadel, so dehnt sie sich in die Länge, und hört der Zug auf, so kehrt die Nadel in ihre ursprüngliche Gestalt zurück, sie ist also elastisch. Die Elasticität hat jedoch ihre Grenze, die nicht überschritten werden darf. Aus 14) ergiebt sich

$$y = 0{,}3004 \pm \sqrt{0{,}0902 - 0{,}7307\,H}.$$

Sowie H den Werth $\frac{0{,}0902}{0{,}7307}$ übersteigt, wird der Wurzelausdruck negativ, y imaginär und letzteres erreicht also, wenn es die Grösse 0,3004 erlangt hat, sein Maximum. Darüber hinaus giebt es für y keinen reellen Werth mehr, die Nadel zerbricht.

Die Elasticität des Eises dürfte kaum so weit gehen, dass eine Eisnadel, ohne zu zerbrechen, eine Dehnung bis zu $\frac{0{,}30}{1{,}38}$, also $\frac{1}{4{,}6}$ der ursprünglichen Länge zulässt, obwohl hierüber wenigstens für die Temperatur des absoluten Nullpunktes keine Beobachtungen vorhanden sind. Es kommt hier sehr viel auf die Grösse des Coefficienten von y in 14) an, der seinerseits eine Differenz des Werthes bei dem Aetherdrucke und der Abstossung ist. Kleine Aenderungen in den Werthen von R und R_1 können hier verhältnissmässig bedeutende in dieser Differenz hervorbringen und ich halte es für möglich, dass bei genauerer Bestimmung von R und R_1 eine engere Elasticitätsgrenze zum Vorschein käme. Es mag auch sein, dass das oben dem Krystall entnommene Rotationsellipsoid mit den Halbaxen $2R$ und $2R_1$ zu klein ist, um den Werth des Aetherdruckes genau bestimmen zu können, und es wäre vielleicht besser gewesen, Halbaxen von etwa 10 R und R_1 zu nehmen. Freilich würden in diesem Falle die Formeln 9) und 10) ganz kolossale Dimensionen angenommen haben, und das wollte ich wenigstens für jetzt vermeiden.

Wird ein Körper durch Auseinanderziehen zerrissen, so dehnt er sich zuerst der Belastung proportional aus. Nähert sich das Reissen, so ergiebt sich allemal, dass eine Stelle da ist, welche weniger Widerstand leistet, als die übrigen; von nun an findet vorzugsweise hier die Ausdehnung statt, und diese kann im Momente des Reissens an der Bruchstelle sehr bedeutend sein, wenn auch der für die ganze Länge berechnete durchschnittliche Werth nur gering ist. Die ganze Erscheinung geht übrigens so rasch vor sich, dass eine Messung hier gar nicht möglich ist, und es ist durchaus nicht so undenkbar, dass im Moment des Brechens an der Bruchstelle Ausdehnungen vorkommen, die, wie die oben berechnete, bis auf 0,22 der ursprünglichen Länge gehen.

XVII.

Einige Anwendungen eines functionentheoretischen Satzes.

Von

Dr. H. Krey

zu Freiburg i. B.

Der für die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen fundamentale Satz von Cauchy, welcher angiebt, unter welchen Bedingungen der Werth eines Integrals bei einer Verschiebung des die beiden Grenzen verbindenden Integrationsweges ungeändert bleibt, hat bereits zahlreiche Anwendungen gefunden. Im Folgenden ist derselbe benutzt zum Beweise eines algebraischen Theorems von Jacobi, sodann zur Bestimmung der Anzahl von Lösungen eines Systems von algebraischen Gleichungen und endlich zur Herleitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale, wie sich dieselbe durch Specialisirung des Abel'schen Theorems ergiebt.

Die wenigen Sätze, welche zur Anwendung kommen, mögen hier zusammengestellt werden.

Der Cauchy'sche Satz sagt aus: Das Integral

$$\int F(z)\,dz$$

einer Function $F(z)$, über eine geschlossene Curve erstreckt, behält einen constanten Werth bei einer Verschiebung des Integrationsweges, so lange bei dieser Verschiebung kein Unstetigkeitspunkt und kein Verzweigungspunkt der Function $F(z)$ überschritten wird.

Insbesondere also hat es den Werth Null, wenn die Curve keinen der erwähnten Punkte einschliesst; es lässt sich dann „auf Null zusammenziehen".

Ist $F(z)$ eine mehrdeutige Function von z, so ist unter einer geschlossenen Curve eine solche zu verstehen, welche, von einem Punkte z_0 mit einem bestimmten Werthe $F(z_0)$ ausgehend, nicht nur zu dem Punkte z_0, sondern auch zu dem Ausgangswerthe $F(z_0)$ zurückführt. Ein Zweifel hinsichtlich der stetigen Fortsetzung der Function würde nur

entstehen können, wenn die Curve durch einen Verzweigungspunkt hindurchginge, welche Annahme im Folgenden ausgeschlossen ist.

Ist z_0 ein im Endlichen gelegener Unstetigkeitspunkt, aber kein Verzweigungspunkt der Function $F(z)$, in welchem dieselbe von der ersten Ordnung unendlich gross wird, dann ist der Betrag des in kleinem Kreise bei positiver Begrenzungsrichtung um z_0 genommenen Integrals

$$\text{I)} \qquad \int\limits_{(z_0)} F(z)\,dz = 2\pi i \lim^{z=z_0} [(z-z_0)\,F(z)].$$

Sofern man die unendlich vielen Punkte der z-Ebene, welche Träger eines unendlich grossen z sind, durch einen einzigen Punkt repräsentirt, etwa durch Ausbreitung der z auf einer Kugelfläche, hat es einen Sinn, von geschlossenen Linien zu reden, welche den Punkt $z=\infty$, aber keinen andern wesentlichen Punkt umgeben. Auf derartige geschlossene Linien ist der Cauchy'sche Satz von der Zusammenziehbarkeit des Integrationsweges nicht ohne Weiteres anwendbar; das Integral

$$\int\limits_{(\infty)} F(z)\,dz$$

kann einen von Null verschiedenen Werth haben, auch wenn $F(z)$ für $z=\infty$ endlich bleibt. Man entscheidet hierüber leicht mit Hilfe der Substitution

$$z = \frac{1}{\zeta}.$$

War der ursprüngliche Integrationsweg ein um den Punkt $z=0$ beschriebener Kreis mit hinlänglich grossem Radius R, so bezieht sich das transformirte Integral

$$\int \frac{1}{\zeta^2}\, F\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \int F_1(\zeta)\, d\zeta$$

auf die in positiver Richtung auszuführende Umkreisung des Punktes $\zeta=0$, bei beliebig kleinem Radius $\frac{1}{R}$. Der Annahme nach umschliesst der neue Integrationsweg ausser dem Punkte $\zeta=0$ keine Ausnahmepunkte der Function $F_1(\zeta)$; besteht daher eine für kleine ζ giltige Reihenentwickelung

$$F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + \dots,$$

so erhält man nach I) als Werth des Integrals

$$2\pi i\, C_1,$$

weil $m=1$ der einzige ganzzahlige Werth von m ist, für welchen

$$\int\limits_{(0)} \frac{d\zeta}{\zeta^m}$$

nicht verschwindet.

Wird $F(z)$ für $z=\infty$ unendlich gross von der ν^{ten} Ordnung, etwa wie eine gegebene ganze Function

$$C'_\nu z^\nu + C'_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots,$$

so zeigt die Reihenentwickelung

$$F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{C'_\nu}{\zeta^\nu} + \frac{C'_{\nu-1}}{\zeta^{\nu-1}} + \ldots + C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + \ldots,$$

dass das vorige Resultat giltig bleibt. Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

Das Integral

$$\text{II)} \qquad \int\limits_{(\infty)} F(z)\,dz,$$

auf eine geschlossene Curve erstreckt, welche alle im Endlichen gelegenen Ausnahmepunkte der Function $F(z)$ umgiebt, ist Null, wenn

$$\lim^{z=\infty}[z\,F(z)] = 0;$$

dagegen

$$= 2\pi i \lim^{z=\infty}[z\,F(z)],$$

wenn dieser Grenzwerth endlich und von Null verschieden ist; und allgemein

$$= 2\pi i\,C_1,$$

wo C_1 den Coefficienten von z^{-1} in der Entwickelung von $F(z)$ nach fallenden Potenzen von z bedeutet.

Hinsichtlich der Beweise dieser Sätze vergl. man z. B. das Buch von Durège: „Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse", besonders Abschn. IV und VIII.

1.

Sei $F(z)$ eine rationale Function

$$F(z) = \frac{z^m}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)} \quad \text{und} \quad m \leqq n-2.$$

Die Bedingung $\lim\limits^{z=\infty}[z\,F(z)] = 0$ ist dann erfüllt und die Sätze I), II) geben sogleich die von Euler gefundenen Identitäten*

$$\text{1)} \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\alpha_h^{\,m}}{(\alpha_h-\alpha_1)\ldots(\alpha_h-\alpha_{h-1})(\alpha_h-\alpha_{h+1})\ldots(\alpha_h-\alpha_n)} = 0.$$

für $m=n-1$ dagegen wird $\lim[z\,F(z)] = 1$, also

---

* Elementare Beweise derselben finden sich in Baltzer, Determinanten, S. 80, und Schellbach, Die Lehre von den elliptischen Integralen und Thetafunctionen, S. 309.

$$2) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\alpha_h^{n-1}}{(\alpha_h-\alpha_1)\dots(\alpha_h-\alpha_{h-1})(\alpha_h-\alpha_{h+1})\dots(\alpha_h-\alpha_n)} = 1.$$

Für grössere m ist, dem Satze II) zufolge, der Ausdruck 1) gleich dem Coefficienten von z^{-1} in der Entwickelung von $F(z)$ nach fallenden Potenzen von z.

Wird

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

gesetzt und unter $\psi(x)$ eine ganze Function verstanden, deren Grad den $(n-2)^{\text{ten}}$ nicht überschreitet, so kann man die Gleichung 1) durch folgende ersetzen:

$$3) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\psi(x)}{f'(x)}\right]_{x=\alpha_h} = 0.$$

Diese Gleichung hat Jacobi (Theoremata nova algebraica, Cr. J. Bd. 14) verallgemeinert. Während die linke Seite von 3) eine symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung ist, giebt der Jacobi'sche Satz den Betrag folgender Summe an:

$$4) \qquad \sum_{h=1}^{h=mn} \left[\frac{\psi(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\right]_{x=\alpha_h,\, y=\beta_h}$$

wo $(\alpha_1, \beta_1), \dots (\alpha_{mn}, \beta_{mn})$ die Lösungen von zwei Gleichungen bez. m^{ten} und n^{ten} Grades sind und wo ψ eine ganze Function bedeutet, deren Grad (d. h. höchste Dimension in x und y zusammen) $\leq m+n-2$ ist. Ist dieser Grad $< m+n-2$, ist die Summe 4) Null; ist er $= m+n-2$, hat dieselbe einen von Null verschiedenen, leicht angebbaren Werth.

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes gab Clebsch (Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Cr. J. Bd. 63), indem er das Verschwinden des folgenden Ausdrucks bewies:

$$5) \qquad \sum \frac{\psi(x_1, \dots x_r)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}},$$

wo sich die Summirung auf alle $n_1, n_2, \dots n_r$ Lösungen $(x_1, \dots x_r)$ der Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots \quad f_r = 0$$

bez. $n_1^{\text{ten}}, n_2^{\text{ten}}, \dots n_r^{\text{ten}}$ Grades bezieht, welche nach und nach in den unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck für $x_1, \dots x_r$ einzusetzen sind und wo der Grad der ganzen Function ψ höchstens

beträgt. $$n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r - 1$$

Die zu Anfang dieses Paragraphen gezeigte kurze Herleitung der Euler'schen Identitäten lässt vermuthen, dass auch die Sätze von Jacobi und Clebsch in functionentheoretischen Betrachtungen ihre einfachste Begründung finden.

Durch die Gleichungen

$$6)\quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(s_1, s_2, \ldots s_r, z) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_r(s_1, s_2, \ldots s_r, z) = 0, \end{array} \right.$$

deren linke Seiten ganze Functionen sind und bez. die Grade n_1, n_2, $\ldots n_r$ erreichen, sind $s_1, \ldots s_r$ als irrationale, und zwar als μ-deutige Functionen von z bestimmt, wenn

$$\mu = n_1 n_2 \ldots n_r$$

die Zahl der Lösungen angiebt, welche die Gleichungen für ein beliebig gegebenes z liefern. Hat eine der Functionen s, z. B. s_1, in einem Punkte $z = z_0$ einen Verzweigungspunkt, so gilt dasselbe von den übrigen Functionen s, da man nach 6) $s_2, \ldots s_r$ rational durch s_1 und z ausdrücken kann. Für einen solchen Punkt z_0 liefern die Gleichungen 6) nur $\mu - 1$ verschiedene Lösungssysteme $(s_1, \ldots s_r)$, weil deren zwei, und im Allgemeinen auch nur zwei, zusammenfallen.

Aus den Gleichungen 6) folgen durch Differentiation nach z

$$7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} ds_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial s_r} ds_r = - \frac{\partial f_1}{\partial z} dz, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial s_1} ds_1 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial s_r} ds_r = - \frac{\partial f_r}{\partial z} dz, \end{array} \right.$$

welche für einen beliebigen Punkt z und zugehöriges Werthsystem der s und einen benachbarten Punkt $z + dz$ mit dem zugehörigen Werthsystem $s_1 + ds_1, \ldots s_r + ds_r$ bestehen. So lange diese Gleichungen nur ein System von Lösungen für $ds_1, \ldots ds_r$ liefern, giebt es nur eine stetige Fortsetzung der Function s von dem Punkte z aus. Wenn dagegen die Gleichungen 7) zur Bestimmung der $ds_1, \ldots ds_r$ unbrauchbar sind, was infolge des Verschwindens der Determinante

$$8)\quad D = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}$$

eintritt, so hat man in z einen Verzweigungspunkt. Hierbei ist wieder zu beachten, dass nur für zwei bestimmte Werthsysteme $(s_1, \ldots s_r)$ Verzweigung stattfindet, während die $\mu - 2$ übrigen Systeme bei einer Umkreisung des Punktes z sich nicht ändern.

Für ein unendlich kleines D werden die aus 7) sich ergebenden Werthe von $\frac{ds_1}{dz}, \ldots \frac{ds_r}{dz}$ unendlich gross, was sich auch dadurch erklärt,

dass in der Nähe eines Verzweigungspunktes z_0 die zugehörigen s sich wie

$$C_0 + C_1 \sqrt{z - z_0}$$

verhalten.

Die Verzweigungspunkte der Functionen s werden also bestimmt durch die Gleichung $D = 0$ in Verbindung mit den Gleichungen 6), woraus sich beiläufig ihre Zahl

$$= n_1 n_2 \dots n_r [n_1 + n_1 + \dots + n_r - r]$$

ergiebt. Der Punkt $z = \infty$ gehört im Allgemeinen nicht zu den Verzweigungspunkten.

In dem Integral

$$J = \int_{(\infty)} \frac{\psi(s_1, \dots s_r, z)}{D \cdot \varphi(s_1, \dots s_r, z)} dz$$

seien φ, ψ ganze Functionen ihrer Argumente, D habe die in 8) angegebene Bedeutung. Ist φ vom Grade m, und übertrifft der Grad von $D . \varphi$ den von ψ um mindestens zwei Einheiten, ist also der Grad von ψ

$$\leqq n_1 + \dots + n_r - r + (m - 2),$$

so genügt die zu integrirende Function der Bedingung

$$lim [z \, F(z)] = 0 \quad \text{für} \quad z = \infty;$$

dem Satze II) zufolge ist also $J = 0$.

Die sämmtlich im Endlichen gelegenen Ausnahmepunkte der Function $F(z)$ sind theils die durch $D = 0$ bestimmten, welche Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte zugleich sind, theils die Verschwindungspunkte der Function φ. Die letzteren mögen mit $z^{(h)}$, und die zugehörenden Werthe von $s_1, \dots s_r$ mit $s_1^{(h)}, \dots s_r^{(h)}$ bezeichnet werden, wo der Index h die Zahlwerthe 1, 2, ... $n_1 n_2$, ... $n_r m$ annehmen kann.

Um zu zeigen, wie sich J auf ein Aggregat anderer Integrale zurückführen lässt, benutze ich hier dieselbe Vorstellungsweise und für gewisse Integrationswerthe dieselben Benennungen, die in dem Werke von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen, S. 80 flgg.) sich finden.

Einen festen Punkt O der z-Ebene, der nicht Verzweigungspunkt ist, in welchem also μ verschiedene Werthe der s, also auch der Function $F(z)$ stattbaben, wähle man etwa so, dass die geradlinigen Wege, welche ihn mit den einzelnen Ausnahmepunkten verbinden, sämmtlich der Richtung nach verschieden sind. Der geradlinige Weg von O bis in die Nähe eines Ausnahmepunktes, um diesen in kleinem Kreise (in positiver Richtung) herum, und auf demselben oder einem unendlich nahen Wege zurück nach O, heisst eine Schleife. Ob sich der Werth einer rationalen Function von z, $s_1, \dots s_r$ nach dem Durchlaufen einer Schleife, die einen Verzweigungspunkt einschliesst, ändert, hängt davon ab, mit welchem der zu $z = O$ gehörenden Werthsysteme der s man von

O ausging; unter diesen μ Werthsystemen giebt es zwei und nur zwei, für welche das Durchlaufen dieser Schleife eine Aenderung von $F(z)$ herbeiführt, wobei dann das eine System in das andere übergeht; für die $\mu-2$ übrigen Systeme ist die Schleife unwesentlich. — Ein vollständiger Umgang ist ein Weg, welcher alle Schleifen in der durch ihre Lage gegebenen Reihenfolge umfasst, also eine wirklich (nicht nur scheinbar) geschlossene Linie. Es giebt μ vollständige Umgänge, entsprechend ebenso vielen zu $z=O$ gehörenden Werthen der s, mit welchen man ausgehen kann.

Der für J vorgeschriebene Integrationsweg lässt sich offenbar auf einen vollständigen Umgang zusammenziehen, und die μ verschiedenen J auf die Summe der μ Umgänge, so dass sich die Summe der J als Aggregat von Schleifenintegralen darstellt. Hier tritt nun der sehr wesentliche Umstand ein, dass jede Verzweigungsschleife zweimal durchlaufen wird und die beiden jedesmal so entstehenden Schleifenintegrale einander geradezu aufheben. So bleiben denn nur noch die Integrale um die Unstetigkeitspunkte $z^{(h)}$, welche nicht Verzweigungspunkte sind. Jedes dieser Integrale wird bei der Gesammtheit der μ Umgänge einmal und nur einmal erzeugt; man erhält also nach Satz I) als Werth der zu untersuchenden Integralsumme

$$\sum_{(h)} 2\pi i \lim \left[(z-z^{(h)})\frac{\psi}{D.\varphi}\right] \text{ für } z=z^{(h)},\ s_\lambda = s_\lambda^{(h)}.$$

Da sich andererseits die J, jedes für sich, annulliren, so hat man

$$9)\qquad \sum_{(h)} \frac{\psi^{(h)}}{D^{(h)}}.\frac{1}{\lim \dfrac{\varphi}{z-z^{(h)}}}=0,$$

wo z. B. $\psi^{(h)}$ das Resultat der Substitution $z^{(h)}, s_1^{(h)}, \ldots s_r^{(h)}$ für $z, s_1, \ldots s_r$ in ψ bedeutet.

Da in der Nähe des Punktes $z^{(h)}$ die Reihenentwickelung besteht

$$\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right)^{(h)}(s_1-s_1^{(h)})+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_r}\right)^{(h)}(s_r-s_r^{(h)})+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{(h)}(z-z^{(h)})+\ldots,$$

so erhält man nach Theilung mit $z-z^{(h)}$ und durch Uebergang zur Grenze für $z=z^{(h)}$, $s_\lambda = s_\lambda^{(h)}$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dz}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial s_r}\frac{ds_r}{dz}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]^{(h)} - \lim\frac{\varphi}{z-z^{(h)}}=0.$$

Hierzu nehme man die aus 7) für $z=z^{(h)}$ folgenden Gleichungen

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dz}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial s_r}\frac{ds_r}{dz}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\right]^{(h)}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{\partial f_r}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dz}+\ldots+\frac{\partial f_r}{\partial s_r}\frac{ds_r}{dz}+\frac{\partial f_r}{\partial z}\right]^{(h)}=0,$$

und eliminire $\dfrac{ds_1}{\partial z}, \ldots \dfrac{ds_r}{dz}$; es ergiebt sich

$$D^{(h)}.\lim \frac{\varphi}{z-z^{(h)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial s_r} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r} & \frac{\partial f_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}^{(h)};$$

hiernach verwandelt sich die Gleichung 9) in folgende:

$$10) \qquad \sum_{h=1}^{h=n_1 \ldots n_r m} \left[\frac{\psi}{\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}} \right]^{(h)} = 0,$$

welche den zu beweisenden Satz ausdrückt.

In Betreff des Beweises für den Fall zweier Gleichungen

$$f(s, z) = 0, \quad \varphi(s, z) = 0$$

vergl. man Clebsch und Gordan, l. c. S. 39. Derselbe beruht auf Eigenschaften der zur Elimination dienenden Multiplicatoren. Sei S das Resultat der Elimination von z; Z das der Elimination von s aus $f=0$, $\varphi=0$, so ist identisch

$$Af + B\varphi = S, \quad Cf + D\varphi = Z,$$

wo A, B, C, D gewisse ganze, in Determinantenform darstellbare Functionen von s und z sind, und zwar hat

$$AD - BC$$

die für den Beweis wesentliche Eigenschaft, in s und z zusammen zwar den Grad $2mn - m - n$ zu erreichen, jedoch s und z einzeln höchstens zur Potenz $mn - 1$ zu enthalten.

Die Ausdehnung dieses Beweises auf den Fall von mehr als zwei Gleichungen (vergl. Clebsch, Cr. J. Bd. 63) scheint jedoch einer Ergänzung zu bedürfen, weil hier der Eliminationsprocess ein weit complicirterer ist und infolge dessen die in Betracht kommenden Eigenschaften der Multiplicatoren weniger leicht nachzuweisen sind.

Ein sehr beachtenswerther Beweis des Jacobi'schen Theorems, der sich leicht auf den Fall beliebig vieler Gleichungen ausdehnen lässt, rührt von Liouville her. Man vergl. Serret, Algebra, Bd. I S. 495 der deutschen Uebersetzung.

2.

Den ersten strengen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, dass eine ganze Function n^{ten} Grades

$$\varphi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

n-mal verschwindet, gab Gauss* im Jahre 1799. Unter den späteren Beweisen ist besonders der Riemann'sche bemerkenswerth, der von der Untersuchung des Integrals

$$\int\limits_{(\infty)} \frac{d\varphi}{\varphi} = \int\limits_{(\infty)} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz$$

ausgeht. Da das Integral den Werth

$$2\pi i \lim^{z=\infty} \left[z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right] = 2\pi i . n$$

hat, so ist hiermit schon bewiesen, dass die Function $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, also auch $\frac{1}{\varphi(z)}$ für n im Endlichen gelegene Punkte von der ersten Ordnung unendlich gross wird.

Es liegt nahe, derartige Betrachtungen auf irrationale Functionen von z auszudehnen.

Seien $s_1, s_2, \ldots s_r$ als μ-deutige Functionen von z definirt durch die Gleichungen

$$1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(s_1, s_2, \ldots s_r, z) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_r(s_1, s_2, \ldots s_r, z) = 0. \end{array} \right.$$

Es soll nicht als bekannt vorausgesetzt werden, in welcher Weise die Zahl μ, d. h. die Zahl der Lösungen der Gleichungen 1) für beliebig gegebenes z, von den Ordnungen dieser Gleichungen abhängt. Die Ordnung von f_r sei n_r, d. h. für irgend ein Glied

$$c . s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_r^{\alpha_r} z^\beta$$

von f_r soll die Exponentensumme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r + \beta \leqq n_r$ sein; der Allgemeinheit wegen soll angenommen werden, dass auch alle Glieder, deren Exponentensumme dieser Bedingung genügt, in f_r vorkommen. Indessen können auch Glieder fehlen, ohne dass das Folgende zu gelten aufhört.

Unter

$$\varphi(s_1, s_2, \ldots s_r, z)$$

möge eine ganze Function m^{ter} Ordnung von z und den durch 1) definirten Irrationalitäten $s_1, \ldots s_r$ verstanden werden. Um zu untersuchen, für wieviele Punkte φ verschwindet, betrachte man das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\infty)} \frac{d\varphi}{\varphi}$$

auf alle μ Umgänge erstreckt. Zu den für die Integration wesentlichen Ausnahmepunkten gehören jedenfalls die Verschwindungspunkte der Func-

* Ueber die vor Gauss gemachten Versuche, den Satz zu erweisen, sowie auch über spätere Beweise vergl. man Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 87—98.

tion φ; ist $z^{(0)}$, $s_1^{(0)}, \ldots s_r^{(0)}$ ein solcher, so hat man für die nächste Umgebung desselben

$$\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^{(0)}(z - z^{(0)}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right)^{(0)}(s - s^{(0)}{}_1) + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_r}\right)^{(0)}(s - s^{(0)}{}_r)$$
$$= Const.\,(z - z^{(0)});$$

die um den Punkt $z^{(0)}$ in kleinem Kreise auszuführende Integration giebt also den Werth 1, und der von den Punkten $\varphi = 0$ herrührende Betrag des Integrals ist gleich der Anzahl dieser Punkte.

Bestimmt man aus den Gleichungen 7) des vorigen Paragraphen die $\frac{ds_1}{dz}, \ldots \frac{ds_r}{dz}$ und setzt die so erhaltenen Ausdrücke in die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\frac{ds_1}{dz} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial s_r}\frac{ds_r}{dz} + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so ergiebt sich

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{z\,\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}},$$

wo beide Determinanten durch ihr Diagonalglied angedeutet sind. Ein beliebiges der μ Integrale J ist hiernach gleich

$$2)\qquad \lim_{z=\infty} \frac{z\,\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\varphi . \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}}.$$

Für $z = \infty$ werden auch $s_1, \ldots s_r$ unendlich gross, und zwar der Art, dass $\frac{s_1}{z}, \ldots \frac{s_r}{z}$ endlich bleiben; man überzeugt sich hiervon am leichtesten, wenn man die Gleichungen 1) durch die jedesmalige höchste in ihnen vorkommende Potenz von z dividirt und dann $z = \infty$ setzt, was darauf hinauskommt, in f_λ von vornherein nur diejenigen Glieder beizubehalten, in welchen die Exponentensumme $= n_\lambda$ ist. Ebenso braucht man in φ nur die Glieder m^{ter} Dimension beizubehalten, weil für $z = \infty$, $s_1 = \infty, \ldots s_r = \infty$ alle übrigen Glieder gegen die beibehaltenen vernachlässigt werden können. Dadurch aber verwandeln sich $f_1, \ldots f_r$ in homogene Functionen, so dass die Gleichungen 1) durch die folgenden ersetzt werden können:

$$s_1\frac{\partial f_\lambda}{\partial s_1} + \ldots + s_r\frac{\partial f_\lambda}{\partial s_r} + z\frac{\partial f_\lambda}{\partial z} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots r).$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, den in 2) im Zähler stehenden Ausdruck umzuformen; fügt man den Factor z den Elementen der Reihe

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}, \ldots \frac{\partial f_r}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

hinzu und addirt darauf die mit $s_1, \dots s_r$ multiplicirten parallelen Reihen, so reducirt sich der Zähler auf die mit

$$z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + s_1\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} + \dots + s_r\frac{\partial \varphi}{\partial s_r}$$

multiplicirte Determinante des Nenners; der gesuchte Grenzwerth ist also m.

Zu den Unstetigkeitspunkten der zu integrirenden Function gehören ausser den Verschwindungspunkten von φ zwar noch die Punkte, für welche

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \dots \frac{\partial f_r}{\partial s_r}$$

Null wird; weil diese aber zugleich Verzweigungspunkte sind, kommen sie bei der Gesammtheit der Umgänge nicht in Betracht.

Da nun μ Umgänge vorhanden sind und jeder derselben, auf den Punkt $z = \infty$ zusammengezogen, den Beitrag m zu der Integration giebt, so ist

$$m \,.\, \mu$$

die Zahl der Verschwindungspunkte der Function φ.

Für $r = 1$ ist aber μ nach dem Gauss'schen Fundamentalsatze bekannt, nämlich $= n_1$; das soeben Bewiesene zeigt dann weiter, dass überhaupt die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen von r Gleichungen $n_1^{\text{ten}}, n_2^{\text{ten}}, \dots n_r^{\text{ten}}$ Grades

$$n_1 n_2 \dots n_r$$

beträgt.

Allgemeiner ist folgendes Problem. Die linken Seiten der Gleichungen

$$\text{3)} \quad \begin{cases} F_1 \quad (s_1, \dots s_\mu;\ \zeta_1, \dots \zeta_\nu) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_{\mu+\nu}(s_1, \dots s_\mu;\ \zeta_1, \dots \zeta_\nu) = 0 \end{cases}$$

sollen von einer etwas andern Beschaffenheit, als die in 1) betrachteten vorausgesetzt werden; es sollen nämlich für jedes Glied

$$c \,.\, s_1^{\alpha_1} \dots s_\mu^{\alpha_\mu},\ \zeta_1^{\beta_1} \dots \zeta_\nu^{\beta_\nu}$$

von F_λ die Bedingungen

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu \leqq m_\lambda, \quad \beta_1 + \dots + \beta_\nu \leqq n_\lambda$$

erfüllt sein, und es soll die allgemeine Annahme gemacht werden, dass die Glieder, deren Exponenten den beiden Bedingungen genügen, auch wirklich in F_λ vorkommen. — Gesucht wird die Zahl

$$\omega_{\mu,\nu}$$

der gemeinschaftlichen Lösungen des Systems 3), die offenbar nur von den Ordnungszahlen $m_1, n_1, \dots m_{\mu+\nu}, n_{\mu+\nu}$ abhängen kann.

Anstatt von den Gleichungen 3) gehe man von dem folgenden System aus:

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1\quad(s_1,\ldots s_\mu;\ \zeta_1,\ldots\zeta_\nu,\ z)=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ f_{\mu+\nu}(s_1,\ldots s_\mu;\ \zeta_1,\ldots\zeta_\nu,\ z)=0, \end{array}\right.$$

welche $s_1, \ldots s_\mu$, $\zeta_1, \ldots \zeta_\nu$ als $\omega_{\mu,\nu}$-deutige Functionen von z definirt, wenn f_λ die Ordnungszahlen m_λ, n_λ hat.

Die Zahl der Verschwindungspunkte einer ganzen Function

$$\varphi(s_1, \ldots s_\mu;\ \zeta_1, \ldots \zeta_\nu,\ z)$$

mit den Ordnungszahlen $m_{\mu+\nu+1}$, $n_{\mu+\nu+1}$ wird dann, der allgemeinen Bedeutung von $\omega_{\mu,\nu}$ zufolge, mit

$$\omega_{\mu,\,\nu+1}$$

zu bezeichnen sein. Um für diese Zahl einen andern Ausdruck zu erhalten, untersuche man wieder das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\infty)} \frac{d\varphi}{\varphi},$$

welches auf alle verschiedenen vollständigen Umgänge zu erstrecken ist. Zu den Unstetigkeitspunkten der zu integrirenden Function $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ gehören zunächst die $\omega_{\mu,\nu+1}$ Verschwindungspunkte von φ, deren jeder den Beitrag 1 zu dem Integral liefert.

Ferner aber können die s, also auch φ unendlich gross werden für endliche z. Man zeigt dies am leichtesten dadurch, dass man jede Gleichung $f_\lambda = 0$ des Systems 4) dividirt durch die höchste in ihr vorkommende Potenz eines der s, z. B. durch $s_\mu^{m_\lambda}$, und darauf diejenigen s, welche nicht in den Verbindungen $\frac{s_1}{s_\mu}, \ldots \frac{s_{\mu-1}}{s_\mu}$ auftreten, vernachlässigt; so ergeben sich $\mu+\nu$ Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_1\quad\left(\frac{s_1}{s_\mu}, \ldots \frac{s_{\mu-1}}{s_\mu};\ \zeta_1, \ldots \zeta_\nu,\ z\right)=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \psi_{\mu+\nu}\left(\frac{s_1}{s_\mu}, \ldots \frac{s_{\mu-1}}{s_\mu};\ \zeta_1, \ldots \zeta_\nu,\ z\right)=0, \end{array}\right.$$

durch welche die fraglichen Unstetigkeitspunkte bestimmt werden, deren Zahl mithin

$$\omega_{\mu-1,\nu+1}$$

beträgt. Da für diese Punkte $s_1, \ldots s_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung werden und φ die s im Grade $m_{\mu+\nu+1}$ enthält, also wie

$$\frac{C}{(z-z_0)^{m_{\mu+\nu+1}}}$$

unendlich wird, so ist der gesammte Beitrag, welchen die erwähnten Punkte für das Integral liefern,

$$-\, m_{\mu+\nu+1}\cdot\omega_{\mu-1,\nu+1}\cdot$$

Noch ist zu untersuchen der Betrag von J, um den Punkt $z = \infty$ erstreckt. Ein beliebiges der $\omega_{\mu,\nu}$ Integrale hat den Werth

$$5)\qquad \lim^{z=\infty} \frac{z\,\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_{\mu+\nu}}{\partial \zeta_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\varphi . \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial f_{\mu+\nu}}{\partial \zeta_\nu}}.$$

Dieser Grenzwerth lässt sich leicht ermitteln; man braucht nur in den f_λ und in φ alle ζ und z unendlich gross anzunehmen, oder alle Glieder, für welche die Exponentensumme $< n_\lambda$ ist, wegzulassen. In § 5 kann man, nachdem diese Vereinfachung der Ausdrücke f_λ und φ vorgenommen ist, das Zeichen *lim* fortlassen und die im Zähler stehende Determinante mit Hilfe der Gleichungen

$$\zeta_1 \frac{\partial f_\lambda}{\partial \zeta_1} + \cdots + \zeta_\nu \frac{\partial f_\lambda}{\partial \zeta_\lambda} + z \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} = n\ \ f_\lambda = 0$$

vereinfachen; es reducirt sich dadurch der Zähler von 5) auf das Product der im Nenner stehenden Determinante mit

$$\zeta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1} + \cdots + \zeta_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_\nu} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = n_{\mu+\nu+1} \cdot \varphi.$$

Der gesuchte Grenzwerth ist also $n_{\mu+\nu+1}$ für jeden der Umgänge. — Hiernach giebt die Vergleichung der beiden für ΣJ erhaltenen Zahlenausdrücke

$$n_{\mu+\nu+1} \cdot \omega_{\mu,\nu} = \omega_{\mu,\nu+1} - m_{\mu+\nu+1} \cdot \omega_{\mu-1,\nu+1}$$

oder

$$6)\qquad \omega_{\mu,\nu+1} = n_{\mu+\nu+1} \cdot \omega_{\mu,\nu} + m_{\mu+\nu+1} \cdot \omega_{\mu-1,\nu+1} \,.$$

Diejenigen ω, deren einer Index Null ist, welche sich also auf Gleichungen mit nur einer Reihe von Unbekannten beziehen, sind nach dem Vorigen bekannt, nämlich

$$\omega_{0,\nu} = n_1 n_2 \ldots n_\nu, \quad \omega_{\mu,0} = m_1 m_2 \ldots m_\mu .$$

Aus 6) erhält man für $\mu = 1$, $\nu = 0$, für $\mu = 1$, $\nu = 1$ u. s. w.

$$\omega_{1,1} = m_1 n_2 + m_2 n_1,$$

$$\omega_{1,2} = m_1 n_2 n_3 + m_2 n_1 n_3 + m_3 n_1 n_2;$$

$$\omega_{1,\nu} = m_1 n_2 n_3 \ldots n_{\nu+1} + m_2 n_1 n_3 \ldots n_{\nu+1} + \cdots + m_{\nu+1} n_1 n_2 \ldots n_\nu,$$

$$\omega_{2,\nu} = m_1 m_2 n_3 \ldots n_{\nu+2} + m_1 m_3 n_2 n_4 \ldots n_{\nu+2} + \cdots + m_{\nu+1} m_{\nu+2} n_1 n_2 \ldots n_\nu$$

und allgemein

$$7)\qquad \omega_{\mu,\nu} = m_1 \ldots m_\mu . n_{\mu+1} \ldots n_{\mu+\nu} + \cdots,$$

wo rechts nur ein Glied der aus

$$\frac{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu+1)}{1.2\ldots\nu}$$

Gliedern bestehenden Summe geschrieben ist. Der Beweis der Gleichung 7) ist sehr leicht durch Induction mit Hilfe der Gleichung 6) zu führen.

Wie sich die entsprechenden Untersuchungen für mehr als zwei Reihen von Unbekannten gestalten, möge nur noch kurz angedeutet werden.

Die Exponenten des allgemeinen Gliedes

$$c s_1^{\alpha_1} \dots s_\mu^{\alpha_\mu} \sigma_1^{\beta_1} \dots \sigma_\nu^{\beta_\nu} \zeta_1^{\gamma_1} \dots \zeta_\varrho^{\gamma_\varrho}$$

von

$$8) \quad F_\lambda(s_1 \dots s_\mu;\ \sigma_1 \dots \sigma_\nu,\ \zeta_1 \dots \zeta_\varrho) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots \mu + \nu + \varrho)$$

haben den drei Bedingungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu \leqq m_\lambda, \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu \leqq n_\lambda, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu \leqq p_\lambda$$

zu genügen; unter dieser Voraussetzung soll unter

$$\omega_{\mu,\nu,\varrho}$$

die von den m_λ, n_λ, p_λ abhängige Zahl der Lösungen des Systems 8) verstanden werden.

Man definire die s, σ, ζ als $\omega_{\mu,\nu,\varrho}$-deutige Functionen von z durch das System

$$f_\lambda(s_1, \dots s_\mu;\ \sigma_1, \dots \sigma_\nu;\ \zeta_1, \dots \zeta_\varrho,\ z) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots \mu + \nu + \varrho),$$

in welchem die Ordnungszahlen bez. dieselben sind, wie in 8); die Zahl der Verschwindungspunkte einer ganzen Function

$$\varphi(s_1, \dots;\ \sigma_1, \dots;\ \zeta_1, \dots \zeta_\varrho,\ z)$$

mit den Ordnungszahlen $m_{\mu+\nu+\varrho+1}$, $n_{\mu+\nu+\varrho+1}$, $p_{\mu+\nu+\varrho+1}$ ist dann

$$\omega_{\mu,\nu,\varrho+1}.$$

Die geschlossenen Wege des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\infty)} \frac{d\varphi}{\varphi}$$

zieht man einerseits um den Punkt $z = \infty$ zusammen und erhält

$$\omega_{\mu,\nu,\varrho} \cdot p_{\mu+\nu+\varrho+1},$$

wo der erste Factor die Zahl der Umgänge angiebt. Andererseits zieht man die Wege zusammen um die im Endlichen gelegenen Unstetigkeitspunkte der Function $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$. Es sind dieses erstens die $\omega_{\mu,\nu,\varrho+1}$ Punkte, für welche φ verschwindet und deren jeder den Beitrag 1 liefert; zweitens die $\omega_{\mu-1,\nu,\varrho+1}$ Punkte, für welche die s unendlich werden, also auch φ, und zwar von der Ordnung $m_{\mu+\nu+\varrho+1}$, unendlich wird; jeder dieser Punkte liefert den Beitrag

$$-m_{\mu+\nu+\varrho+1};$$

drittens die $\omega_{\mu,\nu-1,\varrho+1}$ Punkte, für welche die σ unendlich werden. Man erhält so die Recursionsformel

$$9) \quad \begin{aligned} \omega_{\mu,\nu,\varrho+1} = m_{\mu+\nu+\varrho+1} \cdot \omega_{\mu-1,\nu,\varrho+1} &+ n_{\mu+\nu+\varrho+1} \cdot \omega_{\mu,\nu-1,\varrho+1} \\ &+ p_{\mu+\nu+\varrho+1} \cdot \omega_{\mu,\nu,} \ . \end{aligned}$$

Sobald einer der drei Indices von ω Null ist, kommt man auf Ausdrücke, welche nach 7) bekannt sind; es hat daher keine Schwierigkeit, aus der Formel 9) den allgemeinen Ausdruck für $\omega_{\mu,\nu,\varrho}$ herzustellen.

Dass man in dieser Weise weiter gehen kann, liegt auf der Hand. Das allgemeine Ergebniss lässt sich wie folgt aussprechen:

Für die $\mu+\nu+\ldots+\tau$ Gleichungen

$$f_\lambda(s_1, \ldots s_\mu;\ \sigma_1, \ldots \sigma_\nu;\ \ldots;\ \zeta_1, \ldots \zeta_\tau) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \mu+\nu+\ldots+\tau),$$

welche in den s von der Ordnung m_λ, in den σ von der Ordnung $n_\lambda, \ldots$, in den ζ von der Ordnung t_λ sind, ist die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen gleich der Summe aller derjenigen aus μ Factoren m, ν Factoren n, ... τ Factoren t zu bildenden Producte, deren $\mu+\nu+\ldots+\tau$ Indices sämmtlich von einander verschieden sind.

3.

Unter den verschiedenen Beweisen des Abel'schen Theorems ist wohl der von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen, S. 127) gezeigte, welcher von dem Cauchy'schen Fundamentalsatze Gebrauch macht, der kürzeste. Es ist von Interesse, zu sehen, wie man diesen Beweis zu specialisiren hat, um die Additionstheoreme der elliptischen Integrale herzuleiten.

Sei $f(z)$ ein Polynom vierten Grades:

$$f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$$

mit lauter verschiedenen Verschwindungspunkten, so dass die Function

$$s = \sqrt{f(z)}$$

vier Verzweigungspunkte hat.

Das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\infty)} \left[log \frac{s - pz^2 - qz - r}{s - p'z^2 - q'z - r'} \right] \frac{dz}{s}$$

ist Null, weil die zu integrirende Function $f(z)$ der Bedingung

$$lim[z\,F(z)] = 0 \quad \text{für} \quad z = \infty$$

genügt und die Punkte, für welche die logarithmische Function unendlich gross wird, im Endlichen liegen. Diese letzteren Punkte sind die Wurzeln der Gleichungen

$$1) \qquad f(z) - (pz^2 + qz + r)^2 = 0,$$

$$2) \qquad f(z) - (p'z^2 + q'z + r')^2 = 0,$$

also kommen ausser den Verzweigungspunkten im Allgemeinen acht Unstetigkeitspunkte in Betracht. Durch geeignete Wahl von p, q, r, p', q', r kann man aber bewirken, dass vier Unstetigkeitspunkte wegfallen; man braucht nur die Annahme zu machen, dass die Gleichungen 1), 2) zwei

Wurzeln z', z'' gemeinschaftlich haben; für diese Punkte ist das Argument des Logarithmus endlich und von Null verschieden. Es bleiben dann nur noch vier Unstetigkeitspunkte z_0, z_1, z_2, z_3, und zwar mögen z_0, z_3 der Gleichung 1), z_1, z_2 der Gleichung 2) genügen. Da ein Punkt immer ein Werthepaar (z, s) repräsentirt, so soll hinsichtlich der Lage dieser Punkte noch die Voraussetzung gemacht werden, dass es geschlossene Linien giebt, welche z_0 und z_1 (bez. z_0 und z_3), aber keinen andern Ausnahmepunkt umgeben.

Das um z_0 und z_1 zu erstreckende Integral lässt sich in zwei zerlegen; der Werth des einen geht, etwa auf geradlinigem Wege, aus der Nähe von z_0 bis in die Nähe von z_1 und umkreist z_1; der des zweiten führt bis z_0 zurück. Da sich die logarithmische Function in der Nähe von z_1 wie

$$Const. + \log \frac{1}{z - z_1}$$

verhält, so darf zwar das um den Punkt z_1 in kleinem Kreise genommene Integral vernachlässigt werden, aber es ist wesentlich zu bemerken, dass sich der Logarithmus nach der Umkreisung von z_1 um $-2\pi i$ geändert hat. In z_0 verhält sich die logarithmische Function wie

$$Const. + \log(z - z_0),$$

nach der Umkreisung von z_0 erhält also der Logarithmus wieder einen um $2\pi i$ grössern Werth, d. h. ein Umlauf um beide Punkte lässt die logarithmische Function ungeändert. Bezeichnet L den veränderlichen Werth des Logarithmus für irgend einen Punkt des geradlinigen Weges, so ergiebt sich für die Summe der beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0}^{z_1} L \frac{dz}{s} + \int_{z_1}^{z_0} (L - 2\pi i)\frac{dz}{s}\right] = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{s}.$$

Ganz ebenso erhält man

$$\int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{s}$$

für denjenigen Bestandtheil von J, welcher von der die Punkte z_2 und z_3 umschliessenden Curve herrührt. Da andererseits $J = 0$, so hat man eine Beziehung zwischen zwei elliptischen Integralen:

$$\text{3)} \qquad \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} + \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = 0.$$

Es bietet sich jetzt die Aufgabe, die algebraische Relation herzustellen, welche zwischen den vier Grenzen bestehen muss.

Da die gesuchte Relation z' und z'' nicht enthalten darf, so kann man für z', z'' die beiden Punkte wählen, für welche

$$s - lz - m$$

noch verschwindet, wo l und m so bestimmt sind, dass dieser Ausdruck für $z = z_0$, $s = s_0 = \sqrt{f(z_0)}$, und für $z = z_3$, $s = s_3 = \sqrt{f(z_3)}$ Null wird.

Die Bedingung dafür, dass z', z'', z_1, z_2 [immer in Verbindung mit den zugehörigen Werthen von $\sqrt{f(z)}$, also bezw. mit s', s'', s_1, s_2] einer Gleichung

$$s - p'z^2 - q'z - r' = 0$$

genügen, ist

$$\begin{vmatrix} 1 & z' & z'^2 & s' \\ 1 & z'' & z''^2 & s'' \\ 1 & z_1 & z_1^2 & s_1 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Darstellung der entwickelten Determinante lässt sich vereinfachen, wenn man

4) $$\lambda = \frac{s_2 - s_1}{z_2 - z_1}, \quad \mu = \frac{z_2 s_1 - z_1 s_2}{z_2 - z_1}$$

setzt, d. h. λ und μ so bestimmt, dass

$$s - \lambda z - \mu$$

für z_1 und z_2 verschwindet. Der Bedeutung von l und m zufolge ist ferner

5) $$l = \frac{s'' - s'}{z'' - z'}, \quad m = \frac{z''s' - z's''}{z'' - z'}.$$

Die Entwickelung der Determinante giebt, nach Theilung mit $(z'' - z')(z_2 - z_1)$, wenn man Gleichungen wie

$$z'^2 s'' - z''^2 s' = (z' - z'')[lz'z'' + m(z' + z'')]$$

beachtet,

6) $$(z_1 + z_2 - z' - z'')(m - \mu) + (z_1 z_2 - z'z'')(l - \lambda) = 0.$$

Ganz ebenso findet man, wenn ζ_1, ζ_2 die beiden Punkte bezeichnen, in welchen $s - \lambda z - \mu$, ausser in z_1, z_2, noch verschwindet,

7) $$(z_0 + z_3 - \zeta' - \zeta'')(\mu - m) + (z_0 z_3 - z'z'')(\lambda - l) = 0.$$

Die Addition von 6) und 7) giebt wegen

$$z_0 + z_3 + z' + z'' = -\frac{D}{E} = z_1 + z_2 + \zeta' + \zeta''$$

die gesuchte Bedingung zunächst in der Form

8) $$z_0 z_3 + z'z'' = z_1 z_2 + \zeta' \zeta''.$$

Es bleibt übrig, $z'z''$ und $\zeta'\zeta''$ anders auszudrücken. Da z', z'', z_0, z_3 die Wurzeln der Gleichung

$$Ex^4 + Dx^3 + Cx^2 + \ldots - (lx + m)^2 = 0$$

sind, so hat man

$$z' + z'' = -\frac{D}{E} - (z_0 + z_3), \quad (z_0 + z_3)(z' + z'') + z_0 z_3 + z' z'' = \frac{C - l^2}{E},$$

woraus

$$z_0 z_3 + z' z'' = \frac{C - l^2}{E} + (z_0 + z_3)\left(\frac{D}{E} + z_0 + z_3\right).$$

In derselben Weise findet man

$$z_1 z_2 + \zeta' \zeta'' = \frac{C - \lambda^2}{E} + (z_1 + z_2)\left(\frac{D}{E} + z_1 + z_2\right).$$

Die Gleichung 8) verwandelt sich hiernach in

$$l^2 - D(z_0 + z_3) - E(z_0 + z_3)^2 = \lambda^2 - D(z_1 + z_2) - E(z_1 + z_2)^2$$

oder wegen der Bedeutung von l und λ aus 4) und 5)

$$\left(\frac{\sqrt{f(z_3)} - \sqrt{f(z_1)}}{z_3 - z_0}\right)^2 - D(z_0 + z_3) - E(z_0 + z_3)^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{f(z_2)} - \sqrt{f(z_1)}}{z_2 - z_1}\right)^2 - D(z_1 + z_2) - E(z_1 + z_2)^2.$$

Für $z_0 = 0$ erhält man hieraus das Additionstheorem für elliptische Integrale erster Gattung genau in der von Lagrange gefundenen Form.

Der directe Weg, aus

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 0$$

c algebraisch als Function von a und b herzuleiten, ist folgender. Man bestimmt λ und μ so, dass

$$s - \lambda z - \mu$$

für die Punkte a und b verschwindet; derselbe Ausdruck verschwindet dann noch für zwei Punkte α, β. Darauf sind p, q so zu bestimmen, dass

$$s - p z^2 - q z - 1$$

ausser für $(z = 0, s = 1)$ für α und β verschwindet; der vierte Verschwindungspunkt derselben Function ist der gesuchte c.

Hat $f(z)$ die Normalform

$$f(z) = R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2),$$

so sind a, b, α, β die Wurzeln der Gleichung

$$k^2 z^4 - (1 + k^2 + \lambda^2) z^2 - 2\lambda\mu z + 1 - \mu^2 = 0,$$

also ist

$$\alpha + \beta = -(a + b), \quad \alpha\beta = \frac{1 - \mu^2}{k^2 a b}. \tag{9}$$

Wegen $\sqrt{R(\alpha)} = \lambda\alpha + \mu$, $\sqrt{R(\beta)} = \lambda\beta + \mu$ ergiebt sich aus den beiden Bedingungen, welchen p und q zu genügen haben,

$$p = \frac{k^2 a b}{1 + \mu}, \quad q = \lambda + \frac{k^2 a b (a + b)}{1 + \mu}, \tag{10}$$

während λ und μ folgende Bedeutung haben:

$$11)\qquad \lambda = \frac{\sqrt{R(b)} - \sqrt{R(a)}}{b-a}, \quad \mu = \frac{b\sqrt{R(a)} - a\sqrt{R(b)}}{b-a}.$$

Da c eine Wurzel der Gleichung

$$R(z) - (pz^2 + qz + 1)^2 = 0$$

ist, so findet man mit Rücksicht auf die erste Gleichung 9)

$$c = a + b + \frac{2pq}{k^2 - p^2},$$

und nach Einsetzen der Ausdrücke 10)

$$12)\qquad c = \frac{(a+b)(1+\mu)^2 + k^2a^2b^2(a+b) + 2ab\lambda(1+\mu)}{1 - k^2a^2b^2 + 2\mu + \mu^2}.$$

Zur Abkürzung der noch erforderlichen Rechnung bemerke man, dass nach 11)

$$13)\ \begin{cases} \mu.\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right) = (a+b)(1-k^2a^2b^2), \\ 2ab\lambda\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right) = \left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right)^2 - (a+b)^2(1-k^2a^2b^2), \\ \qquad 2ab\lambda\mu\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right)^2 \\ = (a+b)\left[(1-k^2a^2b^2)\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right)^2 - (a+b)^2(1-k^2a^2b^2)\right]. \end{cases}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner in 12) mit

$$\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right)^2$$

und benutzt die Gleichungen 13), so fällt der Factor

$$\left[a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right]^2 + 2(a+b)\left(a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}\right) + (a+b)^2(1-k^2a^2b^2)$$

heraus und man erhält

$$14)\qquad c = \frac{a\sqrt{R(b)} + b\sqrt{R(a)}}{1 - k^2a^2b^2}.$$

Um für elliptische Integrale z w e i t e r Gattung das Additionstheorem herzuleiten, gehe man aus von dem Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\infty)} \left[\log\frac{s - pz^2 - qz - 1}{s - \lambda z - \mu}\right].\frac{1 - k^2z^2}{s}\,dz,$$

welches über beide Umgänge zu erstrecken ist; p, q, λ, μ haben wieder die in 10) und 11) angegebene Bedeutung.

Das auf den Punkt $z = \infty$ zusammengezogene Integral J ist in diesem Falle von Null verschieden; nach Satz II) ist dasselbe gleich dem Coefficienten von ζ in der Entwickelung von $F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ nach steigenden Potenzen von ζ, unter $F(z)$ die zu integrirende Function verstanden. Da

$$F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \left[\log\frac{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^2-\zeta^2)} - p - q\zeta - \zeta^2}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^2-\zeta^2)} - \lambda\zeta - \mu\zeta^2}\right].\frac{\zeta^2 - k^2}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^2-\zeta^2)}},$$

und die Entwickelung der Quadratwurzel nur gerade Potenzen von ζ liefert, so findet man leicht für den Coefficienten von ζ

$$\frac{\varepsilon k q - (\varepsilon k - p)\lambda}{\varepsilon k - p},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, und die Summe der beiden hieraus für $\varepsilon = +1$ und -1 entstehenden Ausdrücke ist

$$-2\lambda + \frac{2k^2 q}{k^2 - p^2},$$

was sich leicht auf die Form $k^2 abc$ bringen lässt. So folgt

$$\int_0^a \frac{1 - k^2 z^2}{s} dz + \int_c^b \frac{1 - k^2 z^2}{s} dz = k^2 abc,$$

wo a, b, c durch die Relation 14) verbunden sind.

Das Additionstheorem für Integrale dritter Gattung entspringt aus der Untersuchung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty)} \left[log \frac{s - pz^2 - qz - 1}{s - \lambda z - \mu} \right] \frac{dz}{(1 - k^2 \omega^2 z^2) s},$$

welches verschwindet, wenn der Integrationsweg um den Punkt $z = \infty$ zusammengezogen wird. Es sind hier vier neue, im Endlichen gelegene Unstetigkeitspunkte zu berücksichtigen, nämlich

$$z = \pm \frac{1}{k\omega}, \quad s = \pm \frac{\sqrt{R(\omega)}}{k\omega^2}.$$

Die Beiträge, welche diese Punkte für das Integral J liefern, sind nach Satz I) zu bestimmen:

$$\begin{aligned} &- \frac{\omega}{2\sqrt{R(\omega)}} log \frac{k\sqrt{R(\omega)} - p - kq\omega - k^2\omega^2}{k\sqrt{R(\omega)} - \lambda k\omega - \mu k^2 \omega^2} \\ &+ \frac{\omega}{2\sqrt{R(\omega)}} log \frac{k\sqrt{R(\omega)} + p + kq\omega + k^2\omega^2}{k\sqrt{R(\omega)} + \lambda k\omega + \mu k^2 \omega^2} \\ &+ \frac{\omega}{2\sqrt{R(\omega)}} log \frac{k\sqrt{R(\omega)} - p + kq\omega - k^2\omega^2}{k\sqrt{R(\omega)} + \lambda k\omega - \mu k^2 \omega^2} \\ &- \frac{\omega}{2\sqrt{R(\omega)}} log \frac{k\sqrt{R(\omega)} + p - qk\omega + k^2\omega^2}{k\sqrt{R(\omega)} - \lambda k\omega + \mu k^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck, der sich übrigens durch Zusammenziehen des ersten und dritten, sowie des zweiten und vierten Gliedes, und nach Einsetzen der Werthe von p, q, λ, μ bedeutend vereinfachen lässt, ist, bis auf das Vorzeichen, gleich der Summe der beiden Integrale dritter Gattung

$$\int_0^a \frac{dz}{(1 - k^2\omega^2)s} + \int_c^b \frac{dz}{(1 - k^2\omega^2)s}.$$

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Ueber eine Erweiterung der Mariotte und Gay-Lussac'schen Gesetze.

Die bisherigen Gleichungen, welche den obenerwähnten Gesetzen entsprechen, setzen auf beiden Seiten eine und dieselbe Gasart in verschiedenen Zuständen des Drucks, der Temperatur, des Volumens und der Dichtigkeit voraus und gestatten dadurch, eine oder die andere Grösse zu bestimmen, wenn die übrigen gegeben sind, oder es lassen sich mit denselben nur relative Bestimmungen für ein und dieselbe Gasart in verschiedenen Zuständen vornehmen. Verbindet man aber mit diesen Gesetzen noch ein anderes, so ergeben sich Gleichungen, welche auf den beiden Seiten die physikalischen Bestimmungsstücke verschiedener Gasarten enthalten können und welche, sobald die Gasart und eine hinreichende Zahl ihrer Bestimmungsstücke bekannt sind, unmittelbar die fehlende Grösse in absolutem Maasse bestimmen lassen, also z. B. sofort den Druck auf den Quadratcentimeter in Gewichten, wenn die Gasart oder ihr specifisches Gewicht, ihr absolutes Gewicht, ihr Volumen und ihre Temperatur gegeben sind. Im Nachfolgenden soll diese Erweiterung vorgenommen werden.

Die Hauptformeln des Mariotte'schen Gesetzes sind

$$p : p' = v' : v,$$

$$p : p' = d : d' \text{ und daraus } d : d' = v' : v,$$

wo p und p' die Drucke, v und v' die Volumina, d und d' die Dichtigkeiten eines und desselben Gases in zwei verschiedenen Zuständen, jedoch unter der Voraussetzung gleicher Temperatur bestimmen. Als Maass für die Dichtigkeit kann man das Gewicht der Volumeneinheit nehmen, so dass, wenn q das absolute Gewicht des Gases bezeichnet, $d = \frac{q}{v}$ im einen und $d = \frac{q}{v'}$ im andern Falle gesetzt werden kann.

Zu diesen Formeln tritt eine dritte hinzu, welche für verschiedene Gasarten und unter der Voraussetzung gleicher Dichtigkeit und gleicher Temperatur gilt. Der entsprechende Satz heisst:

Bei gleicher Dichtigkeit und Temperatur verhalten sich die Drucke zweier Gasarten wie umgekehrt ihre specifischen Gewichte,

oder es gilt, wenn s und s' die specifischen Gewichte der Gase bezeichnen, die Proportion

$$p : p' = s' : s.$$

Berücksichtigt man z. B., dass die specifischen Gewichte von Wasserstoff $= 1$ und Sauerstoff $= 16$ sagen: ein bestimmtes Volumen Sauerstoff wiegt bei gleichem Druck und gleicher Temperatur 16 mal soviel, als dasselbe Volumen Wasserstoff, so ergiebt sich, dass die Dichtigkeit des Sauerstoffs unter den gegebenen 16 mal so gross ist, als die des Wasserstoffs. Um daher den Sauerstoff auf gleiche Dichtigkeit mit dem Wasserstoff zu bringen, muss sein Volumen auf das 16 fache gebracht werden; dadurch wird aber bei gleich bleibender Temperatur sein Druck nur $\frac{1}{16}$ des Druckes vom gleich dichten Wasserstoff.

Im Allgemeinen kann man das Gesetz auf folgende Weise entwickeln. Hat man je ein Volumen v zweier Gasarten mit den specifischen Gewichten s und s', unter gleichem Druck p und gleicher Temperatur, so besteht für ihre absoluten Gewichte q und q' die Proportion

$$q : q' = s : s',$$

daraus folgt

$$\frac{q}{v} : \frac{q'}{v} = s : s',$$

$$d : d' = s : s',$$

wo d und d' wieder die Dichtigkeiten der zwei Gasarten bestimmen.

Wird hierauf die Dichtigkeit d' der zweiten Gasart bei gleichbleibender Temperatur durch Veränderung des Volumens v in v' und damit des Drucks p in p' auf die Dichtigkeit d gebracht, so gilt für die zweite Gasart allein nach oben die Proportion

$$p : p' = d : d'.$$

Aus den beiden letzten Proportionen folgt für die gleiche Temperatur und die gleiche Dichtigkeit d der zwei Gase das oben aufgestellte Resultat

$$p : p' = s' : s.$$

Um nun zweierlei Gasarten, von welchen die eine das specifische Gewicht s, das Volumen v, das absolute Gewicht q, also die Dichtigkeit $d = \frac{q}{v}$ hat und den Druck p ausübt, und beim andern s', v', q', d' und p' die analogen Grössen bezeichnen, mit einander unter der Voraussetzung gleicher Temperatur in Beziehung zu setzen, denken wir uns als Mittelglied eine dritte Gasmenge, welche aus der ersten Gasart besteht oder das specifische Gewicht s hat, auf die Dichtigkeit d' der zweiten Gasmenge gebracht ist und unter dem Druck p'' steht; man erhält dann für den Uebergang von der ersten zur dritten gleichartigen Gasmenge nach dem früheren Gesetze

$$p : p'' = d : d' \text{ oder } p'' = \frac{p d'}{d},$$

ferner für den Uebergang von der dritten Gasmenge zur zweiten nach dem letzten, gleiche Dichtigkeit voraussetzenden Gesetze

$$p' : p'' = s : s' \text{ oder } p'' = \frac{p' s'}{s},$$

daher für den Uebergang von der ersten zur zweiten Gasart

$$\frac{p\,d'}{d} = \frac{p' s'}{s} \text{ oder } \frac{p\,s}{d} = \frac{p' s'}{d'}.$$

Führt man das Volumen und Gewicht der Gase ein, so wird

$$\text{1)} \qquad \frac{p\,s\,v}{q} = \frac{p' s' v'}{q'}.$$

Für gleiche, aber sonst beliebige Temperaturen geben daher bei allen Gasen Druck mal specifisches Gewicht, mal Volumen, getheilt durch absolutes Gewicht, gleiche Grössen. Diese Grössen bleiben so lange constant, als die Temperatur dieselbe ist.

Nehmen wir zur Bestimmung dieser Constanten bei der Temperatur 0^0 atmosphärische Luft, so ist $s' = 14{,}5$ bei $p = 760$ mm Druck oder bei einem Druck von 1033 g auf den Quadratcentimeter, ferner ist dann das absolute Gewicht eines Kubikcentimeters = 0,0013 g und bei $v' = 1$ kcm $q' = 0{,}0013$ g zu setzen, dadurch wird

$$\frac{p'.s'.v'}{q'} = \frac{1033.14{,}5.1}{0{,}0013} = 11521923 \text{ oder rund } = 11522000.$$

Zu berücksichtigen ist bei Anwendung dieser Constanten, dass Druck und Gewicht in Grammen, Volumen in Kubikcentimetern auszudrücken sind und der Druck p sich auf den Quadratcentimeter bezieht. Würde man als Maasseinheit den Decimeter zu Grunde legen und daher den Kubikdecimeter und den Druck auf 1 Quadratdecimeter einführen, so wäre $\frac{p'.s'.v'}{q'} = 1152200$, dabei blieben p' und q' in Grammen ausgedrückt. Für den Meter als Maasseinheit erhielte man $\frac{p'.s'.v'}{q'} = 115220$. Hier sind immer für gleichartige Grössen dieselben Maasseinheiten eingeführt. Dies wäre an und für sich nicht nöthig; man könnte für Druck und Gewicht, sowie für die Fläche des Druckes und den Kubikinhalt der Gase verschiedene Einheiten wählen, z. B. für den Druck Kilogramme und für das Gewicht Gramme, für die Fläche den Quadratdecimeter und für den Kubikinhalt Kubikmeter, wenn nur diese Einheiten für jede Grösse bekannt sind und dann im andern Falle bei gleichartigen Grössen dieselben Einheiten verwendet werden. Wollte man als Druckeinheit den Atmosphärendruck einführen, als Kubikeinheit den Liter und als Gewichtseinheit das Gramm, so wäre $\frac{p'.s'.v'}{q'} = \frac{1.14{,}5.1}{0{,}0013} = 11156$. So oft dann die letztere Constante verwendet wird, sind die gleichartigen Grössen natürlich ebenfalls wieder auf die genannten Einheiten zu beziehen.

Setzt man diese Constante für die Temperatur $0^0 = C$, so hat man für irgend ein Gas bei der Temperatur 0^0 die Gleichung

$$2) \qquad \frac{p.s.v}{q} = C.$$

Aus dieser Gleichung können p, v, q oder s für die Temperatur 0^0 unmittelbar gefunden werden, wenn die drei anderen Grössen gegeben sind.

Für 20 g Kohlensäure, welche in einen Raum von 100 l eingeschlossen sind, erhält man als Druck auf den Quadratcentimeter bei 0^0, das specifische Gewicht $= 1{,}529$ angenommen,

$$p = \frac{C.q}{s.v} = \frac{11522000.20\,\mathrm{g}}{1{,}529.100000} = 1507\,\mathrm{g} = 1{,}46 \text{ Atm.};$$

ähnlich könnte das Gewicht q oder das Volumen v der Kohlensäure bestimmt werden, um einen bestimmten Druck derselben herbeizuführen.

Mit Hilfe der Gleichung 2) $p = \frac{C.q}{s.v}$ kann man der Constanten C eine bestimmte Bedeutung abgewinnen; setzt man nämlich $q =$ der Gewichtseinheit, z. B. $= 1$ g, und $v.s =$ der Raumeinheit, z. B. $= 1$ kcm, also $v = \frac{1}{s}$ kcm, so erscheint $C = 1152200$ g als Druck auf den Quadratcentimeter, wenn 1 g des Gases bei 0^0 auf einen Raum zusammengedrückt wird, der gleich dem sovielten Theile eines Kubikcentimeters ist, als das specifische Gewicht des Gases auf Wasserstoff $= 1$ bezogen angiebt. Natürlich wird hierbei vorausgesetzt, dass bei dieser Zusammendrückung das ursprüngliche Mariotte'sche Gesetz in Giltigkeit bleibt. Hätte man die Gleichung nach v aufgelöst, wäre man also von $v = \frac{C.q}{p.s}$ ausgegangen, so hätte man $v = C$ erhalten, wenn $q = 1$ und $p.s = 1$; z. B. $q = 1$ g und $p.s = 1$ g oder $p = \frac{1}{s}$ g gesetzt wird. In dem Falle wäre daher C das Volumen in Kubikcentimetern, auf das 1 g Gas bei 0^0 ausgedehnt werden müsste, damit der Druck auf den Quadratcentimeter $\frac{1}{s}$ g beträgt. Andere Bedeutungen würden dem C untergelegt werden können, wenn man die Hauptgleichung noch nach q oder s auflöst.

Auch die Gleichung 1) kann, je nachdem ihr die eine oder andere Form gegeben wird, in verschiedener Weise ausgesprochen werden; am einfachsten scheint dies geschehen zu können, wenn man ihr die Form

$$3) \qquad \frac{q}{pv} : \frac{q'}{p'v'} = s : s'$$

giebt. Ist nämlich v das Volumen eines Gases bei p Druck, so ist pv das Volumen bei unveränderter Temperatur und dem Drucke $= 1$, daher

$\frac{q}{p.v}$ die Dichtigkeit bei dem Drucke $=1$, und die Proportion giebt den Satz:

4) Die Dichtigkeiten zweier Gase verhalten sich bei gleichem Druck und gleicher Temperatur wie ihre specifischen Gewichte.

Dass der Satz auch für jede Temperatur gilt, wird insbesondere durch die Gleichheit des Ausdehnungscoefficienten für die verschiedenen Gase bedingt. Umgekehrt kann man, wie später noch gezeigt werden soll, unmittelbar aus dem Satze die Formel ableiten.

Die obige Gleichung für C gilt zunächst nur, wenn das Gas die Temperatur 0^0 hat. Besitzt dasselbe die Temperatur t und bleiben die übrigen Grössen dieselben, so kann man sofort eine neue Gleichung aufstellen, wenn man berücksichtigt, dass das Volumen bei 0^0 und unverändertem Drucke $=\frac{v}{1+\alpha t}$ ist, wo α den Ausdehnungscoefficienten gasförmiger Körper, also $\frac{1}{273}$ bezeichnet, und dass s und q durch eine solche Temperaturänderung nicht berührt werden. Es muss deshalb dann stattfinden

$$5)\qquad \frac{p.s.v}{q(1+\alpha t)}=C.$$

Das C ist das nämliche, als oben. Mit Hilfe dieser Gleichung kann man von den anderen darin vorkommenden Grössen irgend eine finden, wenn die anderen alle gegeben sind, unter anderen also auch den Druck in absolutem Maasse, den eine chemisch und physikalisch bestimmte Gasart oder ein Gasgemisch ausübt. Als Beispiel wollen wir wieder die oben bezeichneten 20 g Kohlensäure in einen Raum = 100 l eingeschlossen und mit einer Temperatur von 30^0 C. versehen annehmen; es findet sich dann der Druck p derselben auf den Quadratcentimeter

$$p=\frac{C.q.(1+\alpha t)}{s.v}=\frac{11522000.20.(1+\frac{1}{273}.30)}{1{,}529.100000}=1673\text{ g}=1{,}62\text{ Atm.}$$

Auch hier könnte man wieder bei gegebenem p nach q, v, s oder t auflösen und damit wieder andere Aufgaben durchführen.

Schreibt man die Gleichung 4) in der Form $\frac{psv}{q}=C(1+\alpha t)$, so giebt die rechte Seite den constanten Werth der Ausdrücke in 1) für die verschiedenen Gasarten. Er bleibt so lange derselbe, als t oder die Temperatur der verschiedenen Gase die nämliche ist. Da nach oben C dem Volumen von 1 g Gas bei 0^0 entspricht, wenn es so ausgedehnt wird, dass sein Druck $\frac{1}{s}$ g auf den Quadratcentimeter beträgt, so ist $C(1+\alpha t)$ das Volumen der nämlichen Gasmenge bei t^0 und unverändertem Drucke.

Für ein beliebiges zweites Gas erhält man auf dieselbe Art, wie in 4)

$$\frac{p's'v'}{q'(1+\alpha t')}=C$$

und daher für zwei Gasarten die Gleichung

$$6) \qquad \frac{psv}{q(1+\alpha t)}=\frac{p's'v'}{q'(1+\alpha t')}.$$

Sie lässt irgend eine der darin vorkommenden Grössen bestimmen, wenn die anderen gegeben sind, und gestattet deshalb, von den Zuständen einer Gasart auf die irgend einer andern zu schliessen. Ihr Unterschied dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze gegenüber und ihre Erweiterung besteht darin, dass auf beiden Seiten nicht blos dieselbe Gasmenge, sondern verschiedene Gasarten und Gasmengen sich befinden können. Man erhält sofort daraus das andere Gesetz, wenn man $q=q'$ und $s=s'$ setzt. Die Giltigkeit bleibt für alle gasförmigen Körper so lange bestehen, als dieselben dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze unterliegen.

Die Gleichung 6) ist, je nachdem sie auf die eine oder andere Form gebracht wird, der algebraische Ausdruck für folgende physikalische Sätze:

7) Gase, deren Dichtigkeiten den specifischen Gewichten proportional sind, üben bei gleicher Temperatur gleichen Druck aus;

8) Gase mit gleichen Dichtigkeiten üben bei gleichen Temperaturen Drucke aus, welche den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind.

Statt der Dichtigkeit kann man das absolute Gewicht und das Volumen der Gase einführen. Es kann dann Satz 7) verwandelt werden in:

9) Gase, deren absolute Gewichte den specifischen Gewichten proportional sind, üben bei gleichem Volumen und gleicher Temperatur gleichen Druck aus; oder

10) Gase, deren Volumina den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind, üben bei gleichem absoluten Gewicht und gleicher Temperatur gleiche Drucke aus;

während der Satz 8) übergehen kann in:

11) Gleiche Gewichtsmengen Gase, welche auf dasselbe Volumen gebracht werden, üben bei gleichen Temperaturen Drucke aus, welche den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind.

Jeder dieser Sätze kann zur unmittelbaren Herleitung der Gleichung 6) benützt werden. Am einfachsten scheint sie sich jedoch zu gestalten, wenn man dieser Gleichung die Form giebt:

$$12) \qquad \frac{q(1+\alpha t)}{pv}:\frac{q'(1+\alpha t')}{p'v'}=s:s'.$$

Hier stellt die Gleichung den Satz 4) oder 7) unter der Voraussetzung dar, dass die Temperatur der zwei Gase 0^0 und ihr Druck $=1$ ist. Man erhält dann die Gleichung durch folgende Betrachtung.

Ist v das Volumen beim Druck p, so ist pv das Volumen beim Druck 1, $\frac{pv}{1+\alpha t}$ das Volumen bei 0^0 und $\frac{q(1+\alpha t)}{pv}$ die Dichtigkeit beim Druck 1 und der Temperatur 0^0; $\frac{q'(1+\alpha t')}{p'v'}$ ist die nämliche Grösse für das andere Gas. Nach Satz 4) findet nun die Proportion 12) statt und aus ihr folgt die Gleichung 6).

Wird $t=t'$ gesetzt, so ergeben sich die Gleichungen 1) und 3); $t=t'=0$ führt auf 2); t' allein $=0$ angenommen, giebt in Verbindung mit 2) die Gleichung 5); für $q=q'$ und $s=s'$ erhält man das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.

Das Obige mag genügen, um nicht nur die leichte und anschauliche Herleitungsart, sondern auch die mannichfaltige Anwendbarkeit der oben gegebenen Formeln darzuthun.

Nürnberg. Prof. Dr. BIEHRINGER.

XXIV. Die Brennpunkte der Krümmungslinien des Ellipsoids.

Dreht sich eine Ellipse oder Hyperbel um die Axe, welche die Brennpunkte enthält, so entsteht ein verlängertes Drehungsellipsoid oder ein zweimantliges Drehungshyperboloid, und jeder Punkt dieser Flächen, also auch irgend einer Curve auf denselben, hat die Eigenschaft, dass die Summe oder Differenz seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten constant ist. Findet dagegen die Drehung um die andere Axe statt, so beschreiben die Brennpunkte Kreise, es entsteht ein abgeplattetes Drehungsellipsoid oder ein einmantliges Drehungshyperboloid, und jeder Punkt dieser Flächen oder irgend einer Curve auf denselben hat die Eigenschaft, dass die Summe oder Differenz seiner Entfernungen von den Endpunkten eines Durchmessers des Brennpunktkreises, der mit ihm in gleicher Meridianebene liegt, constant ist. Die Krümmungslinien des Ellipsoids liegen auf Rotationsflächen der genannten Art, wie im Folgenden nachgewiesen wird, also nehmen auch ihre Punkte an den angegebenen Eigenschaften Theil.

Es sei

$$1)\qquad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-\beta}+\frac{z^2}{\lambda-\gamma}=1$$

die Gleichung des Ellipsoids und der confocalen Hyperboloide (μ) und (ν), $\lambda>\gamma>\mu>\beta>\nu$, dann sind λ, μ, ν die drei Wurzeln der in λ kubischen Gleichung 1), also

$$2)\qquad \lambda+\mu+\nu=x^2+y^2+z^2+\beta+\gamma,$$

$$3)\qquad \mu\nu = \frac{\beta\gamma}{\lambda}x^2,$$

$$4)\qquad (\mu-\beta)(\nu-\beta) = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{\lambda-\beta}y^2,$$

$$5)\qquad (\mu-\gamma)(\nu-\gamma) = \frac{\gamma(\gamma-\beta)}{\lambda-\gamma}z^2.$$

Combinirt man nun der Reihe nach 2) mit 3), 4), 5), so findet man

$$2\mu = x^2+y^2+z^2+\beta+\gamma-\lambda \pm \sqrt{\left\{(x^2+y^2+z^2+\beta+\gamma-\lambda)^2-4\frac{\beta\gamma}{\lambda}x^2\right\}},$$

$$2(\mu-\beta) = x^2+y^2+z^2-\beta+\gamma-\lambda \pm \sqrt{\left\{(x^2+y^2+z^2-\beta+\gamma-\lambda)^2-4\frac{\beta(\beta-\gamma)}{\lambda-\beta}y^2\right\}},$$

$$2(\mu-\gamma) = x^2+y^2+z^2+\beta-\gamma-\lambda \pm \sqrt{\left\{(x^2+y^2+z^2+\beta-\gamma-\lambda)^2-4\frac{\gamma(\gamma-\beta)}{\lambda-\gamma}z^2\right\}}.$$

Verwechselt man die Zeichen vor der Quadratwurzel, so erhält man die Werthe von 2ν, $2(\nu-\beta)$, $2(\nu-\gamma)$. Betrachtet man in diesen Gleichungen μ (oder ν) als Constante, so stellen sie Drehungsflächen vor, auf welchen die Krümmungslinien (μ) oder (ν) liegen. Ihre Drehungsaxen sind die x-, y-, z-Axe und ihre Meridiancurven entsprechen den Gleichungen

$$6)\qquad \frac{x^2}{\dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu-\beta\gamma}} + z^2 = \lambda+\mu-\beta-\gamma,$$

$$7)\qquad \frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)}{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)+\beta(\gamma-\beta)}} + x^2 = \lambda+\mu-\gamma,$$

$$8)\qquad \frac{z^2}{\dfrac{(\lambda-\gamma)(\gamma-\mu)}{(\lambda-\gamma)(\gamma-\mu)+\gamma(\gamma-\beta)}} + y^2 = \lambda+\mu-\beta.$$

Um diese Curven zu discutiren, werden der Einfachheit wegen alle Werthe, welche die Grössen μ und ν zwischen γ und 0 annehmen können, mit μ bezeichnet.

Die Curve 6) entspricht für

$\lambda\mu > \beta\gamma$ verlängerten Drehungsellipsoiden,

$\lambda\mu = \beta\gamma$ einem Drehungscylinder,

$\lambda-\gamma = \beta-\mu$ einem Drehungskegel,

$\lambda\mu < \beta\gamma$ und zugleich $\lambda-\gamma > \beta-\mu$ einmantligen Drehungshyperboloiden,

$\lambda-\gamma < \beta-\mu$ (also auch $\lambda\mu < \beta\gamma$) zweimantligen Drehungshyperboloiden.

Hieraus folgt: Die Krümmungslinien (μ) und (ν), letztere bis zur Grenze $\nu = \frac{\beta\gamma}{\lambda}$, welche dem Drehungscylinder entspricht, haben zwei Brennpunkte, welche bei den ersteren zwischen den Hauptbrennpunkten β und

γ, und bei den anderen zwischen γ und ∞ liegen; letztere Grenze bezieht sich auf den Drehungscylinder. Die Krümmungslinien (ν) zwischen den Grenzen $\nu = \frac{\beta\gamma}{\lambda}$ und $\nu = \beta + \gamma - \lambda$, welche dem Drehungskegel angehört, haben keine reellen Brennpunkte auf der x-Axe, da sie auf einmantligen Drehungshyperboloiden liegen. Die Krümmungslinien (ν) zwischen den Grenzen $\nu = \beta + \gamma - \lambda$ und $\nu = 0$ haben zwei reelle Brennpunkte, für welche aber die Differenz der Entfernungen constant ist und die zwischen den Grenzen 0 und $\sqrt{\beta + \gamma - \lambda}$ enthalten sind.

Die Curve 7) entspricht für

$\mu > \beta$ abgeplatteten Drehungsellipsoiden,

$\mu = \beta$ dem Hauptschnitt in der xz-Ebene zwischen zwei Kreispunkten,

$\mu < \beta$ und zugleich $\beta - \mu < \frac{\beta(\gamma - \beta)}{\lambda - \beta}$ einmantligen Drehungshyperboloiden,

$\mu < \beta$ und $\beta - \mu = \frac{\beta(\gamma - \beta)}{\lambda - \beta}$ einem Drehungscylinder,

$\mu < \beta$ und $\beta - \mu > \frac{\beta(\gamma - \beta)}{\lambda - \beta}$ verlängerten Drehungsellipsoiden.

Also haben nur diejenigen Krümmungslinien, bei welchen die letzte Bedingung erfüllt ist oder die zwischen den Grenzen $\nu = \beta, \frac{\lambda - \gamma}{\lambda - \beta}$ und $\nu = 0$ eingeschlossen sind, wovon die erste dem Drehungscylinder entspricht, reelle Brennpunkte auf der y-Axe, für welche die Summe der Entfernungen constant ist. Sie liegen zwischen den Grenzen $\sqrt{\gamma - \beta}$ und ∞.

Diejenigen Krümmungslinien ν, welche den beiden Bedingungen genügen

$$\beta - \nu > \lambda - \gamma \text{ und } \beta - \nu > \frac{\beta(\gamma - \beta)}{\lambda - \beta}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\text{sowohl } \nu < \beta + \gamma - \lambda, \text{ als auch } \nu < \beta\frac{\lambda - \gamma}{\lambda - \beta} \text{ und } \nu > 0$$

liegen auf zweimantligen Drehungshyperboloiden der x-Axe und zugleich auf verlängerten Drehungsellipsoiden der y-Axe, d. h. sie haben zwei Paare von Brennpunkten; für die ersten, die auf der x-Axe liegen zwischen den Grenzen 0 und $\sqrt{\beta + \gamma - \lambda}$, ist die Differenz der Radien vectoren, und für die zweiten auf der y-Axe zwischen ∞ und $\sqrt{\gamma - \beta}$ ist die Summe derselben constant. Hierbei ist aber zu bemerken, dass die Krümmungslinie (ν), die auf dem Drehungscylinder der y-Axe liegt, mit keiner von den beiden anderen Krümmungslinien (ν), wovon die eine auf dem Drehungskegel und die andere auf dem Drehungscylinder der x-Axe liegt, zusammenzufallen braucht. Die Curven 8) entsprechen nur

abgeplatteten Drehungsellipsoiden, also liegen auf der z-Axe keine reellen Brennpunkte.

Alle Curven auf verlängerten Drehungsellipsoiden oder auf zweimantligen Drehungshyperboloiden haben Directrixebenen, die auf der Axe, welche die Brennpunkte enthält, senkrecht stehen und deren Abstand vom Mittelpunkte gleich dem Quadrat der grossen Halbaxe, dividirt durch die Brennpunktsdistanz ist, also ist dieser Abstand bei den Curven 6) und 7)

$$9)\quad \frac{\lambda\mu}{\sqrt{\beta\gamma}}\sqrt{\frac{\lambda+\mu-\beta-\gamma}{\lambda\mu-\beta\gamma}},\quad \frac{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)}{\sqrt{\beta(\gamma-\beta)}}\sqrt{\frac{\lambda+\mu-\gamma}{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)-\beta(\gamma-\beta)}}.$$

Die numerische Excentricität, gleich der Brennpunktsdistanz dividirt durch die grosse Halbaxe, ist

$$10)\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\lambda\mu}} \quad \text{und} \quad \varepsilon'=\sqrt{\frac{\beta(\gamma-\beta)}{(\lambda-\beta)(\mu-\beta)}}.$$

Jede Krümmungslinie mit reellen Brennpunkten hat also eine Directrixebene (beziehungsweise zwei), das Verhältniss der Entfernungen vom Brennpunkte und von der Directrixebene ist für alle Punkte einer Krümmungslinie constant und gleich ε oder ε'.

Der Satz von der Gleichheit der Winkel zwischen der Normale eines Punktes der Ellipse und Hyperbel und den beiden Brennstrahlen erweitert sich bei den Krümmungslinien dahin:

Die von einem Punkte der Krümmungslinie eines Ellipsoids nach ihren Brennpunkten gezogenen Radien vectoren bilden mit der Normalebene dieses Punktes (welche auf der Tangente desselben senkrecht steht) gleiche Winkel. Die Normalebene geht, wenn die Summe der Brennstrahlen constant ist, durch die Halbirungslinie ihres Winkels, und wenn die Differenz constant ist, durch die Halbirungslinie des Nebenwinkels.

Nimmt man den einen Brennpunkt eines Kegelschnitts zum Pol, die Hauptaxe zur Abscissenaxe und rechnet den Winkel ϑ vom nächsten Scheitel aus, so ist die allgemeine Kegelschnittsgleichung

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\vartheta};$$

r ist der Brennstrahl, p der Halbparameter gleich der Brennpunktsordinate und ε die numerische Excentricität, d. h. das Verhältniss von r zum Abstand des Punktes auf dem Kegelschnitte von der Directrix. Um diese Gleichung auf die Krümmungslinien anzuwenden, nehmen wir an, in dem Punkte M auf dem Ellipsoid, dessen Mittelpunkt O ist, schneiden sich die Krümmungslinien (μ) und (ν), F sei ein Brennpunkt von (μ) und F' der andere, die grosse Halbaxe des verlängerten Drehungsellipsoids, auf welchem μ liegt, sei $=\alpha$, so ist nach dem Obigen

$$MF+MF'=2\alpha \quad \text{oder} \quad r+r'=2\alpha.$$

Legt man durch F eine Ebene senkrecht zur x-Axe, auf welcher die Punkte F und F' liegen, so schneidet sie die Krümmungslinie (μ) in einem Punkte, dessen Abstand von F gleich dem Halbparameter p der Krümmungslinie ist. Da der Halbparameter einer Ellipse gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe, dividirt durch die grosse Halbaxe, ist, so findet man aus 6)

$$p = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \sqrt{\lambda+\mu-\beta-\gamma} \sqrt{\lambda\mu-\beta\gamma}.$$

Da x die Abscisse von M ist, so ist $\cos\vartheta = \frac{x - OF}{r}$, also $r = \frac{p}{1+\varepsilon\frac{x-OF}{r}}$

oder

$$r = \varepsilon(OF - x) + p;$$

nach 10) ist $\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\lambda\mu}}$, nach 6) $OF = \sqrt{\lambda+\mu-\beta-\gamma}\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\lambda\mu-\beta\gamma}}$ und nach 3) $x = \sqrt{\frac{\lambda\mu\nu}{\beta\gamma}}$. Hieraus findet man nach einigen Reductionen

$$11)\qquad r = \sqrt{\lambda+\mu-\beta-\gamma}\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{\lambda\mu-\beta\gamma}} - \sqrt{\nu}$$

oder

$$12)\qquad r = \alpha - \sqrt{\nu},\quad \text{ebenso}\quad r' = \alpha + \sqrt{\nu}$$

oder mit Worten:

Die Brennstrahlen einer Krümmungslinie sind gleich der Halbaxe des verlängerten Drehungsellipsoids (oder zweimantligen Drehungshyperboloids), auf dem sie liegt, $\pm$ der Halbaxe in der Richtung der x von der zweiten confocalen Fläche, welche durch den betreffenden Punkt der Krümmungslinie geht.

Reutlingen. Dr. O. Böklen.

XXV. Ueber die Normalen der Ellipse.

(Hierzu Taf. VII Fig. 4.)

Versteht man unter

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= a\cos\alpha, & y &= b\sin\alpha; \\ x' &= a\cos\gamma, & y' &= b\sin\gamma; \\ x'' &= a\cos\delta, & y'' &= b\sin\delta \end{aligned}$$

die Coordinaten von drei Punkten der Ellipse

$$2)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

so muss bekanntlich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \sin\alpha, & \cos\alpha, & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\gamma, & \cos\gamma, & \sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\delta, & \cos\delta, & \sin\delta\cos\delta \end{vmatrix}$$

verschwinden, sollen die in diesen Punkten auf die Ellipse errichteten Normalen durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Ebene gehen.

Eine einfache Rechnung ergiebt den Werth obiger Determinante in der Form

$$3)\qquad \begin{aligned}\Delta = 2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\\ \times\{\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\delta)+\sin(\gamma+\delta)\}\end{aligned}$$

und es erscheint somit, da das Product

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)$$

nicht Null werden kann, die schon von Burnside erkannte elegante Gleichung

$$4)\qquad \sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\delta)+\sin(\gamma+\delta)=0$$

als die eigentliche Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn drei Ellipsennormalen sich in einem Punkte schneiden.

Mit der Gleichung 4) verbindet sich die Lösung der Aufgabe, zu zwei Punkten der Ellipse einen dritten von solcher Eigenschaft zu finden, dass die Normale desselben durch den Schnittpunkt der Normalen der gegebenen Punkte geht.

Nachdem aber, wie zu ersehen ist, aus der erwähnten Gleichung zwei Werthe für je einen Winkel resultiren, so giebt es also zwei Punkte, welche gleichzeitig der gestellten Aufgabe genügen, was übrigens ganz natürlich ist, da ja im Allgemeinen vier Normalen von einem Punkte der Ebene aus auf eine Ellipse gefällt werden können.

Wenn man nun in der mit ab multiplicirten Gleichung 4) $a\cos\alpha$ durch x, $b\sin\alpha$ durch y ersetzt, dabei festhaltend, dass x und y nunmehr laufende Coordinaten zu bedeuten haben, so ist die auf diese Art neugebildete Form

$$5)\qquad bx(\sin\gamma+\sin\delta)+ay(\cos\gamma+\cos\delta)+ab\sin(\gamma+\delta)=0$$

offenbar die Gleichung einer Geraden und zwar, wie sofort einleuchtet, jener Geraden, deren Schnittpunkte mit der Ellipse eben die gesuchten Fusspunkte der Normalen sind.

Durch Einführung halber Winkel und mit Rücksicht darauf, dass

$$6)\qquad \frac{a\,Cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)}{Cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)}=u,\quad \frac{b\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)}=v$$

die Coordinaten des Poles der Geraden bedeuten, welche die Punkte γ und δ der Ellipse mit einander verbindet, erhält die Gleichung 5) die Gestalt

$$xv+yu+uv=0.$$

Die Gleichungen eines Sehnenpaares der Normalenfusspunkte sind demnach durch die Formen

$$7)\qquad b^2xu+a^2yv-a^2b^2=0,$$

$$8)\qquad xv + yu + uv = 0$$

dargestellt, in welchen die Grössen u, v die schon erwähnte Bedeutung haben.

Angenommen, es wären

$$\xi' = a\cos\alpha, \quad \eta' = b\sin\alpha;$$
$$\xi'' = a\cos\beta, \quad \eta'' = b\sin\beta$$

die Coordinaten jener Punkte, in welchen die Ellipse von der Geraden 8) geschnitten wird.

In diesem Falle müssen dieselben der soeben erwähnten Gleichung Genüge leisten, wodurch folgende Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$9)\quad \begin{aligned} &\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) + \sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) \\ &+ \sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) : \cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta) = 0, \\ &\cos\beta\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) + \sin\beta\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) \\ &+ \sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta) : \cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta) = 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraction folgt aus ihnen

$$\sin\left(\alpha + \frac{\gamma+\delta}{2}\right) = \sin\left(\beta + \frac{\gamma+\delta}{2}\right)$$

oder auch

$$10)\qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0.$$

Werden also unter α, β, γ, δ die excentrischen Winkel der Fusspunkte der Normalen verstanden, welche von einem Punkte der Ebene aus auf eine Ellipse gefällt werden können, so ist die Summe derselben eine constante Grösse und zwar gleich 180^0.

Durch vier Punkte α, β, γ, δ der Ebene lassen sich, zu je dreien zusammengefasst, vier von einander verschiedene Kreise legen, welchen resp. die Punkte α, β, γ; α, β, δ; α, γ, δ; β, γ, δ angehören.

Ein jeder von diesen vier Kreisen wird die Ellipse noch in einem weitern Punkte schneiden, und wenn wir der Reihe nach diese Punkte mit δ', γ', β', α' bezeichnen, so ergeben sich nach dem bekannten Satze, dass die Summe der excentrischen Winkel von vier Kreispunkten der Ellipse gleich Null ist, folgende Gleichungen:

$$11)\quad \begin{aligned} &\alpha+\beta+\gamma+\delta' = 0, \quad \alpha+\beta+\gamma'+\delta = 0, \\ &\alpha+\beta'+\gamma+\delta = 0, \quad \alpha'+\beta+\gamma+\delta = 0. \end{aligned}$$

In Verbindung mit 10) folgt aus ihnen

$$12)\quad \delta = 180^0 + \delta', \quad \gamma = 180^0 + \gamma', \quad \beta = 180^0 + \beta', \quad \alpha = 180^0 + \alpha'.$$

In Worten:

Je drei Normalenfusspunkte und der dem vierten diametral gegenüberliegende Punkt der Ellipse liegen auf einem Kreise.

Es hält nicht schwer, einen derartigen Kreis etwas näher zu bestimmen.

Angenommen, derselbe solle die Normalenfusspunkte α, β, γ enthalten, demzufolge also durch den Punkt $180+\delta$ der Ellipse gehen.

Man denke sich die Verbindungssehnen α, β und γ, $180+\delta$ hergestellt, dieselben halbirt und in den Halbirungspunkten Senkrechte auf die zugehörigen Sehnen errichtet; der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist dann natürlich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ohne Schwierigkeit erhält man für den Halbirungspunkt der Strecke α, β die Coordinatenwerthe

$$13)\qquad \xi_1 = -\frac{av}{2b}\sin(\gamma+\delta),\quad \eta_1 = -\frac{bu}{2a}\sin(\gamma+\delta),$$

und ebenso für jenen der Strecke γ, $180+\delta$ in ganz ähnlicher Weise

$$14)\qquad \xi_2 = -\frac{av}{2b}\sin(\gamma-\delta),\quad \eta_2 = \frac{bu}{2a}\sin(\gamma-\delta).$$

Die Gleichungen der Senkrechten sind dann

$$v\left\{y+\frac{bu}{2a}\sin(\gamma+\delta)\right\} - u\left\{x+\frac{av}{2b}\sin(\gamma+\delta)\right\} = 0,$$

$$v\left\{y-\frac{bu}{2a}\sin(\gamma-\delta)\right\} + u\left\{x+\frac{av}{2b}\sin(\gamma-\delta)\right\} = 0,$$

aus welchen die Coordinaten des Kreismittelpunktes in der Form

$$\xi_0 = -\frac{c^2v}{2ab}\sin\gamma\cos\delta,\quad \eta_0 = \frac{c^2u}{2ab}\cos\gamma\sin\delta$$

resultiren.

Berücksichtigt man aber, dass die Coordinaten des gemeinschaftlichen Normalenschnittpunktes, welche wir z. B. mit g, h bezeichnen wollen, durch die Werthe

$$17)\qquad g = \frac{c^2u}{a^2}\cos\gamma\cos\delta,\quad h = -\frac{c^2v}{b^2}\sin\gamma\sin\delta$$

dargestellt werden können, so lassen sich durch Substitution derselben in 16) diese Gleichungen wesentlich vereinfachen, indem nämlich aus denselben der Winkel γ vollständig verschwindet.

Man erhält

$$18)\qquad 2\xi_0 = \frac{b}{a}\operatorname{cotg}\delta\,.\,h,\quad 2\eta_0 = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\delta\,.\,g$$

und gelangt zu folgender Construction:

Von dem Punkte $P(g,h)$, welcher in der Ebene der aus den Halbaxen a, b construirten Ellipse gegeben ist, sollen die Normalen auf diese Curve gefällt werden, wenn eine derselben, MP, bekannt ist.

Man lege (Fig. 4) durch den dem Fusspunkte M diametral gegenüberliegenden Punkt $M'(180+\delta)$ die zur gegebenen parallele Normale und bringe dieselbe mit einer Geraden zum Schnitte, welcher der Punkt P angehört und deren Richtungsconstante den negativen Werth der Rich-

tungsconstante der Normale hat; der Schnittpunkt, resp. die Coordinaten des Schnittpunktes haben die in 18) angeführten Werthe, wie sich leicht zeigen lässt.

Prag, im Juli 1881. KARL LAUERMANN.

XXVI. Note über Discontinuitäten bei Curven.

(Hierzu Taf. VII Fig. 5—10.)

Herr J. Plateau hat in zwei Mittheilungen an die belgische Akademie, betitelt: „Quelques exemples curieux de discontinuité en analyse" (Bull. de l'Academie royale de Belgique, XLIII, 1877), auf gewisse Discontinuitäten bei Functionen einer reellen Veränderlichen aufmerksam gemacht, die er durch geschlossene Ausdrücke, in welche nur algebraische und trigonometrische Functionen eingehen, darstellen zu können glaubt. Dabei ist ihm jedoch ein Fehler untergelaufen, der auch Herrn Mansion, welcher im „Bulletin des sciences mathématiques" (1878, t. II) darüber referirte, entgangen ist und den ich im Folgenden berichtigen möchte. Er ersetzt nämlich, wenn $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve ist, die im Punkte $x = a$ einen Doppelpunkt hat, y durch $y - \cos\sqrt{a-x}$ und ist der Meinung, dass dadurch in der so modificirten Curve die Punkte, für welche $x > a$ ist, imaginär werden, und dass also an Stelle des Doppelpunktes eine Ecke *(point saillant)* entsteht. Da aber der Cosinus eines rein imaginären Arguments reell ist, so sind die dort erhaltenen Resultate nicht richtig, vielmehr haben die l. c. betrachteten Curven [z. B. $y = m \cos\sqrt{a-x} + n(a-x)^{3/2}$, abgeleitet aus $y = n(a-x)^{3/2}$] durchaus keine aussergewöhnlichen Singularitäten.

Man kann jedoch die von Herrn Plateau gemeinten Discontinuitäten im Curvenlauf erzeugen, wenn man eine Function hat, die im Punkte $x = a$ eine wesentliche Unstetigkeit besitzt. Als solche bieten sich von den elementaren Functionen zunächst der Logarithmus und die Exponentialfunction dar. Z. B. die Curve $y = \frac{(x-a)^n}{\log(x-a)}$, wo n eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, hört im Punkte $x = a$ auf. Ersetzt man also, um die Sache gleich an einem Beispiel zu erläutern, in der Gleichung der Curve $y = x\sqrt{a-x}$, welche im Punkte $x = 0$, $y = 0$ einen Doppelpunkt hat, y durch $y - \frac{x^n}{\log x}$, so sind bei der dadurch entstehenden Curve

$$y = \frac{x^n}{\log x} + x\sqrt{a-x}$$

die Punkte, deren Abscissen negativ sind, imaginär; da aber der Differentialquotient für $x = 0$ den Werth $\pm\sqrt{a}$ hat, so besitzt die Curve in

jenem Punkte eine Ecke. (Fig. 5 auf Taf. VII stellt die Curve $y = \frac{x^3}{\log x}$ zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ dar, Fig. 6 die Curve $y = x\sqrt{a - x}$, aus beiden ergiebt sich die Gestalt von $y = \frac{x^3}{\log x} + x\sqrt{a - x}$, welche aus Fig. 7 ersichtlich ist.)

Eine andere Function, welche dasselbe leistet, ist $y = x^\nu$, wenn ν eine irrationale Zahl > 1 ist. Diese Function liefert für jeden positiven Werth von x einen reellen Werth für y; negative x liefern imaginäre y; die Curve hat also einen im Coordinatenanfang beginnenden Zug (Fig. 8 für $\nu = \sqrt{2}$). Ersetzt man nun z. B. in der Gleichung der Curve $x = y^2\left(1 + \sqrt{1 - y}\right)$, welche im Coordinatenanfang einen Selbstberührungspunkt hat (Fig. 9), y durch $y + x^{\sqrt{2}}$, so verschwinden die Punkte, deren Abscissen negativ sind, und die neue Curve (Fig. 10)

$$x = \left(y - x^{\sqrt{2}}\right)^2\left(1 + \sqrt{1 - y + x^{\sqrt{2}}}\right)$$

bildet eine „Schlinge“, d. h. sie hat einen Punkt, in welchem sich ein reeller Zug in zwei solche spaltet *(point de dédoublement)*.

Es leuchtet ein, dass man vom obigen Princip Gebrauch machend beliebige Curven in mannigfachster Weise deformiren kann. Allgemein kann man solche transcendente Functionen dazu verwenden, welche auf der reellen Axe einen wesentlich singulären Punkt der Art besitzen, dass die Annäherung an denselben auf der reellen Axe von beiden Seiten verschiedene Werthe liefert, von denen wenigstens einer reell ist.

Durch trigonometrische Functionen oder durch Combinationen einer endlichen Anzahl derselben ist man nicht im Stande, solche Unstetigkeiten zu erzeugen.

München, im Juni 1881. Dr. Peter Vogel.

XXVII. Beweis eines Weierstrass'schen Satzes.

Wenn man aus den beiden quadratischen Formen

$$\varphi = \Sigma a_{ik}\, x_i x_k, \quad \psi = \Sigma b_{ik}\, x_i x_k$$

mit Hilfe eines unbestimmten Factors s die neue Form $s\varphi - \psi$ bildet und die als Function von s betrachtete Determinante der letzteren mit f bezeichnet, so hat die Gleichung $f = 0$ nur reale Wurzeln, sobald eine der Formen, etwa φ, definit ist. (Vergl. Baltzer, Determin., § 14.) Unter derselben Voraussetzung gilt aber auch, wie Herr Weierstrass bewiesen hat (zuerst Berl. Monatsbericht 1858, S. 207), der Satz, dass eine $(l+1)$-fache Wurzel der Gleichung $f = 0$ zugleich eine gemeinschaftliche Wurzel aller Gleichungen $\partial^l f = 0$ ist, worin $\partial^l f$ eine beliebige

Unterdeterminante l^{ter} Ordnung $[(n-l)^{\text{ten}}$ Grades] von f bezeichnet. Der Beweis dieses Satzes kann unmittelbar aus der Form der Differentialquotienten $f', f'', \ldots$ von f nach s abgeleitet werden. Bezeichnet man nämlich mit f_{ik} die ersten Unterdeterminanten von f, so bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$1) \qquad \begin{vmatrix} f_{ir} & f_{is} \\ f_{kr} & f_{ks} \end{vmatrix} = f \cdot \partial^2 f,$$

$$2) \qquad \begin{vmatrix} f_{ir} & f_{is} & f_{it} \\ f_{kr} & f_{ks} & f_{kt} \\ f_{lr} & f_{ls} & f_{lt} \end{vmatrix} = f^2 \cdot \partial^3 f$$

u. s. w., worin $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ... bekannte Unterdeterminanten von f sind. Nun lässt sich, da $f_{ik} = f_{ki}$ ist, in

$$f' = \Sigma a_{ik} f_{ik}$$

die rechts stehende Summe zufolge der Gleichung 1) als eine quadratische Form darstellen, sobald man für s eine Wurzel der Gleichung $f=0$ substituirt. Ist also φ eine definite Form, so kann für diesen Wurzelwerth nur dann zugleich $f'=0$ sein, wenn alle f_{ik} verschwinden. Ist ferner für denselben Werth von s ausser f, f', f_{ik} auch noch $f''=0$, so ergiebt sich nach 2-, 3-, ...-maliger Differentiation von 1), 2), ... nach s, dass jetzt auch die aus den Elementen f'_{ik} gebildeten partialen Determinanten vom 2., 3., ... Grade verschwinden. Demnach ist nun auch die Summe

$$f'' = \Sigma a_{ik} f'_{ik}$$

eine quadratische Form, die nur mit allen f'_{ik} zugleich verschwinden kann. Das hat aber, wie eine dreimalige Differentiation von 1) lehrt, auch das Verschwinden der $\partial^2 f$ zur Folge.

Es ist leicht ersichtlich, wie dieses Schlussverfahren fortgesetzt werden kann, und dass man allgemein zu dem Resultate gelangt: wenn für eine Wurzel der Gleichung $f=0$ zugleich die Reihe von Grössen f', f_{ik}, f'', f'_{ik}, ... $f^{(l)}$ verschwindet, so geht aus den Gleichungen 1), 2), ... nach je $2(l-1), 3(l-1), \ldots$-facher Differentiation hervor, dass für denselben Werth von s auch die partialen Determinanten des Systems der $f_{ik}^{(l-1)}$ vom 2., 3., ... Grade sämmtlich gleich Null sind, und da

$$f^{(l)} = \Sigma a_{ik} f_{ik}^{(l-1)}$$

ist, so muss auch $f_{ik}^{(l-1)} = 0$ sein, woraus schliesslich nach $(l+1)(l-1)$-facher Differentiation der Gleichung $(l-1)$ folgt, dass alle Unterdeterminanten l^{ter} Ordnung $\partial^l f$ ebenfalls verschwinden. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Münster. Dr. H. Hovestadt.

XXVIII. Beitrag zur Kenntniss des Asteroidensystems.

Von Dir. Hornstein in Prag.

Der Verfasser gelangt zu folgenden Resultaten:

1. Theilt man die ganze Breite der Zone, innerhalb welcher die grossen Axen der Asteroidenbahnen liegen, von $a = 2{,}10$ bis $a = 4{,}00$, in kleine Intervalle von 0,02 Breite, und construirt die Curve der relativen Häufigkeit der Asteroiden in diesen Intervallen, so zeigt die so entstehende Curve 21 Minima (oder Unterbrechungen), von denen die meisten auf Werthe von a fallen, für welche die Umlaufszeit mit der Umlaufszeit Jupiters, Saturns oder Mars' in einem rationalen Verhältnisse steht und die man singuläre Werthe von a nennen kann. — Die mittlere Häufigkeit der Asteroiden fällt auf $a = 2{,}70$, und es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, dass dieser Werth sehr nahe die Stelle bezeichnet, wo nach dem von Wurm modificirten (sogenannten) Titius-Bode'schen Gesetze der zwischen Mars und Jupiter fehlende Planet stehen sollte.
2. Theilt man die Asteroidenzone von $a = 2{,}10$ bis $a = 4{,}00$ in Intervalle von 0,01 Breite und construirt wieder die Häufigkeitscurve, so zeigt letztere schon 34 Minima. Von 52 der wichtigeren singulären Werthe von a, welche bezüglich Jupiter, Saturn und Mars in die graphische Darstellung aufgenommen sind, fallen 49 auf Minima selbst oder liegen denselben äusserst nahe. Bei Anwendung mittlerer Elemente der Asteroidenbahnen statt der berührenden Ellipsen, wie sie gegenwärtig berechnet werden, dürften vielleicht sämmtliche singuläre Werthe, welche überhaupt noch zu berücksichtigen sind, auf Minima fallen.
3. Trägt man endlich, um noch eine andere Darstellung zu wählen, auf einem schmalen Streifen von bedeutender Länge die mittleren Entfernungen der einzelnen Asteroiden auf und notirt zugleich die singulären Werthe von a, für welche die Umlaufszeit gleich wäre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ u. s. w. bis $\frac{13}{20}$ der Umlaufszeit Jupiters, so fallen die meisten dieser Werthe auf asteroidenleere Räume des Streifens.

Es gewinnt immer mehr an Wahrscheinlichkeit, dass sich hier ein wirkliches Naturgesetz, eine neue schöne Bestätigung der Newton'schen Attractionstheorie zu erkennen giebt.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. 1881, XIV.)

XXIX. Meteorologisches.

1. Es ist eine erwiesene Thatsache, dass bei einzelnen Niederschlägen die Regenmenge mit der Erhebung über der Bodenfläche abnimmt und dass sich schon bei geringen Höhenunterschieden erhebliche Differenzen ergeben. Man hat zur Erklärung dieser Erscheinung darauf aufmerksam gemacht, dass sich bei der Bewegung der kälteren Regentropfen durch die unteren, dem Sättigungspunkte nahen und dazu wärmeren Dampfschichten auf den Tropfen Wasserdämpfe niederschlagen und sie vergrössern müssen. Indessen findet die Bewegung zu schnell statt und ist damit noch eine Verdunstung des Wassers verknüpft, als dass die angegebene wesentliche Vermehrung der Regenmenge hierdurch hervorgerufen werden könnte. Eine Vergleichung der Resultate zweier hiesiger Regenmesser, die in verschiedenen Höhen liegen, hat mit Berücksichtigung der übrigen localen Verhältnisse ergeben, dass die Ursache der Erscheinung hauptsächlich mechanischer Natur ist. Durch das Aufschlagen der Regentropfen wird nämlich ein Theil derselben zerstäubt und dadurch der untere Theil der Atmosphäre mit feinen, in der Luft herumschwimmenden Wasserstäubchen und Wasserbläschen gefüllt, welche bei heftigen Platzregen einen sichtbaren Nebel bilden. Beim Bewegen der Regentropfen in diesem Sprühregen werden einestheils dieselben durch directe Aufnahme der Stäubchen, die sich auf dem Wege befinden, vergrössert, anderntheils kann diese Region selbstständig Niederschläge ergeben und dadurch die Regenmenge vermehren. Es ist also gewissermassen ein wiederholtes Niederfallen eines Theils der Regenmenge, das vorwiegend die Zunahme der gemessenen Regenhöhe in den verschiedenen Abständen von der Erdoberfläche bedingt. Damit im Zusammenhange steht, dass die fraglichen Unterschiede bei heftigen Platzregen, dann in der Nähe von Bäumen und Gebäuden, welche den Regen mehr zerstäuben, am bedeutendsten sind, und dass sie für gleiche Höhendifferenzen um so geringer sein müssen, je entfernter die Beobachtungspunkte vom Boden sind. Endlich liegt hierin auch eine der Hauptursachen, dass sich in waldigen Gegenden höhere Niederschläge ergeben, als ausserhalb derselben.

2. An windstillen und insbesondere klaren Tagen stellt sich zur Zeit des Sonnenaufgangs in auffallender Weise ein Ostwind ein, der nach einiger Zeit wieder verschwindet. Diese Erscheinung hat aus dem Grunde etwas Ueberraschendes, weil durch die vorausgehende stärkere Erwärmung der östlicher gelegenen Gegenden daselbst ein aufsteigender Luftstrom erzeugt wird und daher eher die Entstehung eines Westwindes vermuthet werden sollte. Der Grund der gegentheiligen Erscheinung scheint in Folgendem zu liegen. Um die Zeit des Sonnenaufgangs und noch nach derselben stellt sich am Boden die niedrigste Temperatur ein,

weil die Ausstrahlung von Wärme am längsten gedauert hat, weil diese Ausstrahlung auch noch nach Sonnenaufgang die von der Sonne herabkommende Wärme übertrifft und weil namentlich bei klaren Tagen zuerst nur die oberen Luftschichten von den Sonnenstrahlen getroffen und die etwa dort vorhandenen Wolkenschleier aufgelöst werden. Diese Auflösung erhöht nämlich die Durchsichtigkeit der Luft und vermehrt die Wärmeausstrahlung des Bodens. Mit der Abkühlung des Bodens steht unmittelbar eine Thau-, Reif- oder Nebelbildung in Verbindung, oder das Verschwinden eines grossen Theiles des unten befindlichen Wasserdampfes der Luft und seiner Spannung, und daher eine Verminderung des Luftdrucks. Die bei dieser Verdichtung des Wasserdampfes frei werdende Wärme verhindert ferner die Abkühlung der übrigen Luft, welche mit dem Boden in Berührung kommt, und kann sogar eine Temperaturerhöhung, damit ein Ausdehnen und Aufsteigen derselben und also eine zweite Verminderung des Luftdrucks hervorrufen. Endlich wird dann infolge dieses aufsteigenden Luftstroms von anderen Stellen her wieder dichtere und feuchte Luft zuströmen, dieselbe abermals ihren Wasserdampf verlieren und so sich der oben beschriebene Vorgang wiederholen. Es ist hieraus klar und ausserdem durch die Erfahrung bewiesen, dass um die Zeit des Sonnenaufgangs im Durchschnitt ein Minimum des Luftdrucks vorhanden ist und dass also die den Luftdruck vermindernden Ursachen die gegentheilig wirkenden überwiegen. Dieses Minimum des Luftdrucks schreitet nun mit dem Aufgang der Sonne nach Westen fort und bedingt deshalb auf seiner hintern Seite unsern Ostwind. Ob die Erfahrung auch zeigt, dass dem Ostwind voran ein Westwind weht, d. h. ein Wind, der der vordern Seite des wandernden Minimums angehört, ist nicht bekannt. Theoretisch kann auf sein Vorhandensein nicht geschlossen werden, da das Minimum des Luftdrucks mit der Sonne so rasch nach Westen, also dem Westwind entgegen wandert, dass die Möglichkeit der Entstehung des letzteren auch ausgeschlossen sein kann.

3. Nachdem die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen mehr und mehr das allgemeinste Interesse erregen, so scheint es angemessen zu sein, dieselben in einer Art zu veröffentlichen, dass sie möglichst ohne Commentar verständlich sind. Eine Bestimmung, welche der letztgenannten Forderung nicht genügt, ihr aber leicht angepasst werden kann, ist die des G r a d e s d e r B e w ö l k u n g. Bekanntlich kann man denselben erhalten, wenn man sich den Himmel in zehn Theile getheilt denkt und ihn gleich der Zahl setzt, welche angiebt, wieviel von diesen Theilen die Gesammtsumme aller am Himmel befindlichen Wolken ausmacht. Jemand, der diese Theilung nicht kennt, weiss nun nicht, was er sich z. B. unter einer Wolkenbedeckung = 6 denken soll; dagegen wird die Angabe sofort verständlich, wenn sie in Form eines Bruches

gegeben und der vollständig bedeckte Himmel = 1 gesetzt wird. Die der vorigen Angabe entsprechende neue: die Wolkenbedeckung beträgt 0,6 des Himmels, versteht Jedermann ohne weitere Auseinandersetzung, und Jeder kann auch unmittelbar hiermit eine bestimmte Vorstellung verknüpfen. Die Sache hat aber auch für die Beobachtung selbst eine praktische Seite, da wir viel leichter im Stande sind, halbe, Drittels- und Viertelswerthe abzuschätzen, als Zehntel, und leichter dann die ersten Resultate auf Zehntel überführen. Man kann nun zwar diese Bestimmungsart auch mit der bisherigen Bezeichnungsweise des Bewölkungsgrades verbinden, indessen nicht ohne eine gewisse Künstelei, die manchen sonst recht tüchtigen Beobachter genirt und den Leser an einer richtigen Vorstellung hindert. Es dürfte sich deshalb empfehlen, die Wolkenbedeckung in der oben angedeuteten Weise durch Decimalbrüche statt durch ganze Zahlen zu bestimmen.

4. Die Vergleichung der Beobachtungsresultate der hiesigen meteorologischen Station in den Jahren 1879 und 1880 hat zu Ergebnissen geführt, die von allgemeinerer Bedeutung zu sein scheinen, weil sie die Möglichkeit geben, einige meteorologische Mittelwerthe durch Beobachtungen zu bestimmen, die nur einmal des Tages anzustellen sind. So wie an allen grösseren bayrischen Stationen, sind auch hier die Beobachtungszeiten Morgens 8 Uhr, Mittags 2 Uhr und Abends 8 Uhr.

Es hat sich nun zunächst ergeben, dass das barometrische Jahresmittel aus allen drei Beobachtungen mit dem der Beobachtungen Abends 8 Uhr fast vollständig übereinstimmt und dass deshalb das erstere Mittel mit Hilfe des letzteren, also mit Hilfe einer einzigen täglichen Beobachtung mit grosser Genauigkeit bestimmt werden kann. Die hierher gehörigen Beobachtungsresultate waren nämlich, in Millimeter und auf 0° reducirt:

	1879.		1880.	
	Mittel:	Abds. 8 U.:	Mittel:	Abds. 8 U.:
Januar . .	733.65	734,01	742,68	742,90
Februar . .	723,81	723,64	734,11	734,04
März . . .	733,78	733,81	737,62	737,60
April . . .	725,41	725,43	731,06	731,14
Mai. . . .	732,28	732,11	733,59	733,46
Juni . . .	733,01	732,59	732,19	731,95
Juli . . .	731,81	731,74	734,28	734,06
August . .	733,61	733,63	732,84	732,94
September .	734,76	734,71	736,05	736.03
October . .	736.39	736,43	731,96	731,82
November .	734,99	735,24	735,67	735,75
December .	741,86	741,86	733,77	733,73
Jahresmittel	734,65	734,62	732,95	732,93

Es war also das Jahresmittel aus den Beobachtungen Abends 8 Uhr im Jahre 1879 um 0,03 mm, im Jahre 1880 um 0,02 mm kleiner, als das Mittel aus den drei Beobachtungen. Diese Uebereinstimmung in den beiden, durch ihre meteorologischen Verhältnisse so verschiedenen Jahren scheint keine zufällige zu sein. Aehnliche Resultate ergeben sich für fast alle anderen bayrischen Stationen.

Bei den mittleren Temperaturbestimmungen der bayrischen Stationen wird ein doppeltes Verfahren beobachtet; nach dem einen wird die mittlere Temperatur aus den täglichen Mitteln der Maximal- und Minimalwerthe bestimmt, nach dem andern dadurch, dass die Temperaturen der drei täglichen Beobachtungen und das Temperaturminimum des Tages addirt und die Summe durch 4 dividirt wird.

Der ersteren Bestimmungsart muss namentlich in Bezug auf die Erlangung der Jahresmittel vor allen anderen der Vorzug eingeräumt werden; weniger ist dies bei den täglichen Mitteln der Fall. Letztere können nämlich im Allgemeinen aus dem Grunde keine richtigen Anhaltspunkte über die Wärmeverhältnisse eines Tages geben, weil auch die Zeit, welche eine bestimmte Temperatur herrscht, hierbei in Frage kommen sollte. Es müsste bei der Veränderlichkeit der Temperatur mit der Zeit streng genommen $\int T dt$ berücksichtigt werden, wo T die mit der Zeit t sich ändernde Tagestemperatur vorstellt. Wird nun z. B. ein Sommertag herausgegriffen, an welchem lange die Sonne scheint, so wird zwar dadurch das Maximum und Minimum der Temperatur erhöht, aber es wird gleichzeitig viel länger eine Temperatur herrschen, die der des Maximums nahe liegt, als eine solche, die sich dem Minimum nähert; es wird daher an einem solchen Tage das einfache Mittel aus dem Maximum und Minimum eine zu niedrige Zahl für die mittlere Temperatur und die Gesammtwärme des Tages geben. An einem Wintertage ergiebt sich aus analogen Gründen das umgekehrte Resultat; hier giebt das Mittel einen zu grossen Werth. Aus beiden Gründen nun, weil das Mittel im Sommer zu niedrig und im Winter zu hoch ist, beide Abweichungen ziemlich gleich lang, nahezu mit gleicher Grösse und mit entgegengesetzten Vorzeichen sich geltend machen, erscheint die Bestimmung des Jahresmittels aus den Maximal- und Minimalwerthen als die genaueste.

Die zweite, oben erwähnte Bestimmungsart wurde durch die richtige Erwägung hervorgerufen, dass das einfache Mittel aus den drei bayrischen Beobachtungszeiten eine zu hohe mittlere Tagestemperatur geben muss. Denn das Mittel aus den Beobachtungsergebnissen Morgens 7 Uhr, Mittags 2 Uhr und Abends 9 Uhr stimmt mit dem Mittel aus den Maximal- und Minimalwerthen gut überein, und Morgens und Abends 8 Uhr sind durchschnittlich höhere Temperaturen vorhanden, als Morgens 7 Uhr und Abends 9 Uhr. Indessen ist schon aus theoretischen

Gründen klar und haben auch die Resultate der Beobachtungen gezeigt, dass durch die erwähnte Hinzuziehung des Minimums die Mitteltemperatur zu niedrig wird. Die Temperatur Morgens 8 Uhr liegt nämlich längere Zeit dem Minimum nahe, die Abends 8 Uhr unterscheidet sich, wie wir unten sehen werden, im Durchschnitt nicht viel von dem Mittel, und die um 2 Uhr ist nahezu gleich dem Maximum; es werden also bei der Bestimmungsart zwei kleine Werthe, ein grosser und ein Mittelwerth verwendet und muss deshalb das Gesammtresultat zu niedrig ausfallen. Die zwei letztjährigen Beobachtungsresultate der hiesigen Station haben nun wieder zu einem ähnlichen Resultat wie bei dem Luftdruck geführt und dadurch die Möglichkeit eröffnet, mit Hilfe der Beobachtung Abends 8 Uhr die Tagestemperatur in einer Weise zu finden, welche, ohne die nach oben richtige Bestimmung der mittlern Jahrestemperatur wesentlich zu ändern, doch diese mittlere Tagestemperatur zur Beurtheilung der Gesammtwärme eines Tages geeigneter macht, als das einfache Mittel des Maximums und Minimums. Man darf zu dem Ende nur die mittlere Tagestemperatur gleich dem Mittel aus dem Maximum, dem Minimum und der Temperatur um 8 Uhr Abends setzen. Durch diese Bestimmungsart wird, wie schon erwähnt wurde, der richtige mittlere Jahreswerth wenig geändert, weil das 8 Uhr-Mittel nahezu dem Jahresmittel entspricht, und dazu wird für die tägliche Mitteltemperatur eine Ergänzung geschaffen, welche oben als wünschenswerth bezeichnet wurde. Denn die Zuziehung der Temperatur Abends 8 Uhr giebt im Sommer, wo es noch Tag und warm ist, der auf die vorgeschlagene Art bestimmten Mitteltemperatur einen grössern und im Winter aus den entgegengesetzten Gründen einen kleinern Werth, als ihn das einfache Mittel aus dem Maximum und Minimum hat. Zur Erhärtung des Gesagten folgt umstehend eine Tabelle, welche in der ersten Colonne die Temperatur Abends 8 Uhr, in der zweiten das einfache Mittel aus dem Maximum und Minimum, in der dritten das Mittel aus den drei Werthen und zwar für 1879 und 1880 in Celsiusgraden enthält. Es ist auch hier bei den vielfach sehr verschiedenen Temperaturverhältnissen der beiden Jahre gewiss kein zufälliges Ergebniss, dass die mittlere Jahrestemperatur zu Abends 8 Uhr die mittlere Jahrestemperatur der ersten Art 1879 um 0,39^0, die der zweiten um 0,26^0, und 1880 die entsprechenden Temperaturen fast um dieselben Beträge, nämlich um 0,37^0 und 0,25^0 übertrifft. Ausschlaggebend für den höheren Betrag des ersten Mittels ist der Umstand, dass Abends 8 Uhr in Bezug auf Zeit und Temperaturverhältnisse dem Maximum näher liegt, als dem Minimum. Vielleicht liefert die Beobachtung um 9 Uhr Abends Resultate, die dem ersten Mittel näher liegen, als die Abends 8 Uhr, und rückt mit Benutzung dieser 9 Uhr-Beobachtung das auf die zweite Art bestimmte Jahresmittel dem auf die erste Art gefundenen noch näher, als dies oben der Fall ist. Zur Entscheidung dieser Frage reichen die Beobachtungen der

hiesigen Station nicht aus und soll hier nur die Aufmerksamkeit anderer Beobachter auf diesen Punkt gelenkt werden. Erweist sich übrigens die oben berührte Differenz ferner so constant, so kann man an der 8 Uhr-Beobachtung leicht eine Correctur anbringen, die den noch vorhandenen Unterschied verwischt und auch mit ihr eine vollständig zutreffende Bestimmung des Mittelwerthes zulässt.

Die erwähnte Tabelle ist:

	1879.			1880.		
	8 Uhr:	1. Mittel:	2. Mittel:	8 Uhr:	1. Mittel:	2. Mittel:
Januar . .	— 1,51	— 1,28	— 1,36	— 4,98	— 4,94	— 4,95
Februar . .	1,53	1,71	1,65	— 0,16	— 0,48	— 0,37
März . . .	2,13	2,22	2,19	5,15	4,86	4,96
April . . .	7,43	7,28	7,33	9,70	9,40	9,50
Mai. . . .	11,90	10,52	10,98	12,87	11,87	12,21
Juni . . .	17,89	16,54	16,99	16,29	15,55	15,80
Juli. . . .	16,16	15,33	15,61	19,80	18,56	18,97
August . .	18,58	18,33	18,41	17,60	17,09	17,26
September .	14,85	14,72	14,76	14,41	14,36	14,38
October . .	7,58	7,18	7,32	8,05	8,19	8,14
November .	0,31	0,34	0,33	3,71	3,75	3,74
December .	— 10,14	— 10,76	— 10,55	4,13	3,89	3,97
Jahresmittel	+ 7,23	+ 6,84	+ 6,97	+ 8,88	+ 8,51	+ 8,63

Nürnberg. Prof. Dr. BIEHRINGER.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



XXVI. Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1881.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Philosophie der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Geodäsie.

Astronomie.

Mechanik, Physik.

Historisch-literarische Abtheilung.

Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation.

Von

Dr. C. Isenkrahe

in Crefeld.

Noch in unseren Tagen erregt Newton's grosse Errungenschaft, obschon die Welt 200 Jahre Zeit gehabt hat, sich an den Besitz derselben zu gewöhnen, die höchste Bewunderung eines Jeden, der sich in die Gedankenwege jenes Geistesriesen vertieft: ist es zu verwundern, dass zu einer Zeit, wo jene Entdeckung mit dem Reize der Neuheit umkleidet war, wo sie als plötzliche Enthüllung eines lang umspähten, selbst einem Kepler unlösbar gebliebenen spröden Räthsels vor die Augen der Welt trat, dass damals der Name Newton sich mit einem wahrhaft blendenden Glanze umgab? dass alle Gedanken, alle Theorien des grossen Mannes als Offenbarungen eines überlegenen Geistes hingenommen und für unumstössliche Wahrheiten gehalten wurden?

Schon oft hat man darauf hingewiesen, wie der Name und die Autorität Newton's ein ganzes Jahrhundert hindurch Macht genug besessen habe, um die Optik auf der falschen Bahn der Corpusculartheorie zu erhalten und an einer Verfolgung des schon lange von Huygens gezeigten richtigen Weges zu verhindern. Leicht ist es also erklärlich, dass in Bezug auf das Gravitationsproblem die Meinung entstand, mit dem Newton'schen Gesetze sei dasselbe ganz und gar erledigt, zu forschen und zu lösen sei Nichts mehr daran übrig geblieben. Ja, bis auf den heutigen Tag ist diese Meinung noch so verbreitet, dass sie wohl als die herrschende bezeichnet werden darf.

Dem gegenüber fanden sich aber schon früh Männer von unleugbarer Genialität und Verstandesschärfe, vor Allen der eben schon genannte Huygens und etwas später Euler, welche, obschon sie Newton's Entdeckung durchaus anerkannten und würdigten, dennoch fortfuhren,

darüber hinaus zu forschen und Etwas zu suchen, was sie die „Ursache der Schwerkraft" (*causa gravitatis*) nannten.

Was dachten jene Männer sich unter dieser Causa? — Um das klar einzusehen, müssen wir einen aufmerksamen Blick werfen auf diejenige Situation, in welche die Gravitationsfrage durch Newton's Bemühungen eingetreten war.

Einerseits auf jene empirisch ermittelten Thatsachen, welche wir die Kepler'schen Gesetze nennen, aufbauend, hatte Newton durch eine elegante mathematische Entwickelung dargethan, dass die Ursache, welche solche Bewegungen hervorbringe, jederzeit mit einer Intensität wirken müsse, die dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportional sei. Andererseits hatte er vorzugsweise aus seinen Pendelexperimenten den Schluss gezogen, dass diese Intensität auch in einfachem directem Verhältnisse zu der jedem Körper innewohnenden „*vis inertiae*" stehe, d. h. zu dem Widerstande, welchen der Körper jener bewegenden Ursache entgegensetze. Indem er nun weiter gehend die Annahme machte, dass alle in der Welt vorhandene Materie eine gleichmässige Fähigkeit zu solchem Widerstande besässe, konnte er die Intensität, mit welcher die Ursache der Schwere wirkt, auch proportional „der Menge von Materie" setzen, welche ein Körper enthält, und diese wurde in der Regel kurz: „Masse des Körpers" genannt.

Auf solche Weise war für die Intensität, mit welcher die Ursache der Gravitationsphänomene wirkt, eine Formel gefunden; diese Ursache hatte gewissermassen ein mathematisches Kleid bekommen, und das war allerdings für die praktische Astronomie ein eminenter Vortheil. Aus den Daten Masse und Entfernung konnte man jetzt mit Sicherheit alle Phänomene voraus berechnen, und die ausserordentliche Fruchtbarkeit solcher Berechnungen hat durch Leverrier's Neptunentdeckung wohl die glänzendste Illustration gefunden.

Aber — wenn man auch jetzt die Grösse der Wirkung für jeden Zeitmoment genau kannte, wenn man auch wusste, mit welcher Intensität die Ursache der Gravitationsphänomene im gegebenen Augenblick agire, so waren doch noch zwei wichtige Punkte ganz in Dunkel gehüllt, nämlich erstens: von wem wird das Alles bewirkt, wer ist hier der Motor? und zweitens: wie, auf welche Weise und mit welchen Mitteln wird diese Wirkung hervorgebracht?

Diese Fragen waren beide ebenso naheliegend, als wichtig, und Newton selbst entzog sich keineswegs der Erkenntniss, dass trotz seiner Entdeckungen beide noch zu beantworten übrig geblieben seien. Er gab sich sogar redliche Mühe, diese Antwort zu finden. Im Jahre 1693 (er war damals 33 Jahr alt) stellte er die Theorie auf, die Materie selbst sei der bei der Gravitation wirksame Motor, und das Mittel, dessen sie sich dabei bediene, sei der Aether. Aber das Wie? blieb ihm dunkel.

Er bemühte sich vergeblich, zu ergründen, auf welche Weise die Materie mit Hilfe des Aethers die Gravitationsphänomene zu Stande brächte, und so wurde ihm denn allmälig die Richtigkeit seiner Theorie wieder zweifelhaft. In einem Briefe, den er in seinem 51. Lebensjahre an Bentley schrieb, stellt er es der Ueberlegung seines Lesers anheim, ob er die Materie selbst oder irgend ein immaterielles Wesen als den fraglichen Motor ansehen wolle. Im letzteren Falle ist die Frage nach dem Wie? natürlich eine für die Naturwissenschaft transcendente; im ersteren Falle aber stellt Newton es als ganz selbstverständlich hin, dass die Materie sich dabei irgend einer Vermittelung bedienen müsse, dass also eine eigentliche Fernwirkung nicht stattfinde. „Denn," sagt er ausdrücklich, „dass die Gravitation eine natürliche, inhärente und wesentliche Eigenschaft der Materie sei, so dass ein Körper aus der Ferne durch ein Vacuum hindurch ohne Vermittelung irgend eines Etwas, durch welches seine Thätigkeit und Kraft fortgepflanzt würde, auf einen andern Körper einwirken könne, ist für mich eine so grosse Absurdität, dass ich glaube, Niemand, der in philosophischen Dingen eine ausreichende Denkfähigkeit besitzt, kann jemals darauf verfallen!"*

Ein volles Menschenalter nach jener Zeit war es Newton noch immer nicht gelungen, die Frage nach dem Wer? und Wie? definitiv zu beantworten, und er war sich dessen so wohl bewusst, dass er mit grosser Schärfe unterschied zwischen dem von ihm aufgefundenen Gesetz von der Intensität, mit welcher die Gravitation wirkt, d. h. zwischen der „*vis gravitatis*" und jener unentdeckten Ursache der Gravitation, „*causa gravitatis*". So lese ich in derjenigen Ausgabe seiner „Principien", welche 1723, vier Jahre vor seinem Tode, in Amsterdam erschien, am Schlusse seiner sämmtlichen Entwickelungen folgende charakteristische Stelle:**

„Bis dahin habe ich die Erscheinungen am Himmel und am Meere durch die Kraft der Gravitation auseinandergesetzt, aber die Ursache der Gravitation habe ich noch nicht angegeben. Jene Kraft entsteht sicherlich durch irgend eine Ursache, welche bis in den Mittelpunkt der Sonne und der Planeten eindringt. ... Aber den Grund dieser

* Wer die philosophischen und physikalischen Anschauungen unseres Jahrhunderts kennt, mag sich die Zahl von hochberühmten Naturforschern vergegenwärtigen, denen durch dieses Urtheil Newton's alle „philosophische Denkfähigkeit" abgesprochen wird.

** *Philosophiae naturalis Principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono. Editio ultima. Amstaelodami 1723, pag. 483. „Hactenus Phaenomena coelorum et maris nostri per Vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique haec Vis a causa aliqua quae penetrat ad usque centra Solis et Planetarum. ... Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phaenomenis nondum potui deducere, et Hypotheses non fingo."*

Eigenthümlichkeit der Gravitation konnte ich aus den Erscheinungen bis jetzt nicht ableiten, und — Hypothesen mache ich keine.“

Obschon durch diese Worte die Situation, in welcher die Gravitationsfrage von Newton zurückgelassen wurde, deutlich genug charakterisirt war, so lag doch noch ein anderweitiger Punkt vor, welcher die Sachlage verdunkelte oder vielmehr in einem falschen Lichte erscheinen liess. Newton hatte sich nämlich veranlasst gesehen, jener geheimnissvollen „Ursache“ schon einen Namen zu geben. Weil dieselbe nämlich sämmtliche Naturkörper im Sinne einer gegenseitigen Annäherung in Bewegung zu setzen strebt, so hatte er sie „Anziehung“ genannt und es ist gar nicht zu leugnen, dass er damit zu all' den späteren Missverständnissen, welche sich über seine Auffassung von der Schwerkraft in der Welt verbreiteten, selbst (obschon gegen seinen Willen) Veranlassung gegeben hat.

Eine Sache, die schon einen Namen, und noch dazu einen so einfachen, recht verständlichen Namen besitzt, muss doch, sollte man denken, wohl auch bekannt sein — wie kann man auf die Vermuthung kommen, diese Sache sei überhaupt noch erst zu suchen! — Dass also durch Newton die „allgemeine Anziehungskraft der Materie“ und das Gesetz, nach welchem diese wirkt, entdeckt worden sei, galt schon bald, besonders aber bei den Engländern, als eine unumstössliche, für die Wissenschaft ebenso erfreuliche, wie für England ruhmreiche Thatsache.

Dem gegenüber muss constatirt werden, dass den scharfen Augen eines Huygens die wirkliche Lage der Sache keineswegs entging. Dieser geniale Mathematiker und Naturforscher acceptirte einerseits die eigentliche Newton'sche Entdeckung, d. h. jenes mathematische Gewand, in welches die zu suchende „Ursache“ gekleidet worden war, voll und ganz; andererseits aber bekämpfte er die Idee einer fernwirkenden Anziehungskraft der Materie auf's Entschiedenste und fuhr fort, nach der eigentlichen „*Causa gravitatis*“ zu forschen.

Da ich über seine diesbezüglichen Arbeiten schon an einer andern Stelle ausführliche Mittheilungen gemacht habe,* so mag hier die kurze Notiz genügen, dass er ein materielles Fluidum, den Aether, welcher alle Himmelsräume erfüllt, zu Hilfe nimmt und diesem eine ähnliche Constitution zuschreibt, wie sie nach der modernen kinetischen Theorie den Gasen zugeschrieben wird.

Diese Ansichten konnten aber gegen die Meinung der Engländer ebenso wenig aufkommen, als seine Undulationstheorie gegen die Newton'sche Emissionslehre; ihr unverdientes Schicksal war einfach Vergessenheit!

---

* Isenkrahe, Räthsel von der Schwerkraft. Braunschweig 1879, Vieweg & S.

Nicht minder energisch, als Huygens, wendete sich schon in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts der berühmte Mathematiker Leonhard Euler* gegen die damals schon fast vollständig zur Herrschaft gekommene Vorstellung von einer anziehenden Kraft der Materie. Dabei ist er sich wohl bewusst, dass seine Anschauungen, weil sie gegen den Strom der herrschenden Meinung ankämpften, sogar persönliche Nachtheile für ihn zur Folge haben könnten. Dies geht z. B. aus einem seiner Briefe an Goldbach hervor, worin er schreibt:** „Ich bin in Verfertigung meiner Pièce, welche ich über den Magneten im vorigen Jahre nach Paris geschickt, auf einen Einfall, um die *Causam Gravitatis* zu erklären, gekommen, welcher mir je länger, je gründlicher vorkommt, ungeachtet ich mich noch nicht im Stande befinde, denselben völlig auszuführen. — Anjetzo sollte man hier schon wissen können, wer dieses Jahr den Preis bei der Akademie zu Paris erhalten; weil mir nun der Herr Clairaut noch Nichts davon gemeldet, so kann ich gewisse Rechnung machen, dass ich diesmal leer ausgegangen. Ich kann auch die Ursache leicht errathen, denn da ich, um meine Erklärung zu bekräftigen, die Meinung der Engländer von der Attraction, als einem *Attributo essentiali corporum*, ziemlich stark angegriffen und widerlegt, so wird dieses den Herren Commissariis, welche, wie ich seit der Zeit erfahren, dieser Meinung völlig beistimmen, gar nicht gefallen haben."

Mit welcher Schärfe und Klarheit Euler den eigentlichen Stand der Frage sowohl nach ihrer physikalischen, wie nach ihrer philosophischen Seite durchschaute, ist aus allen seinen Aeusserungen über die Gravitation zu ersehen, namentlich auch aus seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin", denen ich hier eine besonders wichtige Stelle entnehmen will, zugleich als Probe seiner ruhigen und anschaulichen Darstellungsweise.***

„... Da es ausgemacht ist, dass jede zwei Körper, die man sich denkt, gegen einander angezogen werden: so ist es natürlich, nach der Ursache dieser gegenseitigen Neigung zu fragen. Die englischen Philosophen behaupten, dass es eine wesentliche Eigenschaft aller Körper sei,

* Euler stand bei Newton's Tode erst in seinem 21. Lebensjahre, hatte aber schon ein Jahr vorher eine sehr bemerkenswerthe Abhandlung: *Tentamen explicationis Phaenomenorum aëris* geschrieben, welche in den Berichten der Petersburger Akademie 1727 erschienen war. In dieser Jugendarbeit des berühmten Mannes findet sich schon u. A. der Gedanke vor, dass Wärme eine Art von Bewegung sei, eine Anschauung, der Euler sein ganzes Leben hindurch treu geblieben ist. — Ueber die physikalischen Arbeiten Euler's hat Dr. Cherbuliez eine sehr verdienstvolle Abhandlung (Bern 1872) geschrieben, die auch im Folgenden hier und da benutzt worden ist.

** Vergl. *Fuss, Correspondence entre Euler et Goldbach, Lettre LXX, p. 273.*

*** Briefe an eine deutsche Prinzessin. Aus dem Französischen übersetzt. Leipzig 1769. I, 228.

sich wechselweise anzuziehen; und dass alle Körper gleichsam eine gewisse natürliche Neigung gegen einander haben, kraft welcher sie sich bemühen, einander näher zu kommen, so, als wenn sie eine Empfindung oder Begierde hätten. Andere Philosophen sehen diese Meinung für ungereimt und den Grundsätzen einer gesunden Philosophie widersprechend an. Die Sache selbst leugnen sie nicht, sie geben sogar zu, dass es wirklich in der Welt Kräfte gebe, welche die Körper gegen einander stossen; aber sie behaupten, dass diese Kräfte von aussen auf die Körper wirken; und dass diese im Aether, der freien Materie, die alle Körper umgiebt, liegen. ... Also hat nach den Ersteren die Attraction ihren Grund in den Körpern selbst und in ihrer eigenen Natur; nach den Letzteren liegt er ausser den Körpern in der freien flüssigen Materie, die sie umgiebt. In diesem Falle wäre das Wort Attraction eigentlich nicht richtig; man müsste vielmehr sagen, dass ein Körper gegen den andern gestossen würde. Aber weil die Wirkung einerlei ist, es mögen zwei Körper gegen einander gezogen oder gestossen werden: so macht das blosse Wort „Anziehung“ keinen Unterschied, wenn man nur dadurch nicht die Natur der Ursache selbst bestimmen will. Um alle Verwirrung zu vermeiden, die der Ausdruck hervorbringen könnte, sollte man aber doch lieber sagen: die Körper bewegen sich so, als wenn sie einander anzögen. Dadurch liesse man unausgemacht, ob die Kräfte, die auf die Körper wirken, in oder ausser ihnen ihren Sitz haben. Wir wollen bei den Körpern, die wir auf der Oberfläche der Erde finden, stehen bleiben. Niemand kann zweifeln, dass alle diese Körper herunterfallen, sobald sie nicht mehr unterstützt werden; also ist nun die Frage: welches die wahre Ursache dieses Falles sei? Die Einen sagen, dass es die Erde sei, welche diese Körper durch eine Kraft anziehe, die ihr vermöge ihrer Natur zukäme. Die Anderen sagen, dass es der Aether oder eine andere feine und unsichtbare Materie sei, welche die Körper nach unten stosse, so dass in beiden Fällen der Erfolg einerlei ist.

Die letzte Meinung gefällt Denen mehr, die in der Philosophie helle und begreifliche Grundsätze lieben; weil sie nicht sehen, wie zwei von einander entfernte Körper auf einander wirken können, ohne dass Etwas zwischen ihnen sei. Die Anderen berufen sich auf die göttliche Allmacht und behaupten, dass Gott alle Körper mit der Kraft, andere Körper an sich zu ziehen, begabt habe. Unerachtet es gefährlich ist, über Das, was Gott möglich oder unmöglich sei, zu streiten, so ist doch gewiss, dass, wenn die Attraction ein unmittelbares Werk der göttlichen Allmacht wäre, ohne in der Natur der Körper gegründet zu sein: dies ebensoviel heissen würde, als wenn man sagte, dass Gott unmittelbar die Körper gegen einander stiesse, welches also beständige Wunder wären.

Wir wollen setzen, es wären vor Erschaffung der Welt Nichts, als zwei von einander entfernte Körper hervorgebracht, ausser ihnen existirte Nichts, und beide wären in Ruhe. Wäre es wohl möglich, dass der eine sich dem andern näherte oder dass sie eine Neigung hätten, einander näher zu kommen? Wie würde aber Eines das Andere in der Entfernung gewahr werden? wie die Begierde bekommen, sich mit ihm zu vereinigen?

Dies sind Begriffe, welche die Vernunft wider sich aufbringen.

Aber sobald man annimmt, dass der Raum zwischen den Körpern mit einer feinen Materie angefüllt ist, so sieht man leicht ein, dass diese Materie auf die Körper, durch den Stoss, wirken kann und die Wirkung daraus beinahe eben dieselbe sein muss, als wenn sie sich wechselweise anzögen. Da wir nun wissen, dass in der That eine solche flüssige Materie vorhanden ist, welche den Raum zwischen den himmlischen Körpern ausfüllt, ich meine den Aether: so scheint es vernünftiger zu sein, der Wirkung des Aethers die gegenseitige Anziehung der Körper zuzuschreiben, wenn man auch die Art dieser Wirkung nicht einsieht, als zu einer ganz unverständlichen Eigenschaft seine Zuflucht zu nehmen.

Die alten Philosophen haben sich begnügt, die Erscheinungen in der Welt durch solche Ursachen zu erklären, die sie *qualitates occultas* nannten. So sagten sie z. E., das Opium habe eine *qualitas occulta*, die es fähig mache, den Schlaf zu erregen. Das hiess in der That Nichts erklären oder hiess vielmehr seine Unwissenheit verbergen. Wenn man also die Attraction für eine innere Eigenschaft der Körper ausgiebt, so muss man sie ebenfalls für eine *qualitas occulta* ansehen. Aber da man heute zu Tage die *qualitates occultas* aus der Philosophie verbannt hat, so muss es die Attraction, in diesem Verstande genommen, auch sein." —

Der wichtigste Punkt, welcher nach vorstehender Erörterung noch aufzuklären blieb, war nun augenscheinlich die Frage, wie es denn komme, dass der die Körper rings umfliessende Aether auf diese ebenso einwirke, „als wenn sie sich gegenseitig anzögen". Die Antwort hierauf findet sich in den citirten „Briefen" nicht, wohl aber ist sie in der schon früher beiläufig erwähnten Abhandlung „*De Magnete*" kurz angedeutet; ausführlicher aber hat Euler sie in dem 19. Capitel der „Anleitung zur Naturlehre", welche unter seinen (erst im Jahre 1844 zu Petersburg entdeckten) nachgelassenen Schriften sich findet, zur Darstellung gebracht.

Die Frage spaltet sich naturgemäss in zwei Theile, von denen der erste die Beziehung der Gravitation zur Entfernung, der zweite ihre Beziehung zur Masse betrifft.

Bei Beantwortung des ersten Theiles wird die Annahme zu Hilfe genommen, dass der Druck des Aethers nicht überall gleich, sondern in der Richtung auf den Mittelpunkt eines jeden Gravitationscentrums zu „dergestalt abnehme, dass die Verminderung sich umgekehrt wie die Entfernung davon verhalte". Durch eine sehr einfache mathematische Deduction ergiebt sich hieraus die von dem Newton'schen Gesetz geforderte Beziehung als eine nothwendige Consequenz.

Euler denkt sich zunächst den betrachteten Körper als eine Säule von der Grundfläche a^2 und der Höhe b, diese ist ihrer Länge nach gegen ein Gravitationscentrum (etwa gegen den Mittelpunkt der Erde) gerichtet, und die Entfernung von demselben (x) sei eine Grösse, gegen welche die Länge (b) „als Nichts angesehen wird". Wenn man nun den absoluten Druck des Aethers an einem solchen Orte, wo er sich in vollständigem Gleichgewicht befindet (in unendlicher Entfernung von jedem Gravitationscentrum), mit h bezeichnet,* so muss dieser Druck in der Entfernung x von einem solchen Centrum die Grösse $h - \frac{A}{x}$ haben, weil ja die Verminderung dem reciproken Werthe der Entfernung proportional sein soll; in der Entfernung $x + b$ findet man demgemäss den Druck $h - \frac{A}{x+b}$. Hieraus ergeben sich bezüglich der beiden Endflächen der betrachteten Säule die Ausdrücke

$$a^2\left(h - \frac{A}{x}\right) \text{ und } a^2\left(h - \frac{A}{x+b}\right).$$

Da diese Druckkräfte einander entgegengesetzt sind, so ist ihre Resultante gleich dem Ueberschuss der einen über die andere, also gleich

$$a^2\left(h - \frac{A}{x+b}\right) - a^2\left(h - \frac{A}{x}\right) = A\,\frac{a^2 b}{x\,(x+b)}.$$

Der Zähler $a^2 b$ ist das Volumen (V) der Säule; der Nenner darf gleich x^2 gesetzt werden, weil b gegen die Dimension von x verschwindet. Mithin ist die aus dem Aetherdruck abgeleitete centripetale Kraft gleich $A\frac{V}{x^2}$; es könnte also das Newton'sche Gesetz, soweit es sich auf die Entfernung bezieht, darin seine Erklärung finden, aber in Bezug auf die Masse besteht noch ein sehr wesentlicher Unterschied. Euler findet den Druckunterschied proportional dem Volumen, und er versucht nun, die Proportionalität zwischen Volumen und Masse dadurch herzustellen, dass er den Begriff der „wahren Grösse eines Körpers" bildet. —

---

* Euler denkt sich unter dieser Grösse speciell die Höhe einer Wassersäule von gleichem Druck wie der Aether, „eben wie die elastische Kraft der Luft einer Wasserhöhe von 32 Schuh gleichgeschätzt wird".

Jeder Körper hat Poren, in welche der Aether frei eintreten kann, und zwar sind diese nach Euler theils offene, theils verschlossene.

„Die subtile Materie,* welche sich in den offenen Poren der Körper befindet, steht mit dem äusseren Aether in freier Gemeinschaft und hat keinen Antheil an der Bewegung des Körpers, daher sie auch von der eigenthümlichen Materie desselben unterschieden wird. Diejenige aber, welche in den verschlossenen Poren befindlich ist, bewegt sich wohl mit dem Körper: ihre Menge ist aber, wie wir bei der Luft gesehen, so gering, dass sie gleichsam für Nichts zu achten. Man hat also nur auf die groben Theilchen zu sehen, auf welche der Aether mit seinem Drucke wirkt, und da ein jeglicher derselben abwärts gestossen wird, so besteht das Gewicht derselben aus der Summe aller Kräfte, welche auf die groben Theilchen wirken. Es ist aber aus der Natur des Druckes flüssiger Materien bekannt, dass die daher auf einen Körper entspringende Kraft sich wie die Grösse des Körpers verhalte und die Figur Nichts zur Vermehrung oder Verminderung der Kraft beitrage. Daher wird ein jeglicher Körper von dem Aether ebenso stark hinabgestossen werden, als wenn nur seine grobe Materie allein in einen Klumpen zusammengepresst wäre, dessen Ausdehnung wir oben die wahre Grösse des Körpers genannt haben, um dieselbe von der scheinbaren Grösse, welche die Poren zugleich mit in sich begreift, zu unterscheiden. Wenn wir also die wahre Grösse eines Körpers oder den Raum, welcher nur von der groben Materie desselben angefüllt wird, durch c^3 ausdrücken, so wird dieser Körper von dem Drucke des Aethers ebenso stark hinabgestossen, als ein aus grober Materie bestehender Würfel, dessen Seite $= c$ ist, oder als eine jegliche andere Figur, deren Körper auch $= c^3$ ist. Wenn wir nämlich eine Säule nehmen, deren Grundfläche $= a^2$ und Höhe $= b$, so dass $aab = c^3$, so wird auch diese Säule mit jenem Körper einerlei Gewicht haben. Dieses folgt, wie gemeldet, aus der Lehre des Druckes flüssiger Materien, wo gezeigt wird, dass die sämmtliche Kraft derselben auf einen Körper sich wie die Grösse verhalte. Weil nun das Gewicht von dem Drucke des Aethers herrührt, so muss sich dasselbe ebenfalls wie die wahre Grösse eines jeglichen Körpers verhalten, und ein Körper, welcher nach der Menge seiner groben Materie zweimal so gross ist, muss auch ein zweimal so grosses Gewicht haben."

Hiermit ist aber das Gravitationsproblem, soweit es die Massen betrifft, nur zur Hälfte in Betracht gezogen. Es fehlt nämlich noch die Aufklärung der Rolle, welche die Masse des anziehenden Körpers spielt. Nach Newton ist die Intensität der Gravitation gleich $\frac{M.m}{r^2}$, nach Euler $\frac{A c^3}{x^2}$.

* *Euler, Opera Postuma, II, 543.*

Nun ist x identisch mit r, und c^3 ist mit Hilfe der „wahren Grösse eines Körpers" einer der beiden Massen proportional geworden. In welcher Beziehung steht aber der ganz unbestimmte Factor A zu der Masse M des Gravitationscentrums? Diese Frage wird erst recht brennend in einem Falle, wo auf einen und denselben Körper mehrere solcher Centra einwirken. Euler bespricht denselben in folgender Weise:

„Nimmt man nun alle himmlischen Körper zusammen und zeigt die Entfernung eines Ortes von denselben durch die Buchstaben z, y, x, v etc. an, so wird an diesem Orte die elastische Kraft des Aethers durch diese Höhe ausgedrückt werden:

$$h - \frac{A}{z} - \frac{B}{y} - \frac{C}{x} - \frac{D}{v} \text{ etc.};$$

und die Wirkung dieses Druckes auf einen an diesem Orte befindlichen Körper wird ebenso beschaffen sein, als wenn derselbe gegen alle himmlischen Körper gezogen würde, von solchen Kräften, welche sich umgekehrt wie die Quadrate seiner Entfernungen davon verhalten. Wegen der Zahlen A, B, C, D etc. können wir noch anmerken, dass dieselben sich wie die Massen der himmlischen Körper, auf welche sie sich beziehen, verhalten."

Dass mit einer solchen blossen „Anmerkung" diese Frage nicht erschöpft sei, gesteht Euler selbst aufrichtig ein. Ueberhaupt erkennt er recht wohl den Punkt, über welchen seine Gravitationserklärung hier nicht hinausgekommen ist. Den letzten Hauptsatz seiner ganzen diesbezüglichen Abhandlung kleidet er nämlich in die Worte:

„146) Alles kommt demnach darauf an, dass man die Ursache ergründe, warum die elastische Kraft (des Aethers) von einem jeglichen Himmelskörper vermindert werde? und warum diese Verminderung sich einestheils wie die Masse des himmlischen Körpers, und anderntheils umgekehrt wie die Entfernung von demselben verhalte?"

Und der Schluss des ganzen Capitels lautet:

„Der Grund muss augenscheinlich in der groben Materie, aus welcher der Körper besteht, gesucht werden, und die grobe Materie muss in dem Aether eine Bewegung veranlassen, wodurch das Gleichgewicht gehoben wird. Wenn man erst so weit gekommen, so ist es leicht zu zeigen, dass solchergestalt der Druck des Aethers vermindert werden müsse."

Nach diesen Worten, in denen Euler diejenige Aufgabe, welche er in Betreff des Gravitationsproblems der Nachwelt noch zu lösen übrig gelassen, bestimmt und klar formulirt hat, verlässt er den vorliegenden Gegenstand und wendet sich einem andern Thema, der Hydrostatik, zu. —

Stellen wir uns nun die Frage, worin der eigentliche wissenschaftliche Werth der hier dargelegten Theorie zu suchen sei, so liegt derselbe, wie mir scheint, wesentlich darin, dass Euler einen Weg angebahnt hat, die Phänomene der Gravitation ohne „*actio in distans*" mechanisch zu erklären. Er documentirt sich damit entschieden als einen Vorläufer unserer modernen Physik, deren Streben ja in erster Linie darauf gerichtet ist, wie mit den Imponderabilien, so auch mit den fernwirkenden Kräften immer mehr aufzuräumen.

Dieses Ziel in Bezug auf die Schwere wirklich zu erreichen, ist ihm allerdings, wie er wohl einsah, nicht gelungen, und er hat überdies noch eine ziemliche Anzahl von Schwierigkeiten, welche schon auf der von ihm betretenen Strecke des Weges liegen, nicht beseitigt.

Ich will mich nun mit einer Discussion all' der Einzelheiten, die noch zu mehr oder weniger ernsten Bedenken Anlass geben, hier nicht aufhalten, sondern direct den Kern der Sache herausschälen und fragen: Wo ist denn nach Euler der eigentliche Sitz der bei der Gravitation thätigen Kraft?

Die Antwort lautet: Diese Kraft steckt im Aether, und zwar — als „*qualitas occulta*".

Euler will zwar, wie oben mitgetheilt, die *qualitates occultas* aus der Philosophie gänzlich verbannen, allein dennoch ist ihm eine solche in die eigene Gravitationstheorie unter der Hand wieder hineingeschlüpft. Die alte scholastische Dynastie der „verborgenen Eigenschaften" wurde mit der Massenattraction feierlichst des Landes verwiesen, aber mit der Aetherelasticität gelangte sie doch wieder auf den Thron.

Wollen wir uns dieses eigenthümliche Verhältniss deutlich zur Anschauung bringen, so ist es nöthig, von der Natur des Euler'schen Aethers etwas genauere Kenntniss zu nehmen, und wir werden dabei finden, welche Gewaltmassregeln erforderlich gewesen sind, um überhaupt einen für Gravitationszwecke brauchbaren Aether zu Stande zu bringen.

Von vornherein legt Euler bei der Definition der Materie einen wesentlichen Nachdruck auf die Undurchdringlichkeit. In der „Anleitung zur Naturlehre" z. B. widmet er der allseitigen Beleuchtung dieser Eigenschaft acht lange Abschnitte und unter den „Briefen an eine deutsche Prinzessin" behandeln zwei nichts Anderes, als die Nothwendigkeit, aller Materie die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit zu tribuiren. So sagt er z. B.:*

„... Es ist daher eine wesentliche und allgemeine Eigenschaft aller Körper,** dass sich keiner an ebendemselben Orte befinden kann,

---

* *Euler, Op. post. II, 470 sq.*

** Bei Euler sind die Begriffe Materie und Körper wesentlich identisch. „Man nennt Materie Das, was den Körper von einer blossen Ausdehnung unter-

welchen ein anderer wirklich einnimmt. Das Dasein eines Körpers an einem gewissen Orte schliesst alle anderen Körper von diesem Orte aus, so lange nämlich sich jener darin aufhält, und kein anderer kann diesen Ort einnehmen, ohne zugleich denselben daraus zu vertreiben. ... So wenig ebenderselbe Körper zugleich an mehr als einem Orte vorhanden sein kann, ebensowenig können zwei Körper zugleich an ebendemselben Orte sein. ... Da aber die Luft ... auch ein Körper ist, so kann sich auch kein Körper durch die Luft bewegen, ohne beständig diejenigen Theile der Luft vom Platze zu vertreiben, in welche derselbe hineinrückt. ... Ebenso verhält es sich auch mit dem Wasser und anderen flüssigen Materien. ... Ungeachtet wir also die Natur der flüssigen Körper noch nicht erforscht haben, so kann doch daher kein Einwurf gegen die allgemeine Eigenschaft, von welcher hier die Rede ist, gemacht werden."

Und in den „Briefen" kommt er wieder zu dem nämlichen Schlusse, die Undurchdringlichkeit sei „ein allgemeines Kennzeichen, welches aller Materie und also auch allen Körpern eigen ist".

Daraus folgt nun doch wohl ganz unweigerlich, dass keine Substanz, der die Undurchdringlichkeit abgesprochen wird, noch unter den Begriff der Materie fallen kann.

Allein dennoch hat Euler zu Gunsten seines Aethers, seiner „freien Himmelsluft", sich zu der Inconsequenz verleiten lassen, dieser „subtilen Materie" zu gestatten, dass sie sich gegenseitig durchdringe.

Wenn andere Materie zusammengedrückt wird, so besteht nach Euler diese ganze Veränderung nur in einer Verkleinerung der Poren oder Zwischenräume; aber vom Aether sagt er,* „dass sich alle seine Theile zusammendrücken lassen und sich hernach wiederum aus eigener Kraft ausdehnen, wobei sie den Raum, welchen sie einnehmen, immer vollkommen ausfüllen und keine leeren Poren zwischen sich lassen".

Infolge einer solchen Zusammendrückbarkeit, welche mit der oben definirten Undurchdringlichkeit im klarsten Widerspruch steht, geht der Aether augenscheinlich jedes Anspruchs auf Materialität verlustig. Derselbe hat aber nebenbei noch eine andere Eigenschaft, welche ihn zu einem sehr geheimnissvollen und von der Materie durchaus verschiedenen Wesen gestaltet; er besitzt nämlich, wie vorhin gesagt wurde, „eigene

---

scheidet. Nun kommt es also darauf an, zu erklären, was Materie sei, weil ohne sie das Ausgedehnte nicht ein Körper sein kann. Da aber die Bedeutung beider Wörter so vollkommen einerlei ist, dass Alles, was Körper ist, auch Materie, und alle Materie Körper ist, so haben wir wenig dabei gewonnen. Unterdessen findet man doch ein allgemeines Kennzeichen, welches aller Materie und also auch allen Körpern eigen ist; und dieses ist die Undurchdringlichkeit." Briefe an eine deutsche Prinzessin, I, 233.

* *Opera posthuma, II, 521.*

Kraft". Nun hat aber Euler schon in einem früheren Capitel allen Körpern eine derartige „eigene Kraft" gänzlich aberkannt.

„So oft* in dem Zustande eines Körpers eine Veränderung vorgeht, so ist es gewiss, dass die Ursache dieser Veränderung nicht in dem Körper selbst befindlich ist, sondern ausser demselben gesucht werden muss."

Der deutliche Beweis hierfür liegt in derjenigen Eigenschaft der Materie, welche wir gewöhnlich „Beharrungsvermögen, Trägheit, *vis inertiae*", und welche Euler „Standhaftigkeit" nennt.

„Sobald die Standhaftigkeit der Körper festgesetzt wurde, so ist es ein offenbarer Widerspruch, wenn man den Körpern noch gewisse Kräfte, ihren Zustand zu verändern, zueignen will."

Diese Conclusion Euler's hat augenscheinlich Vieles für sich. Wenn es wirklich im Wesen der Körper liegt, dass sie in dem Zustande, in welchem sie sich eben befinden, sei es Ruhe oder Bewegung, beharren, so lange sie sich selbst überlassen bleiben, dann kann es nicht zugleich auch im Wesen der Körper liegen, dass sie ihren Zustand zu verändern streben. Wenn also der Aether durch irgend eine Ursache wirklich zu einer gewissen Dichtigkeit zusammengepresst sein sollte, so müsste infolge der Euler'schen „Standhaftigkeit" seine Substanz in diesem Zustande auch zu verharren, nicht aber „aus eigener Kraft" sich wieder auszudehnen streben.**

Indem er das Letztere dennoch fordert, übertritt Euler sein eigenes strenges Verbot. Und wenn man zudem die Frage stellen wollte: Warum strebt der Aether, statt in seinem Zustande zu verharren, denn darnach, sich wieder auszudehnen? so würde man im ganzen Buche vergebens sich nach einer Antwort umsehen. Der „subtilen Materie" wird die dazu nöthige Kraft unter dem Titel „eigenthümliche Federkraft" einfach zugeschrieben, und das ist genau das alte, oben von Euler selbst verworfene — Opiumverfahren. „Das Opium hat eine *qualitas occulta*, die es fähig macht, den Schlaf zu erregen." Der Aether hat eine *qualitas occulta*, die ihn fähig macht, sich auszudehnen. Weitere Gründe dafür sind einfach nicht da.

An dieser Stelle sind wir auf das wichtigste und durchschlagendste Argument gestossen, warum die dargelegte Gravitationserklärung ungenügend ist. Es fällt nicht schwer, den hier zu Tage tretenden fun-

---

* *Op. Post., II, 469.*

** Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier zu erwähnen, dass die Anschauungen der modernen kinetischen Gastheorie auf Euler's Aether nicht applicabel sind. Letztere ist gar kein Gas in diesem Sinne, kein atomistisch constituirter Körper, sondern eine durchaus homogene, den Raum mit absoluter Continuirlichkeit erfüllende Substanz.

damentalen Mangel der Theorie direct aus Euler's eigener Definition der Naturlehre zu deduciren.

„Die Naturlehre ist,“ sagt er,* „eine Wissenschaft, die Ursachen der Veränderungen, welche sich an den Körpern ereignen, zu ergründen.“ Diese Definition ist mit der von Helmholtz gegebenen:** „Das endliche Ziel der theoretischen Naturwissenschaft ist also, die letzten unveränderlichen Ursachen der Vorgänge in der Natur aufzusuchen“, wesentlich identisch. Euler sagt: so oft Veränderungen im Zustande der Körperwelt constatirt werden, hat die Naturlehre deren Ursache zu ergründen, und Helmholtz erklärt: Erst dann, wenn wir bei unveränderlichen Ursachen angekommen sind, befinden wir uns am Ziele.

Damit ist augenscheinlich ein exactes Kriterium statuirt, wonach in jedem Falle sofort beurtheilt werden kann, ob irgend eine von der Naturlehre zur Erklärung der Phänomene benutzte Ursache als letzte Instanz gelten darf oder nicht. Die kürzeste und schneidigste Form für dieses Kriterium ist die mathematische, nämlich die einfache Bedingungsgleichung

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Wenn man nun der Materie Undurchdringlichkeit (im Euler'schen Sinne) zuschreibt, so ist das eine Eigenschaft, an welcher absolut keine Veränderungen vorkommen; man kann also ohne weiteren Regress darauf basiren und hat das Recht, alle etwaigen Fragen nach einer Ursache der Undurchdringlichkeit kraft der vorangeschickten Definition aus der Naturlehre herauszuweisen.

Wird als zweite wesentliche Eigenschaft die „Standhaftigkeit“ beigefügt, so ist sicherlich auch diese ohne jede weitere Frage zu acceptiren — so lange es nicht etwa Jemandem einfällt, ein Wachsen oder Abnehmen der Trägheit eines Körpers als Erklärungsgrund für Naturphänomene benutzen zu wollen.

Ob ausser diesen beiden Punkten noch andere Fundamente für eine Euler-Helmholtz'sche Naturlehre*** gefunden werden können, und

---

* *Op. post., II, 449.*

** Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft, S. 2.

*** Herr Prof. Günther sagt gelegentlich einer Besprechung meines Buches im „Kosmos“, III. Jahrgang Heft 7 S. 72: „Wenn wir ... einzig das verlangen, dass alle Phänomene auf eine einzige gemeinsame Ursache, die *vera causa,* reducirt werden, so kann uns principiell die kosmische Schwere ebenso lieb sein, als der Stoss einer unsichtbaren ... Materie. Gelänge es, lediglich vermittelst der Newton'schen Massenattraction, alle übrigen Eigenschaften der Materie wegzuschaffen, so stände dem Erkenntnisstheoretiker dieser Versuch um kein Haar niedriger, als der in seiner Art gleichberechtigte unseres Autors, und nur dadurch gewinnt der Letztere in der Praxis den entschiedenen Vorrang, dass

ob es möglich ist, dadurch den einen oder den andern von den hier statuirten Begriffen vielleicht entbehrlich zu machen, das sind Fragen, in deren Erörterung ich hier nicht eintreten möchte. Ich will blos constatiren, dass Euler an mehreren Stellen seiner „Briefe" sowohl, wie seiner „Anleitung zur Naturlehre" die Undurchdringlichkeit und die Beharrlichkeit als die einzig zulässigen Basen erklärt. In der letzteren heisst es z. B.:*

„Es ist klar, dass ein jeder Körper so lange in seinem Zustande verbleiben muss, als sich ausser ihm keine Ursache ereignet, welche vermögend ist, in demselben eine Veränderung zu bewirken. So lange aber die Körper von einander entfernt, so verhindert keiner, dass die übrigen nicht in ihrem Zustande verharren könnten. Ja, wenn die Körper einander frei durchdringen könnten, so würde der Zustand keines einzigen durch die übrigen gestört werden. Hieraus folget, dass der Zustand der Körper nur insofern verändert wird, als dieselben nicht darin verharren können, ohne einander durchzudringen: und aus dieser Quelle entspringen folglich alle Veränderungen in dem Zustande der Körper."

In der That reicht Euler, wenn wir von seinem Aether absehen, mit den hier angegebenen Mitteln überall aus. Es ist bewundernswerth, wie er dieselben zu benutzen versteht, um die mannigfachsten Resultate

---

alle solche Bestrebungen, wie man sie von Gilles u. A. kennt, wohl kaum geglückt sind. Hier entscheidet nicht die aprioristische Betrachtung, sondern der Erfolg." Günther hat unter der von ihm vorangestellten Bedingung: „wenn wir einzig das verlangen etc.", ganz Recht. Aber nun möge er auch den Beweis dafür antreten, dass „der Erkenntnisstheoretiker" wirklich „einzig das", d. h. dass er nur die Simplicität der *„vera causa"* zu verlangen habe! — Euler und Helmholtz verlangen augenscheinlich weniger die Simplicität, als vielmehr vor allen Dingen die Constanz dieser Causa. Ich kann noch Riemann anführen, welcher ebenfalls „solche Ursachen, die die Entfernung zweier Stoffpunkte zu verändern streben", keineswegs als letzte Ziele der Forschung gelten lassen will. (Vergl. Bernhard Riemann's Gesammelte math. Werke, S. 498.) Unter diesem Gesichtspunkte, den ich in meinem Buche ziemlich ausführlich behandelt habe, fällt der Günther'sche Bedingungssatz und also auch die darauf basirte „Gleichberechtigung" beider Theorien augenscheinlich weg. — Wenn man an eine physikalische Theorie weiter keine Anforderung stellt, als dass sie eine *„vera causa"* der Phänomene angebe, dann entscheidet allerdings, wie Prof. Günther richtig sagt, der Erfolg. Wenn man aber mit Helmholtz nach dem „endlichen Ziel", also nach der *ultima causa* fragt, dann entscheidet die Natur unseres menschlichen Causalitätsbedürfnisses, und dieses lässt sich meiner Meinung nach mit einer variablen Causa nicht definitiv zufriedenstellen, sondern wird über eine solche hinaus immer noch nach Gründen dieser Veränderungen forschen. — Im Uebrigen wird der „Erkenntnisstheoretiker", dem „die kosmische Schwere" so „lieb" ist, den auf S. 3 mitgetheilten Ausspruch Newton's doch auch einigermassen im Auge behalten müssen.

* *Op. Post., II, 473.*

zu erzielen; aber die „Federkraft" des Aethers, für welche er gelegentlich die Formel

$$s = \frac{np + k}{p + k} d$$

aufstellt,* passt nicht in diesen Rahmen, sie ist eine variable Grösse, also keine Instanz, bei welcher seine Naturlehre stehen bleiben durfte.

Dass ein compressibler, expansiver und doch materieller Aether mit dem Statut der Undurchdringlichkeit aller Materie auf logisch gespanntem Fusse stehe, hat Euler, wie es scheint, selbst in etwa gefühlt, und er giebt sich in einem besondern Abschnitte grosse Mühe, das Verhältniss einigermassen erträglich zu gestalten, indem er sagt: weil es nicht zum Wesen eines Körpers gehöre, dass er eine bestimmte Grösse und ebenso wenig, dass er eine bestimmte Dichtigkeit habe, so sei es gestattet, Grösse und Dichtigkeit variabel zu denken, ohne dem Begriff des Körpers zu widersprechen; der Aether könne also verschiedene Dichtigkeitsgrade annehmen, je nachdem der auf ihn einwirkende Druck gross oder klein sei. Da nun seine eigene Federkraft dem äussern Drucke stets entgegenwirke und mit diesem Drucke zugleich selbst wachse, also die Compression immer nur bis zu einer bestimmten Grenze gestatte, so sei diese Federkraft der Undurchdringlichkeit coordinirt. „Beide gründen sich darauf, dass ein Körper einer jeglichen Kraft, nachdem sie ihn in einen gewissen Zustand gebracht, wozu sie vermögend gewesen, mit gleicher Kraft widerstehe und sich der ferneren Wirkung derselben widersetze." **

Dieser Aussöhnungs- und Gleichstellungsversuch kann aber nicht wohl als gelungen bezeichnet werden, theils weil die gewöhnliche oder „grobe", undurchdringliche Materie nach Euler's eigener Theorie keineswegs erst von den auf sie einwirkenden Kräften in denjenigen Zustand gebracht wird, in welchem sie vermögend ist, dem ferneren Einwirken derselben zu widerstehen — wie das beim Aether geschehen muss —, theils — und das ist das Wichtigste — weil die Widerstandsfähigkeit der groben Materie ja eine absolute, unbezwingliche und unveränderliche sein soll, während die des Aethers als eine Function des äussern Druckes dargestellt wird.

Dieser Unterschied ist so fundamental und macht die Coordination beider Qualitäten so unmöglich, dass, wie vorhin gezeigt, schon die Definition der Naturlehre sofort principiell scheidend dazwischen tritt, indem sie die erste als einen ihrer Grundpfeiler acceptirt, während sie der zweiten die Brauchbarkeit dazu ganz entschieden aberkennen muss.

---

* *l. c. p. 515.* p ist diejenige „Federkraft", welche der Dichtigkeit s entspricht. Für $p = 0$ ist $s = d$; n und k sind Constanten.

** *Op. Post., II, 515.*

Ebenso wenig, wie die allgemeine Massenattraction, deren Intensität stetigen Veränderungen* unterliegt, ebenso wenig, wie die von man-

* Dies ist, soviel ich weiss, bisher von Niemand geleugnet worden, mit Ausnahme von Herrn Hoppe (Grunert's Archiv 1879, 3. Heft, Lit.-Bericht S. 24). Nachdem dort einige Sätze meines Buches citirt worden sind, worin ähnliche Gedanken, wie die hier vorgetragenen, entwickelt wurden, fährt Herr Hoppe fort: „Und das sagt derselbe Schriftsteller, der die völlig constante Schwerkraft ein Räthsel nennt, sie zu erklären strebt und zu diesem Zwecke ein ganzes Buch schreibt u. s. w." Hier ist ein seltsames Missverständniss im Spiele. Was ist denn eigentlich bei der Schwerkraft das „völlig Constante"? Newton's Formel! Aber diese Formel ist doch nicht „die Ursache der Gravitationsphänomene"! — Kant äussert einmal (wenn ich mich recht erinnere, gegen Lambert): mit Hilfe des logischen Satzes vom Widerspruch könne man doch nicht verhindern, dass zwei Körper beim Zusammenstoss sich nicht gegenseitig durchdringen. Ebenso wenig wird Herr Hoppe mit Hilfe der Newton'schen Formel verhindern können, dass der Mond eines Tages von der Erde Abschied nimmt und in der Richtung der Tangente seiner Bahn das Weite sucht. Die Ursache, welche das thatsächlich verhindert, diese ist „das Räthsel von der Schwerkraft" (*causa gravitatis, tanto studio anquisita,* wie Euler sagt). Wenn man nun als diese Ursache ein allgemeines gegenseitiges Anziehungsvermögen der Materie hypostasirt und Newton's Formel als Norm für die Wirksamkeit dieser Causa betrachtet, ist letztere dann wirklich „völlig constant"? — Das allersicherste Mittel, dies zu entscheiden, ist in dem schon oben angeführten mathematischen Kriterium $\frac{df}{dt}=0$ gegeben. Es ist aber $\frac{df}{dt}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$, und da $\frac{df}{dr}$ bei Newton's Gesetz bekanntlich für jeden endlichen Werth von r nicht gleich Null ist, so kann $\frac{df}{dt}$ nur dann gleich Null werden, wenn $\frac{dr}{dt}$ gleich Null, d. h. wenn die Bahn der betreffenden Himmelskörper ein Kreis ist. Weil diese Bedingung nun in unserem Planetensystem thatsächlich nicht erfüllt ist, so kann man der Massenattraction, als Ursache der Gravitationsphänomene betrachtet, das Attribut der „völligen Constanz" nicht zuschreiben. Daraus folgt aber dann von selbst, dass Jeder, der mit Euler und Helmholtz die letzten „unveränderlichen Ursachen" der Ersckeinungen aufsuchen will, bei einem solchen Attractionsvermögen der Materie sich nicht beruhigen kann. — Auf die übrigen Aeusserungen Hoppe's einzugehen, ist natürlich hier der Ort nicht, und es dürfte überdies ziemlich zwecklos sein, da Herr Hoppe gleich zu Anfang seiner Besprechung der Meinung Ausdruck giebt, die ganze von mir behandelte Frage sei gar keine „ernst wissenschaftliche", sondern laufe trotz des Vorganges einiger sonst wohlverdienter Männer doch auf eine „Mystification" hinaus. — Obwohl ich es durchaus nicht für nöthig halte, den „ernst wissenschaftlichen" Charakter des behandelten Gegenstandes durch Autoritäten zu decken, so ist es doch nicht uninteressant, aus der recht ansehnlichen Reihe jener Männer, welche nach Hoppe in der Gravitationsfrage zu den Mystificirten (oder Mystificirenden?) gezählt werden müssen, sich einige Namen vorzuführen. Dieselbe umfasst u. A. Newton selbst, Huygens, Euler, Riemann, Thomson, Secchi etc. — von einer Anzahl lebender Physiker zu schweigen, die mir ihre Meinung nach Herausgabe meines Buches brieflich mitgetheilt haben. Hat Herr Hoppe diese ganze Schaar auf einer „Mystification" ertappt, so ist sein Verdienst gross.

chen Physikern zu Hilfe genommene Atomelasticität, deren Leistungsfähigkeit als Energie-Ersetzerin eine unerschöpfliche, deren actuelle Leistung aber je nach dem empfangenen Impuls eine variable sein soll, nach der oben angegebenen Definition der Naturlehre eine genügende letzte Basis für die Erklärung der Phänomene abgeben kann, ebenso wenig kann das Euler's Aether auch.

Undurchdringlichkeit und Beharrlichkeit sind Instanzen, welche unserm physikalischen Causalitätsbedürfniss Genüge leisten, weil sie constante Eigenschaften einer constanten Wesenheit bilden, also keinen Haken mehr darbieten, an welchen die Frage: „Woher diese Veränderung?" sich anheften liesse. — Freilich ist damit jenes uralte Geheimniss, „was denn da, wo Materie sich befindet, eigentlich im Raume spukt", noch nicht gelöst, aber mag man von diesem Geheimniss auch halten, was man immer will: sicher ist, dass seine Enträthselung nicht in die von Euler und Helmholtz definirte Naturlehre gehört. — —

Werfen wir zum Schluss noch einen kurzen Blick auf das Verhältniss der Euler'schen Gravitationstheorie zu anderen, früheren und späteren Behandlungen derselben Frage, so ist zunächst auffallend, dass Euler die Arbeit von Huygens gänzlich ignorirt. So sonderbar das bei einem Manne erscheinen muss, dem bei seinem langjährigen Aufenthalt in Berlin und Petersburg gewiss alle literarischen Hilfsmittel zu Gebote standen, so ist es doch noch befremdender, dass er sogar die optischen Arbeiten von Huygens, sehr zum Schaden seiner eigenen Optik, ganz ausser Acht gelassen hat.

In der Optik, wie in der Gravitationsfrage sind Euler und Huygens bei vielen Abweichungen im Einzelnen doch in der Hauptsache Bundesgenossen gewesen gegen die dominirenden Theorien der Engländer. Hätte der jüngere Mann sich dem älteren, statt ihn und seine Leistungen zu ignoriren, enger angeschlossen, so würde ohne Zweifel der Sieg viel rascher zu ihren Gunsten entschieden worden sein.

Der nächste Nachfolger Euler's war Lesage, er schaffte den flüssigen, expansiven Aether ab und ersetzte ihn durch eine atomistisch constituirte, bewegte Materie. Aber auch Lesage's Theorie wurde vergessen, sie tauchte unter in dem Meere des Alles beherrschenden Glaubens an die allgemeine Massenattraction. Erst in neuerer Zeit ist sie, und zwar merkwürdigerweise gerade von Engländern — nämlich von W. Thomson und S. Tolver Preston — wieder hervorgeholt und in organischen Zusammenhang mit der kinetischen Gastheorie gesetzt worden, nachdem kurz vorher Schramm unabhängig von Lesage auf Grund der erwähnten Gastheorie seine Gravitationslehre selbstständig entwickelt hatte. Ueberhaupt ist nicht zu leugnen, dass die glänzenden Resultate der kinetischen Untersuchungen von Krönig und Clausius

auch der Aetherlehre und damit zugleich der kinetischen Gravitationstheorie neuen Lebensodem eingehaucht haben.

Dieses lange verlassene Feld ist in den letzten Jahren wieder von Neuem cultivirt und zum Schauplatz einer regen Thätigkeit geworden, über die ich im ersten Theile meines obenerwähnten Buches einen Ueberblick zu geben versucht habe. Ich muss es bedauern, dass mir vor Herausgabe desselben die fast gänzlich verschollenen Arbeiten Euler's über die Gravitation unbekannt geblieben waren; erst die Abhandlung von Dr. Cherbuliez hat meine Aufmerksamkeit auf dieselben gerichtet. Da erkannte ich denn bald mit Ueberraschung, dass nicht allein mancher meiner Schritte genau in Euler's Fusstapfen gefallen war, sondern auch, dass ich gerade an dem Punkte weiter gearbeitet hatte, wo der von Euler für seine Nachfolger aufgepflanzte Wegweiser stand: „dass man die Ursache ergründe, warum die Kraft des Aethers von jedem gravitirenden Körper vermindert werde, darauf kommt Alles an".

Crefeld, 10. Februar 1880.

Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain.

Von

Dr. Siegmund Günther,

Gymnasialprofessor in Ansbach.

Dass für die richtige Erkenntniss der Leistungen hervorragender Geister deren briefliche Mittheilungen kaum mindere Wichtigkeit besitzen, als gedruckte Werke, dürfte heutzutage wohl allgemein zugestanden werden, und eine stattliche Reihe von Publicationen bewegt sich neuerdings auch in dieser Richtung. Mathematiker von der Art eines Euler, die es lieben, dem Leser einen unmittelbaren Einblick in die Art ihrer Geistesarbeit zu verstatten und ihm die einzelnen Schritte klarzulegen, welche sie zu ihren grossen Entdeckungen geführt haben, werden stets leichter verstanden werden, als solche, die, wie Newton und Gauss, durch eine streng synthetische Darstellung *a posteriori* ihren ursprünglichen, vielleicht mehr inductiven Gedankengang verhüllen. Ein Briefwechsel von Gauss wird also stets das höchste Interesse bieten. Was die seit längerer Zeit bekannte umfängliche Correspondenz mit Schumacher anbetrifft, so ist dieselbe für die astronomische Zeitgeschichte allerdings von grosser Wichtigkeit, und auch die Mathematik geht durchaus nicht leer aus; allein auf diesem Gebiete stand der eine der beiden Briefsteller so wenig dem andern gleich, dass gerade für den oben

angedeuteten Zweck den stattlichen drei Bänden nicht allzuviel zu entnehmen ist. Enneper hat erst kürzlich in dieser Zeitschrift (25. Jahrg., hist.-literar. Abth. S. 96 flgg.) einige drastische Belege hierfür beigebracht. Gerade für die jugendliche Periode des grossen Forschers fehlte es vollständig an Hilfsmitteln dieser Art; wusste man doch, dass damals Gauss, der nach Hankel's Ausspruch „auf einsamer Höhe" stand, so gut wie gar keine Beziehungen zu seinen eigentlichen Fachgenossen hatte und so ziemlich von Niemandem sein Streben verstanden und gewürdigt sah. Um so mehr Theilnahme musste es erregen, als Schering im Jahre 1877, gelegentlich der Centennalfeier, ein Schreiben von Sophie Germain an Gauss bekannt gab, welches selbst wieder nur als Bruchstück einer umfassenderen Correspondenz sich darstellte. Fünf Briefe aus derselben besitzt die königl. Gesellschaft zu Göttingen, dagegen war von Antworten aus Gauss' Feder durchaus Nichts bekannt, und selbst die Pariser Akademie vermochte, wie wir einer Notiz von Schering* entnehmen, die über diesem Bestandtheil des Schriftwechsels schwebende Dunkelheit nicht aufzuklären. Fürst Boncompagni in Rom dagegen, der schon so manchen kostbaren Fund gemacht und für die Wissenschaft verwerthet hat, war so glücklich, einen unter'm 30. April 1807 von Gauss an Mlle. Germain abgefertigten Brief ans Licht zu ziehen. Er erstand ihn am 2. December 1878 nebst anderen Autographen von dem Mailänder Ingenieur Thomas Montanari und liess es sich angelegen sein, ihn durch äusserst gelungene Reproduction einem grösseren Kreise zugänglich zu machen**. Ganz das Gleiche geschah einige Monate später mit den fünf erwähnten, zu Göttingen aufbewahrten Originalbriefen***, und so haben wir denn, dank der Liberalität des hochverdienten römischen Gelehrten, die ganze Correspondenz, soweit sie sich vorerst übersehen lässt, zu unserer Verfügung. Unser Bericht wird nicht die chronologische Folge der Publicationen, wohl aber jene der Briefe selbst einhalten, denn da mit Gauss' Entgegnung der Verkehr so ziemlich geschlossen ist und nur noch ein einziges Schreiben von Sophie Germain nach jenem Termin geschrieben ward, so glauben wir lediglich auf diese Weise die wünschenswerthe Uebersichtlichkeit erzielen zu können.

Der erste Brief, vom 21. November 1806 datirt, trägt die Unterschrift: „*votre très humble serviteur et très assidu lecteur Le Blanc*"; dieses

* E. Schering, Bemerkungen über Gauss' Brief vom 30. April 1807 an Sophie Germain, Nachrichten von der königl. Gesellschaft zu Göttingen, Nr. 16.

** *Lettera inedita di Carlo Federico Gauss à Sofia Germain pubblicata da B. Boncompagni. Firenze. Calcografia e Autografia Achille Paris. MDCCCLXXIX.*

*** *Cinq lettres de Sophie Germain à Charles-Frédéric Gauss publiées par B. Boncompagni d'après les originaux possédés par la société royale des sciences de Goettingen. Berlin. Institut de photolithographie des Frères Burchard. MDCCCLXXX.*

Pseudonym wählte die Dame aus einem, wie sich später zeigen wird, ihre Bescheidenheit ehrenden Grunde. Der weitaus überwiegende Theil des Inhalts ist angefüllt mit Betrachtungen über die „*Disquisitiones Arithmeticae*“, welche der Briefsteller mit wahrer Inbrunst studirt, ohne freilich, wie er klagt, sein Auffassungsvermögen mit seiner Lernbegier stets auf gleicher Höhe erhalten zu können. Zuerst ist die Rede von der Gleichung*

$$\frac{4(x^u-1)}{x-1} = Y^2 \pm uZ^2,$$

welche selbst dann noch richtig bleiben soll, wenn linker Hand u durch die Potenz u^s (u Primzahl, s beliebige ganze Zahl) ersetzt werde. Zwei Beweise dieses verallgemeinerten Lehrsatzes befanden sich bei dem Briefe, scheinen jedoch nicht mehr vorhanden zu sein.

Demselben Artikel der „Disquisitiones“ glaubt Le Blanc einen Beweis für die Richtigkeit des Fermat'schen Lehrsatzes entnehmen zu können, welchem zufolge die Identität

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$$

für keinen ganzzahligen Exponenten $\lambda \geqq 3$ durch ganze Zahlen befriedigt werden kann; wenigstens würde dieser Beweis für alle $\lambda = (8k+7)-1$ gelten, wofern die in Klammern stehende Zahl eine Primzahl wäre. Eine weitere wichtige Anwendung gestattet die obige Gleichung, wenn es sich um die von Lagrange nicht gelöste Aufgabe handelt, den Ausdruck

$$A \equiv s^{10} - 11(s^8 - 4s^6r^2 + 7s^4r^4 - 9s^2r^6 + r^8)r^2$$

auf die Form $(t^2 - 11u^2)$ zu bringen; mit Hilfe jener findet sich nämlich leicht**

$$A = (s^5 - 11sr^4)^2 - 11(s^4 - 3s^2r^2 - r^4)r^2.$$

Schliesslich wird noch gezeigt, dass und wie aus obiger Gleichung eine zweite herzuleiten sei, in welcher zur Linken Pluszeichen statt der Minuszeichen stehen. Eine etwaige Erwiderung soll an Herrn Silvestre de Sacy in Paris gerichtet werden; dieser berühmte Orientalist hatte nämlich die Rolle des Vermittlers übernommen.

Auch der zweite Brief (21. Juli 1805) ist theilweise der Zahlentheorie gewidmet; Le Blanc knüpft an das von Gauss nur angedeutete Theorem an, dass eine ternäre Form, deren „Determinante“*** Null,

---

* Vergl. betreffs dieser Relation auch die bedeutenden Arbeiten von Gauss' Lieblingsschüler v. Staudt (Borchardt's Journal, 67. Bd.) und von Zolotareff (*Nouvelles Ann. de Mathém., 2. sér.* XI. Bd.).

** Statt dieses Ausdruckes ist S. 7 Z. 4 v. o. der Photolithographie irrthümlich

$$(s^5 - 11sr^4)^2 - 11(s^4 - 3s^2r^2 - r^4)^2$$

geschrieben. *Ibid.* Z. 2 v. o. ist statt $1115 + 6$ vielmehr $(115 + 6)$ zu lesen.

*** S. Germain schreibt, wie wir, „*déterminante*“, während Gauss stets an seiner masculinen Form festgehalten hat.

einer binären Form äquivalent sei. Den zweiten Theil des grossen Werkes, so fährt er fort, erwarte er mit Sehnsucht und bedaure, dass derselbe vorläufig noch nicht erscheinen könne. Es scheint, dass Gauss daran gedacht hatte, betreffs dieser Fortsetzung mit einer französischen Verlagsfirma in Verbindung zu treten, denn sein Correspondent benachrichtigt ihn, dass der Buchhändler Duprat, über dessen Verhältnisse er Erkundigungen einzog, fallirt habe. Le Blanc wendet sich dann zu Gauss' astronomischen Studien, welche gewiss wesentlich auf die Erfindung neuer Methoden gerichtet seien, und giebt eine ziemlich detaillirte Inhaltsanzeige von dem unlängst erschienenen, für Gauss also wohl noch neuen vierten Bande der „*Mécanique céleste*". Auch über Legendre's Bahnbestimmung der Cometen theilt er Einiges mit. Derselbe gehe auch von der Gleichung

$$r^2 = R^2 - 2R\varrho\cos c + \varrho^2$$

aus, wo R die Entfernung der Erde von der Sonne, r und ϱ diejenige des Cometen von der Sonne und von der Erde, c endlich den von den Gesichtslinien an der Erde eingeschlossenen Winkel bedeutet, und komme für $r > R$ im Ganzen auf Lagrange's früheres Verfahren zurück; für den Fall $r < R$ dagegen gelange er Lagrange gegenüber dadurch zu beträchtlichen Vereinfachungen, dass er der Gleichung die Form

$$r^2 = R^2 \sin^2 c + (r - R\cos c)^2$$

ertheile. Hiervon werde dann eine Anwendung auf die Cometen von 1769 und 1781 gemacht.

Unter'm 16. November 1805 erstattet Le Blanc seinen Dank für die Zusendung einer Gauss'schen Abhandlung; welche dies war, sind wir leider nicht in der Lage festzustellen. Eine interessante wissenschaftliche Bemerkung bezieht sich ferner auf die Determinanten der adjungirten Formen. Besteht die ursprüngliche Form, deren Determinante D ist, aus n Variablen, so soll nach einem, allerdings blos vorläufigen Analogieschlusse die Determinante der adjungirten Form den Werth D^{n-1} besitzen. Bekanntlich hat dieser, hier blos geahnte Satz eine weit allgemeinere Geltung, indem er nicht blos für die von Gauss als „Determinanten" bezeichneten Discriminanten, sondern überhaupt für all' jene combinatorischen Aggregate richtig ist, welche wir gegenwärtig „Determinanten" nennen. Der Schluss des Briefes ist geschäftlicher Natur und bestätigt, dass die Verhältnisse des Verlegers Duprat, an welchen Gauss aus erwähnten Gründen lebhaften Antheil genommen zu haben scheint, in der That sehr verworrene und hoffnungslose seien.

Nach zwei Jahren erst (20. Februar 1807) folgt ein vierter, diesmal jedoch nur ganz kurzer Brief, welcher mit dem Incognito der Schreiberin bricht und den Adressaten über den wahren Sachverhalt aufzuklären bestimmt ist. Veranlasst wurde sie zu diesem Schritte durch eine Reihe von Vorgängen, welche wir uns aus den kurzen Andeutungen dieses und

des gleich nachher zu besprechenden Schreibens von Gauss so ziemlich reconstruiren können. Land und Stadt Braunschweig litten damals unter den Folgen eines unglücklichen Feldzuges; Sophie Germain wusste dies und fürchtete für den von ihr verehrten Braunschweiger Gelehrten. Sie benützte demgemäss ihre Bekanntschaft mit einem der Führer der Occupationsarmee, dem General Pernetty, und bat denselben, sich bei vorkommender Gelegenheit für Gauss zu verwenden. Das that Pernetty denn auch, allein der hohe patriotische Stolz, welcher den deutschen Mann beseelte und ihn, wie wir anderweit wissen, jedwede Gunstbezeigung des französischen Gouvernements ablehnen liess, verhinderte ihn, von den ihm angetragenen guten Diensten des Generals Gebrauch zu machen. Natürlich aber nannte nun Letzterer den Namen seiner Auftraggeberin und diese gerieth so in die Lage, ihrem Correspondenten mittheilen zu müssen, dass die ihm unbekannte Sophie Germain mit seinem alten Freunde Le Blanc identisch sei.* Sie habe, meint sie, den lächerlichen Eindruck gefürchtet, welcher sich gewöhnlich mit einer „*femme savante*" verbinde, und deshalb einen fremden Namen vorgeschützt; jetzt giebt sie ihre wirkliche Adresse an und giebt ihrer Freude darüber Ausdruck, dass die Schrecknisse des Krieges den Fortgang der von ihr mit Recht so hoch gestellten Untersuchungen auf dem Gebiete der „*Arithmétique sublime*" nicht aufzuhalten vermocht hätten.**

Dieser Brief musste natürlich eine rasche Antwort hervorrufen; sie ist es, die uns (s. o.) durch Fürst Boncompagni's Findertalent aufbehalten ist. Geschrieben ward sie am 30. April 1807, also blos neun Wochen nach Abgang des ersten Schreibens; dies ist für die damaligen, durch die Kriegführung noch erheblich verschlechterten Verkehrsverhältnisse gewiss kein langer Zwischenraum. Und diese Eile ist begreiflich, denn man sieht es dem Briefe an, dass Gauss lebhafte Sympathien für seinen Correspondenten hegte, der sich ihm jetzt in so ganz unerwarteter Gestalt darstellte. So lässt er es denn auch, seinen sonstigen Gepflogenheiten zuwider, an Complimenten für die wissbegierige Dame nicht fehlen. War dies doch, wie auch Schering hervorhebt, das erste Zeichen warmen und wahren Verständnisses für seinen Ideengang, das ihm hier entgegentrat, und ging doch aus all' den sachlichen Bemerkungen der Briefe hervor, dass sein Werk nicht blos bewundernd angestaunt, sondern auch durchdrungen, in einzelnen Punkten sogar durch kleine Verbesserungen

---

* S. Germain hatte zu jener Zeit noch Nichts im Druck erscheinen lassen; vielmehr geschah dies erst viel später, im Jahre 1816, nachdem sie die von der Pariser Akademie gestellte Preisfrage über die Schwingungen elastischer Platten gelöst hatte.

** Auch diesem Briefe war, anscheinend auf besonderem Blatte, eine Note rein wissenschaftlichen Inhalts beigelegt, deren Verlust wir um so mehr bedauern müssen, als sich Gauss in seiner Entgegnung darauf bezieht.

vervollkommnet war. Freilich liebte es Fräulein Germain, ein wenig rasch zu generalisiren und Theoreme aufzustellen, die vor einer strengen Kritik nicht Stand halten konnten. Sie in dieser Beziehung zu corrigiren, war nunmehr Gauss' Aufgabe, und er entledigte sich ihrer in der schonendsten Weise. Da seine bezüglichen Erklärungen auch jetzt noch unsere Aufmerksamkeit erregen, so erlauben wir uns, etwas ausführlicher dabei zu verweilen.

In der oberwähnten abhanden gekommenen Beilage zum vierten Briefe hatte S. Germain es anscheinend als wahrscheinlich hingestellt, dass, wenn die Summe der n^{ten} Potenzen zweier Zahlen in der Form (h^2+nf^2) dargestellt werden könne, ein Gleiches auch für die Zahlen selbst gelte. Gauss erinnert zuerst daran, dass zwar $15^{11}+8^{11}=1595826^2+11 \times 745391^2$ sei, dass dagegen die Summe $15+8=23$ nicht auf die Form (x^2+11y^2) zu bringen sei. Einem zweiten Aperçu der Briefstellerin zufolge müsste, wenn ein Factor der Form (y^2+nz^2), wo h eine Primzahl, durch das Symbol $(1, 0, n)$ ausdrückbar wäre, der andere von der nämlichen Form sein. Auch hier wird an einem Zahlenbeispiel die Unrichtigkeit der Vermuthung nachgewiesen, ausserdem aber durch eine strenge Analyse des angeblichen Beweises aufgezeigt, dass und wo in demselben ein Fehlschluss steckt. Alsdann geht Gauss zu seiner eigentlichen Lieblingsbeschäftigung, derjenigen mit der höheren Arithmetik, über, von welcher ihn astronomische Arbeiten — ein Zoll der Dankbarkeit gegen seinen unglücklichen Herzog — ganz wider Willen abgezogen hätten. Seine Eröffnungen verdienen besonders um deswillen beachtet zu werden, weil sie uns einen Einblick in die bisher nur mangelhaft bekannte Chronologie der Gauss'schen Arbeiten verstatten.* Eine vollständige Uebersicht über seine neuen Errungenschaften will er übrigens nicht geben, sondern nur zur Probe einige Lehrsätze im Enoncé „*qui pourra servir d'un petit echantillon*".

Diese beiden Lehrsätze sind folgende: Ist p eine Primzahl $(3n+1)$, so ist ± 2 ein kubischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p oder aber $4p$ auf die Form (x^2+27y^2) gebracht werden kann; ist p eine Primzahl $(8n+1)$, so ist p ein biquadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p die Form (x^2+24y^2) annehmen kann oder nicht. Man

---

* Schering (a. a. O. S. 384) sagt darüber: „Durch diese Angabe wird der Zeitpunkt für die darin genannten Entdeckungen viel genauer festgesetzt, als es durch die Veröffentlichungen und durch die handschriftlichen Aufzeichnungen von Gauss bisher geschehen konnte. Es war nicht möglich, mehr über die Zeit jener Entdeckungen mit Bestimmtheit zu sagen, als dass einige Lehrsätze aus seiner Theorie der biquadratischen Reste vor der Ausarbeitung der *Theoria motus corporum coelestium* niedergeschrieben seien, wie ich dieses ausführlicher in den Bemerkungen S. 375 des II. Bandes meiner Redaction von Gauss' Werken angegeben habe."

erkennt hier bereits die Keime jener berühmten Theorie, welche in den Jahren 1817 und 1831 die Gelehrtenwelt als ein geschlossenes System überraschte. Auch ein Satz von den quadratischen Resten wird der Freundin zum Beweise vorgelegt. Nebenbei berichtigt Gauss einen von ihm in den „Disquisitiones" begangenen Schlussfehler; er konnte freilich sicher sein, dass derselbe ohne diese seine Correctur noch für lange unaufgefunden geblieben wäre.

Einige Schlussworte beschäftigen sich mit den zur Zeit gerade vorliegenden Untersuchungen über astronomische Gegenstände. Gauss hatte soeben die Bahnbestimmung des neuen Planetoiden (Vesta) vollendet und giebt die numerischen Werthe für einige Elemente an. Da der neue Himmelskörper viel heller sei, als die drei älteren Asteroiden*, so dürfe man darauf hoffen, ältere Beobachtungen desselben in den Sternverzeichnissen von Lalande und vielleicht sogar von Flamsteed anzutreffen. Ein grösseres selbstständiges Werk über Bahnbestimmung sei im Manuscript bereits fertig, da es aber deutsch geschrieben sei, so halte es schwer, einen Verleger dafür zu gewinnen. Unterzeichnet ist dieser Brief: „*Brunsvic ce* 30 *April* (sic) 1807, *jour de ma naissance. Votre plus sincere Admirateur Chr. Fr. Gauss.*"

Mit S. Germain's Antwortschreiben vom 27. Juni 1807 schliesst, wie bereits erwähnt, die Sammlung ab. Sie erkennt Gauss' Richtigstellung ihrer Hypothesen bereitwillig und mit Dank an. Um so höher wisse sie auch den Werth der ihr in aphoristischer Form mitgetheilten Lehrsätze zu schätzen, da sie selbst sich schon längst bemüht habe, die Reste von höheren Potenzen, als von der zweiten zu studiren. Sehr weit vorzudringen, sei ihr freilich nicht gelungen, indess habe sie doch einige isolirte Theoreme gefunden, welche sie sich dem competentesten Beurtheiler zu unterbreiten erlaube. Näher auf dieselben einzugehen, müsste einem besondern Aufsatze vorbehalten bleiben; jedenfalls bekunden die Sätze die ungewöhnlich grosse Vertrautheit der Verfasserin mit den durch Gauss in die Zahlentheorie eingeführten Methoden. —

Wir sind mit unserem Referat zu Ende. Ein künftiger Historiker, der die Geschichte der Mathematik im beginnenden 19. Jahrhundert zu seinem Specialstudium macht, wird aus dem Briefwechsel Gauss-Germain die werthvollsten Anregungen schöpfen. Aber auch jeder Leser dieses Berichtes, der mehr nur an den Schicksalen der beiden handelnden Personen Antheil nimmt, wird, so hoffen wir, mit uns der stets opferbereiten Mühwaltung des hochverdienten Mannes Dank wissen, welcher diese wichtigen Documente dem Staube der Archive entrissen hat.

---

* Dies hat seine Richtigkeit, denn man weiss jetzt, dass Vesta unter allen kleinen Planeten den grössten Durchmesser hat und unter besonders günstigen Umständen selbst dem unbewaffneten Auge sichtbar werden kann.

Recensionen.

Il Carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss. Nota di A. Genocchi. Torino, Stamperia reale della ditta G. B. Paravia e Comp. di J. Vigliardi. 1880. 16 S.

Im Anschluss an unsern eigenen Aufsatz über den vorstehend genannten Briefwechsel möchten wir auch noch auf den denselben Gegenstand eingehend behandelnden Essay von Herrn Angelo Genocchi hinweisen. Abgesehen von einer genauen und lehrreichen Inhaltsangabe enthält letzterer auch interessante eigene Bemerkungen. So hat der Verfasser z. B., unterstützt durch den Hüter des Gauss'schen Nachlasses, Herrn E. Schering, den Beweis zu dem von Gauss angedeuteten Specialfalle des Fermat'schen Lehrsatzes, $x^n + y^n = z^n$ betreffend, eingesehen und als unzureichend erkannt. Er bemerkt ferner, dass eines der im Briefe vom 20. Februar 1807 enthaltenen Aphorismen das gewöhnlich als „Gauss'sches Lemma" bezeichnete und von Schering 1876 verallgemeinerte Theorem betrifft, welches beim Beweise des Reciprocitätsgesetzes eine Rolle spielt. Weiter wird auf Sophie Germain's spätere zahlentheoretische Studien aufmerksam gemacht, deren ein Legendre ehrende Erwähnung thun durfte. An einer Reihe merkwürdiger historischer Beispiele zeigt der Verfasser ferner, wie leicht auf diesem Gebiete selbst grosse Geister in Irrthümer verfallen, so z. B. Fermat und Euler. Schliesslich erinnert Genocchi daran, dass wenigstens in Frankreich die „Disquisitiones" eine günstige Aufnahme bei Männern wie Laplace, Lacroix, Legendre und Lagrange fanden, welch' Letzterer speciell der Gauss'schen Behandlung der binomischen Gleichungen Worte warmer Anerkennung zollt (Mathem. Werke, herausgegeben von Crelle, 3. Bd., S. 497). Anhangsweise ist das von Gauss im Jahre 1833 an die Turiner Akademie bei seiner Ernennung zum auswärtigen Mitgliede gerichtete Dankschreiben abgedruckt worden.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Elemente der analytischen Geometrie der Ebene zum Gebrauche in den oberen Classen der Mittelschulen und anderen höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht verf. von Dr. Andreas Wretschko. Brünn 1880, bei Carl Winiker. 94 S.

Die Bestimmung, welche der Verfasser seinem Büchlein in dem etwas volltönenden Titel zuweist, steht in einigem Widerspruche zu den wesentlich bescheideneren Worten der Vorrede, es sei in erster Reihe ein Schulbuch, welches der Oeffentlichkeit übergeben werde, „mit Ausscheidung alles überflüssigen gelehrten Apparates", und es sei der Lehrstoff demgemäss nur in jenem Umfange aufgenommen, in welchem er in der gegebenen Zeit wirklich absolvirt werden könne und wie es der vorgeschriebene Lehrplan verlange. In dieser Beschränkung mag die kleine Schrift sich zweckmässig erweisen, wenn sie auch von der bereits übergrossen Zahl ähnlicher Schriften nicht so bedeutende Unterscheidungsmerkmale besitzt, dass die Frage nach der Berechtigung ihres Erscheinens unbedingt bejaht werden müsste. Zweierlei können wir lobend hervorheben. Erstlich die zahlreichen, meistens rationale Ergebnisse liefernden Zahlenbeispiele; zweitens die Betonung der doppelten Erforderniss eines geometrischen Ortes, dass alle seine Punkte und nur seine Punkte gegebenen Bedingungen genügen. Auf S. 27, 55, 70 ist davon für die Gleichung der Parabel, der Ellipse, der Hyperbel die nöthige Beweisführung angedeutet; bei der geraden Linie dagegen vermissen wir S. 9 diese Ergänzung. Wir vermissen ferner als unentbehrlich auf S. 43 die Bemerkung, beziehungsweise den analytischen Beweis dafür, dass drei Punkte eine Kreislinie nur dann bestimmen können, wenn sie nicht in gerader Linie liegen. Ob Eleganz der Formeln nach der Ansicht des Verfassers zu dem „überflüssigen gelehrten Apparate" gehört? Fast will es so scheinen, wenn man auf S. 24 $f = \frac{x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_1)}{2}$, auf S. 48 $y_1 = \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a+r+\varrho)(a+r-\varrho)(\varrho+a-r)(\varrho-a+r)}$ liest mit scheinbar absichtlicher Vermeidung der dem Gedächtnisse sich weit leichter einprägenden symmetrischen Anordnungen. Den Namen Berührungslinien für Tangentenlinie, Normallinie, Subtangente und Subnormale gemeinsam zu gebrauchen (S. 27), bildet gleichfalls eine, wie uns scheint, nicht ganz berechtigte Eigenthümlichkeit.

CANTOR.

La philosophie scientifique. Science, art et philosophie. Mathématiques, sciences physiques et naturelles, sciences sociales, art de la guerre par H. Girard, capitaine en premier du génie, ancien professeur de mathématiques supérieures, professeur d'art militaire et de fortification. Paris et Bruxelles 1880. IX, 406.

Der Titel des Werkes, über welches wir wenige Worte zu sagen wünschen, ist ein ziemlich umfassender, und dennoch giebt er nicht über alle Dinge Aufschluss, welche der Verfasser in das Bereich seiner Betrachtungen hineinzieht, ein Bereich so weiten Umfanges, dass sogar

Erörterungen über den Werth Richard Wagner's und seiner Musik, Hahnemann's und der Homöopathie darin Platz finden. Allein ein französisches Sprichwort, dessen wir uns in Anbetracht dessen, dass es um ein in französischer Sprache geschriebenes Buch sich handelt, wohl bedienen dürfen, sagt: „*qui trop embrasse, mal étreint*“. Der Verfasser, glauben wir, hätte gut gethan, dessen eingedenk zu bleiben. Wir sind selbstverständlich nicht in der Lage, ausführlich auf die allgemeinen philosophischen Ansichten von Herrn Girard, mit welchen wir als Laie sehr sympathisiren, einzugehen, und dürften wir das, so wäre hier nicht der geeignete Ort dazu. Wir müssen uns die Beschränkung auferlegen, nur Einiges hervorzuheben, was auf Mathematik sich bezieht. Das Object ihrer Untersuchungen entnimmt nach Herrn Girard die Mathematik der Aussenwelt, der Erfahrung, und darin stimmen wir ihm entschieden bei. Die Geometrie insbesondere entnimmt nach ihm der Erfahrung einige Begriffe und Thatsachen, vor Allem den Begriff des Punktes, der Ortsveränderung eines Punktes durch Bewegung und der geradlinigen Trägheit, d. h. des Gesetzes, dass ein in Bewegung gesetzter Punkt stets geradlinig sich bewegt, wenn nicht bestimmte Gründe und Anregungen ein Hinderniss bilden. Damit ist für ihn die gerade Linie selbst Erfahrungsbegriff, womit wir wieder uns einig wissen. Für die Geometrie der Ebene tritt noch ein Erfahrungssatz als wesentlich hinzu: der Ort der Punkte einer Ebene, die eine gleiche Entfernung von einer Geraden besitzen, ist wieder eine Gerade, und mit diesen Elementen will er die Geometrie aufgebaut wissen. Hier würde nun für den Mathematiker der eigentlich interessante Theil des betreffenden Capitels beginnen. Wie denkt Herr Girard sich die Reihenfolge der geometrischen Sätze, wie deren Entwickelung? Diese Antwort bleibt er uns schuldig, er vertröstet auf künftig vielleicht erscheinende Schriften und begnügt sich neben den angeführten Andeutungen mit kritischen Bemängelungen der heutigen Geometrie. Auch hier heben wir Einiges hervor. Mit Recht tadelt es der Verfasser, dass in den elementaren Geometrien die Berührungslinie an den Kreis als eine Gerade definirt werde, die denselben in einem, die Secante als eine solche, die ihn in zwei Punkten schneide, während derselbe Schüler beim Eintritt in die höhere Geometrie erfahre, dass gerade umgekehrt die Secante einer Curve nur einen, die Berührungslinie zwei Punkte mit ihr gemein haben. Auch die mehr als dreidimensionalen Räume werden getadelt, und nicht mit Unrecht, wie uns scheint, wofern man ausser Acht lässt, dass deren Benutzung nur bequeme Wortformen für Eigenschaften von Functionen zu liefern bestimmt ist, nicht aber sinnlich (wenn auch nicht mit menschlichen Sinnen) erfassbaren Gebilden das Daseinsrecht gewährleisten soll. In einem andern Capitel geht Herr Girard mit dem Unendlichkleinen zu Gericht, welches er zu Gunsten einer kinematischen Darstellung der Differentialrechnung, wie

Herr Lamarte sie in den von der belgischen Akademie herausgegebenen Abhandlungen von 1861 und 1863 mit Erfolg versucht hat, aus der Mathematik verbannt wissen will. Dem Grundgedanken nach mag Herr Girard ja wieder Recht haben, aber auf die wenn einmal richtig verstandene unbedenkliche Redeform des Unendlichkleinen für das Werden einer Veränderung wird der Mathematiker nicht leicht wieder verzichten, nachdem sie uns allen zur zweiten Natur geworden ist, oder es müsste Herr Girard oder ein Anderer positiv zeigen, wie man in allen Fällen bequem und leicht ohne jenes Hilfswort auskomme. An diesen wenigen Beispielen werden unsere Leser erkennen, dass es ein auch für den Mathematiker interessantes Buch ist, welches wir hier genannt haben, dass aber dessen starke Seite in der tadelnden Kritik des Bestehenden liegt, während das sprichwörtlich weniger leichte Bessermachen vermisst werden dürfte.

Cantor.

La science de la quantité, précédé d'une étude analytique sur les objets fondamentaux de la science par Lucien Buys, capitaine du genie répétiteur à l'école militaire de Belgique. Bruxelles 1880. *Librairie Européenne C. Muquardt Merzbach & Falk.* 563 S.

Es ist, wie man aus der Angabe der Seitenzahl ermisst, ein umfangreiches Buch, welches uns vorliegt. Dem Inhalte können wir gleichen Reichthum nicht nachrühmen. Abgesehen von einer philosophischen Einleitung, in welcher der Verfasser sich als Mitglied der Krause'schen Schule erklärt, einer Einleitung, die sich demnach unserer Besprechung entzieht, wofern wir über das räumlich vorwiegende Mathematische unser Urtheil abgeben wollen, finden wir ausschliesslich Dinge, deren kennzeichnende Eigenschaft in der absichtlichen Verbannung der complexen Grössen besteht. Das Zeichen $\sqrt{-1}$ kommt in dem ganzen Buche nicht vor, dagegen ist von unmöglichen Gleichungen, d. h. solchen, die keine (reellen) Wurzeln zulassen u. s. w., vielfach die Rede. Warum der Verfasser so handelt, sagt er am Kürzesten und Bündigsten in einer Anmerkung auf S. 351: „*nous rejetons tout subjectivisme ou toute imaginarité*". *Sapienti sat!* Unseren Lesern überlassen wir es, zu erwägen, ob es sich lohne, ein Werk näher kennen zu lernen, in welchem von diesem seit mehr als 300 Jahren nur noch geschichtlich denkwürdigen Standpunkte aus die Arithmetik, Algebra, algebraische Analysis und Differentialrechnung behandelt ist. Die Integralrechnung spart Herr Buys auf künftig sich auf und will nur vorher eine „*Science de l'espace dans laquelle nous aurons à étudier des fonctions particulières*" veröffentlichen, was er in Bälde thun zu können hofft.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. October bis 15. November 1880.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahr 1879. Berlin, Dümmler. 22 Mk.

Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 13. Bd. 3. Abth. München, Franz. 10 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, naturwissenschaftl. Cl. Abth. II, 1880, Heft 5—7. Wien, Gerold. 13 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; herausgeg. v. C. Ohrtmann, F. Müller u. A. Wangerin. 10. Bd., 1878, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 4 Mk.

Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern, herausgeg. v. W. v. Bezold u. C. Lang. 2. Jahrg., 1880, 1. u. 2. Heft. München, Ackermann. 20 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Bd.: Von den ältesten Zeiten bis z. J. 1200 n. Chr. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Reine Mathematik.

Escherich, G. v., Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Kunerth, A., Berechnung der ganzzahligen Wurzeln unbestimmter quadratischer Gleichungen etc. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

Glaser, St., Beitrag zur Potentialtheorie. Bonn, Behrendt. 1 Mk. 50 Pf.

Kantor, S., Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen der Ebene. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Wendt, A., Zur Theorie der geodätischen Linie auf einer Fläche zweiten Grades. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 20 Pf.

Neumann, C., Ueber die peripolaren Coordinaten. Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 50 Pf.

Schröter, H., Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Marx, W., Ueber eine Fläche vierter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt und ihre Anwendung zur Lösung der Aufgabe: drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden. Nürnberg, Korn. 3 Mk.

Simony, O., Ueber die Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen Bändern durch in sich zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Graefe, F., Erweiterungen des Pascal'schen Sechsecks und damit verwandter Figuren. Wiesbaden, Limbarth. 1 Mk. 60 Pf.

Meyer, J. F., Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Hannover, Helwing. 3 Mk.

Schrader, W., Mathematisches Formelbuch. Halle, Schrödel & Simon. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

Helmert, R., Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Einleitung und 1. Theil: Die mathemat. Theor. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Bauernfeind, C. M. v., Ergebnisse aus den Beobachtungen der terrestrischen Refraction. 1. Mitth.: Feststellung von Thatsachen. (Akad.) München, Franz. 5 Mk.

Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. 4. Bd. Berlin, Mittler & Comp. 15 Mk.

Jordan, W., Mathematische und geodätische Hilfstafeln mit Kalendarium für das Jahr 1881. Stuttgart, Wittwer. 2 Mk. 50 Pf.

Doll, M., Lehrbuch der praktischen Geometrie. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Fialkowsky, N., Kurzgefasste praktische Geometrie. Wien, Pichler. 2 Mk. 40 Pf.

Abich, H., Cyclus fundamentaler barometrischer Höhenbestimmungen in Armenien. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 70 Pf.

Salcher, P., Elemente der theoretischen Mechanik. Wien, Gerold. 5 Mk. 20 Pf.

Schell, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Neumann, C., Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. Leipzig, Hirzel. 2 Mk. 40 Pf.

Effert, G., Grundriss der mathematischen und physikalischen Geographie. Würzburg, Stahel. 1 Mk. 10 Pf.

Brünnow, F., Lehrbuch der sphärischen Astronomie. 4. Aufl. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Struve, O., *Etudes sur le mouvement relativ des deux étoiles de* 61 *Cygni.* (Akad.) Leipzig, Voss. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Coglievius, D., Centigrad-Photometer. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk. 40 Pf.

Grosse-Bohle, A., Ueber das optische Verhalten des Senarmontits und der regul. arsenigen Säure. Lüdinghausen, Rademann. 2 Mk.

Planck, M., Ueber Gleichgewichtszustände isotroper Körper in verschiedenen Temperaturen. München, Ackermann. 1 Mk. 40 Pf.

Bell, A. G, Das Photophon. Vortrag. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Mk.

Hepperger, J. v., Ueber den Einfluss der Concentration der Flüssigkeiten auf die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Jenkin, F., Elektricität und Magnetismus. Uebersetzt von F. Exner. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

Schlemüller, W., Vier physikalische Abhandlungen. Prag, Dominicus. 80 Pf.

Reitlinger, E. u. F. Wächter, Ueber elektrische Ringfiguren und deren Formveränderung durch den Magnet. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Emsmann, A. H., Elemente der Physik. 3. Aufl. Leipzig, Wigand. 3 Mk.

Kohlrausch, F., Leitfaden der praktischen Physik. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 5 Mk. 60 Pf.

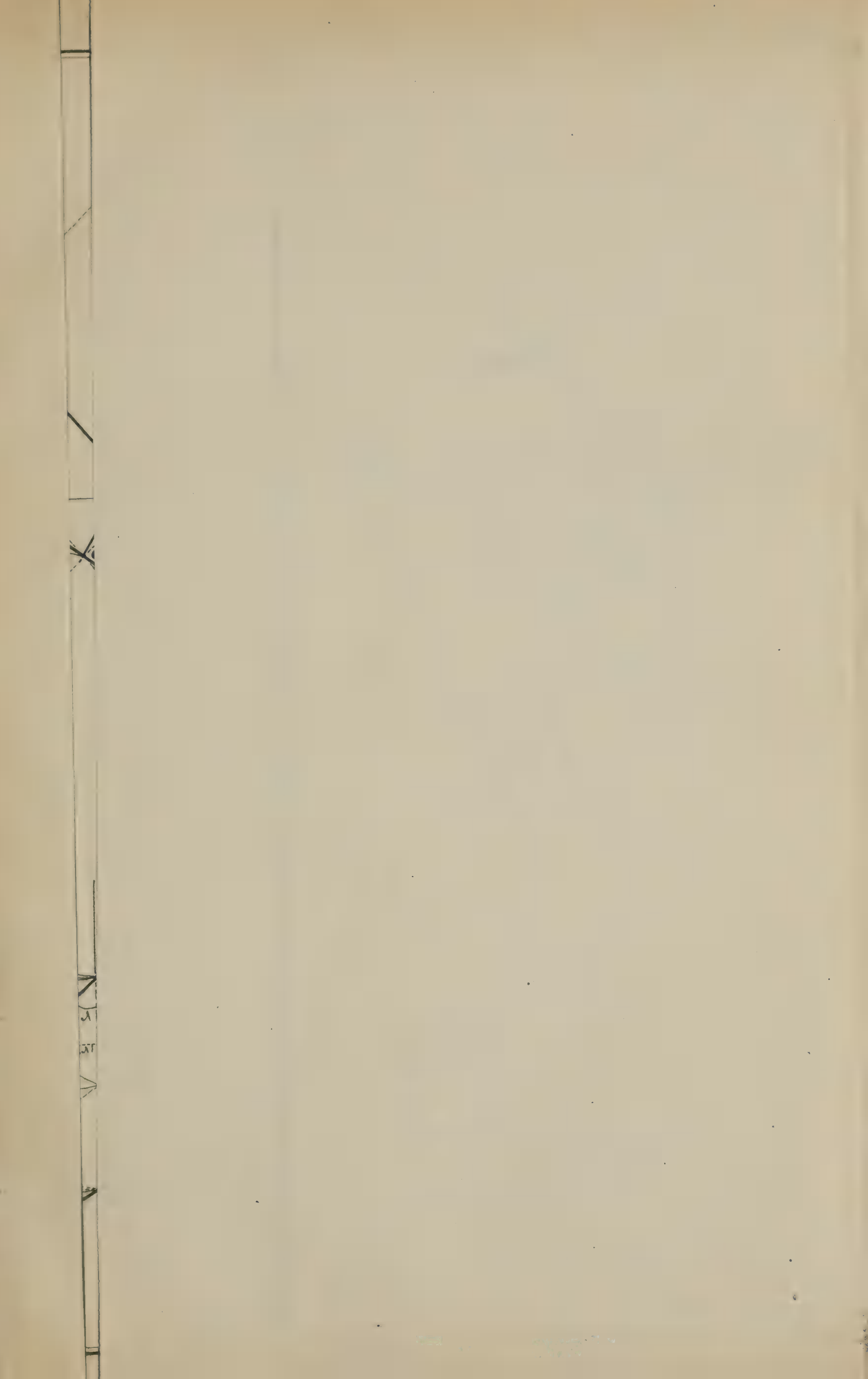
Weinhold, A. F., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentiren in höheren Schulen. Leipzig, Quandt & Händel. 6 Mk.

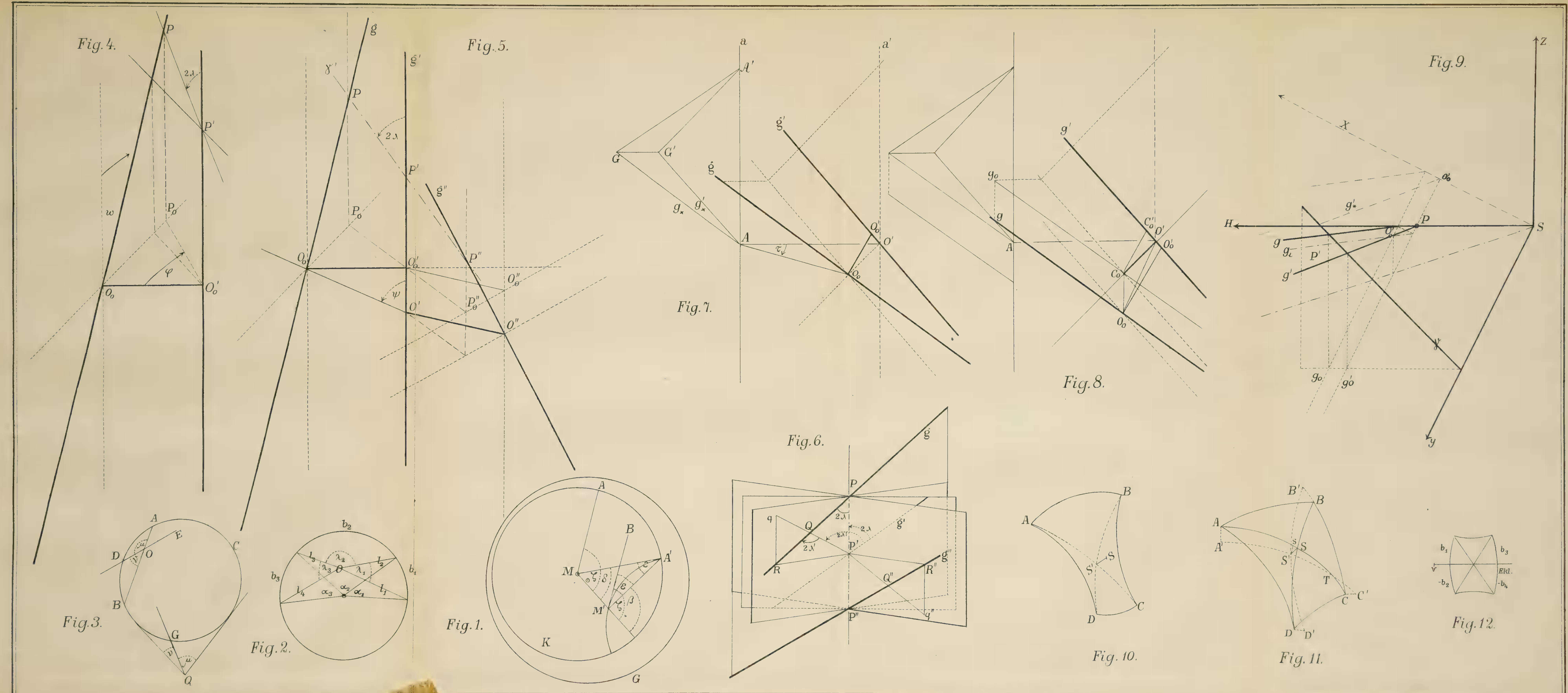
Ballauf, L., Die Grundlehren der Physik. 8. Lief. Langensalza, Beyer & S. 1 Mk.

Wallentin, J. G., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. Wien, Pichler. 3 Mk. 60 Pf.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O-Gyalla. 2. Bd. Halle, Schmidt. 9 Mk.

Czerny, F. v., Die Veränderlichkeit des Klimas und ihre Ursachen. Wien, Hartleben. 2 Mk. 50 Pf.





Flügel & Sandmann, Dresden

Historisch-literarische Abtheilung.

Die Methode Tá jàn im Suán-kīng von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I. Abschnitte des Tá jàn lĭ schū.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Die Kenntnisse der chinesischen Arithmetiker des Alterthums und des Mittelalters von der allgemeinen Behandlung des sogenannten Restproblems, welche wir den Mittheilungen des in Shangae lebenden Sinologen Alexander Wylie verdanken,* sind merkwürdigerweise bis in unsere Tage von den Zahlentheoretikern unbeachtet geblieben. Es dürfte deshalb vielleicht von einiger Wirkung sein, wenn wir uns im Folgenden auf einen Abschnitt der *Disquisitiones arithmeticae* beziehen, worin die Tá jàn-Regel des Sun-tsè auch von Gauss vorgetragen wird.

Disquis. § 32. Das Problem, dessen Lösung im Folgenden von grossem Nutzen sein wird, besteht darin, alle Zahlen zu suchen, welche nach mehreren gegebenen Moduln gegebene Reste liefern.

$$Z \equiv a \pmod{A}, \quad Z \equiv b \pmod{B}, \quad Z \equiv c \pmod{C} \text{ etc.}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Disquis. § 36. Wenn sämmtliche Moduln A, B, C, D, ... relativ prim sind, so kann man sich mit Vortheil der folgenden Methode bedienen. Man bestimme die Zahlen

$$\alpha \equiv 1 \pmod{A}, \qquad \alpha \equiv 0 \left(mod \frac{M}{A}\right),$$

$$\beta \equiv 1 \pmod{B} \qquad \beta \equiv 0 \left(mod \frac{M}{B}\right)$$

$$\text{u. s. w.,} \qquad \text{u. s. w.,}$$

---

* *Alexander Wylie: Jottings on the science of chinese arithmetic. North China Herald 1852; Shanghae Almanac for 1853.* Ein Auszug findet sich in Crelle's Journ., Bd. 52 S. 79 flg., 1856 in einem Artikel von Biernatzki: Die Arithmetik der Chinesen. Man vergl. auch *Nouv. ann. math. (2) II, p. 529-seq. 1863;* Zeitschr. f. Math. u. Phys. XIX, S. 270, 1874; Sitzungsber. d. math.-naturw. Section in den Verhandlungen der Philologenversamml. in Rostock, S. 126, 1875.

wo $ABC\ldots = M$ gesetzt ist. Wenn eine Zahl Z gesucht wird, welche nach den Moduln A, B, C, ... gegebenen Zahlen a, b, c, ... congruent ist, so kann man setzen

$$Z \equiv \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots \pmod{M}.$$

Es ist nämlich klar, dass $\alpha a \equiv a \pmod{A}$, die übrigen Glieder βb, γc u. s. w. $\equiv 0 \pmod{A}$ sind. Daraus folgt $Z \equiv a \pmod{A}$. Aehnlich wird der Beweis für die übrigen Moduln geführt. Diese Auflösung ist dann vorzuziehen, wenn mehrere Probleme nach constanten Moduln vorgelegt sind; in diesem Falle nämlich behalten die Hilfszahlen α, β, γ u. s. w. constante Werthe. Man bedient sich dieser Methode in der Chronologie, wenn gesucht wird, das wievielte Jahr der Julianischen Periode dasjenige sei, von dem die päpstliche Indiction, die goldene Zahl und der Sonnenzirkel gegeben sind. Hierbei ist $A = 15$, $B = 19$, $C = 28$. Daraus findet man $\alpha = 6916$, $\beta = 4200$, $\gamma = 4845$. Bedeuten a die Indiction, b die goldene Zahl, c den Sonnenzirkel, so ist der kleinste Rest zu suchen von $6916a + 4200b + 4845c$ (nach dem Modul 7980).

So weit Gauss. Er zeigt aber nicht, wie man auf ähnliche Weise verfahren solle, wenn die Moduln nicht relativ prim sind; ebenso übergeht Dirichlet diese Verallgemeinerung in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie (herausgegeben von Dedekind), worin uns in § 25 jene geniale Methode von Gauss mitgetheilt wird. Wir lernen nun aber dies Verfahren aus dem ersten Abschnitte des Tá jàn lĭ schū von Yih-hing. Derselbe ist allerdings sehr abrupt gehalten und wegen seiner lakonischen Kürze schwer verständlich, deshalb von dem Uebersetzer, weil missverstanden, theilweise corrumpirt. Vollends aber hat die Fortsetzung des Auszuges, lautend: „Diese Rechnung im ersten Abschnitte des Yih-hing *(sic!)*, welche dort noch fortgesetzt wird, diente dazu, durch Zahlensymbole die Zukunft zu deuten; sie bildete eine arithmetische Grundlage für die bei den Chinesen, wie überhaupt bei heidnischen Völkern sehr beliebte Wahrsagerkunst“, in unbegreiflichem Unverstande diese überaus interessante, merkwürdige theoretische Einleitung der unbestimmten Analytik von Yih-hing in Misscredit gebracht. Wer den Inhalt der übrigen acht Abschnitte übersieht und endlich wahrnimmt, dass der zweite Theil des Werkes Anwendungen der Tá jàn auf astronomische und meteorologische Probleme enthält, der muss eingestehen, dass die Chinesen es verstanden, eine viel grössere Mannichfaltigkeit der Anwendung der unbestimmten Analytik auf Fälle des praktischen Lebens zu erfinden, als in unseren modernen Werken üblich ist. Freilich wird gleich im zweiten Abschnitte des ersten Theiles von der Tá jàn auf die Berechnung der Constellationen und Cykeln Anwendung gemacht; wer aber wird denn die Vorausberechnung der Constellationen oder der Finsternisse zur Wahrsagerkunst rechnen? Diese Vermuthungen, welche dem Yih-hing angedichtet sind, gehören unter die grössten Thorheiten,

welche je in der Geschichtsschreibung der Mathematik begangen worden sind. Der Inhalt des ersten Abschnittes des Tá jàn lǐ schū lässt sich aber mit Hilfe der Gauss'schen Symbole kurz in folgende Fassung bringen, wodurch ohne Zweifel die Zahlentheorie um ein lange unbekannt gebliebenes Theorem bereichert wird.

Wenn die n Moduln (Hauptzahlen) A, B, C, D, ... des Restproblems

$$Z \equiv a \; (mod\, A), \quad Z \equiv b \; (mod\, B), \quad Z \equiv c \; (mod\, C) \text{ u. s. w.}$$

beliebig (nicht relativ prim) und der kleinste gemeinschaftliche Dividuus desselben

$$m = 1^p . 1^q \dots 2^r . 3^s . 5^t \dots = \mu_1 . \mu_2 . \mu_3 \dots \mu_n,$$

also $\mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \dots \cup \mu_n$, d. h. die „Stammzahlen" sämmtlich relativ prim sind, so bilde man das System

$$A \equiv 0 \; (mod\, \mu_1), \quad B \equiv 0 \; (mod\, \mu_2) \text{ u. s. w.,}$$

und bestimme die „Erweiterungs-Hilfszahlen"

$$\alpha \equiv 1 \; (mod\, \mu_1), \quad \alpha \equiv 0 \; \left(mod\, \frac{m}{\mu_1}\right),$$

$$\beta \equiv 1 \; (mod\, \mu_2), \quad \beta \equiv 0 \; \left(mod\, \frac{m}{\mu_2}\right) \text{ u. s. w.}$$

Wenn dann eine Zahl Z gesucht wird, welche nach den Moduln A, B, C, ... gegebenen Zahlen a, b, c, ... congruent ist, so kann man ebenfalls setzen

$$Z \equiv \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots \; (mod\, ABC \dots)$$

und nach Yih-hing noch allgemeiner

$$Z \equiv \Sigma\, \alpha (1 + A - \mu_1)\, a \; (mod\, ABC \dots).$$

Vorausgesetzt wird, dass die Aufgabe überhaupt möglich sei, wofür sich Determinationen finden lassen.

Der in Crelle's Journal, 52. Bd., von Biernatzki gegebene Auszug ist schwer verständlich, weil hier ebenso, wie in dem Auszuge des Commentars von Tsin kin Tschaū zum Suán-kīng des Sun-tsè eine Verwechselung der sogenannten Multiplicatoren oder Wurzeln der Congruenzen mit den Resten vorliegt. Auch Terquem (a. a. O.) gesteht ein, dass er nicht habe verstehen können, was der Inhalt des ersten Abschnittes der Tá jàn lǐ schū bedeuten solle, und tröstet sich damit, dass er denselben Unsinn von der Wahrsagerkunst wiederholt. Wir wollen deshalb die Entwickelung der Erweiterungs-Hilfszahlen α, β, γ, ..., die merkwürdigerweise von Gauss ebenfalls „Hilfszahlen" genannt werden, kurz in ein Schema zusammenstellen (s. umstehende Tabelle) und ein Zahlenbeispiel ihrer Anwendung hinzufügen.

Aus der Zusammenstellung ergeben sich die sogenannten „bestimmten Hilfszahlen":

$$\alpha(1 + A - \mu_1) = 12, \quad \beta(1 + B - \mu_2) = 24,$$
$$\gamma(1 + C - \mu_3) = 4, \quad \delta(1 + D - \mu_4) = 9.$$

Diese sind nun constant für alle möglichen Restprobleme, wenn die Moduln 1, 2, 3, 4 sind; ebenso in allen übrigen Fällen mit beliebig vielen Moduln, die nicht sämmtlich relativ prim sind.

Hauptzahlen.	Stammzahlen.	Congruenzen.	Multiplicatoren.	Erweiterungs-Hilfszahlen.
$A=1$	$\mu_1=1$	$\frac{m}{\mu_1}\varkappa_1\equiv 1\ (mod\,\mu_1)$	$\varkappa_1=1$	$\frac{m}{\mu_1}\varkappa_1=12(\alpha)$
$B=2$	$\mu_2=1$	$\frac{m}{\mu_2}\varkappa_2\equiv 1\ (mod\,\mu_2)$	$\varkappa_2=1$	$\frac{m}{\mu_2}\varkappa_2=12(\beta)$
$C=3$	$\mu_3=3$	$\frac{m}{\mu_3}\varkappa_3\equiv 1\ (mod\,\mu_3)$	$\varkappa_3=1$	$\frac{m}{\mu_3}\varkappa_3=4(\gamma)$
$D=4$	$\mu_4=4$	$\frac{m}{\mu_4}\varkappa_4\equiv 1\ (mod\,\mu_4)$	$\varkappa_4=3$	$\frac{m}{\mu_4}\varkappa_4=9(\delta)$

1. Beispiel. Aufzulösen

$$Z\equiv 1\ (mod 1),\quad Z\equiv 1\ (mod 2),\quad Z\equiv 2\ (mod 3),\quad Z\equiv 3\ (mod 4).$$

Man findet

$$Z\equiv 1.12+1.24+2.4+3.9=71\ (mod 12),$$

also $Z=11+12n$.

Nun aber ist klar, dass es Fälle giebt, in denen die Aufgabe überhaupt unmöglich ist. Ist sie aber möglich, so führt die Methode immer zur richtigen Auflösung. Ist die Aufgabe unmöglich, so führt die Methode auch dann noch zu einem Resultate, welches aber den gestellten Bedingungen nicht genügt.

Die Werthsysteme der Reste, welche zu gegebenen Modulsystemen gehören, lassen sich classificiren.

2. Beispiel. Aufzulösen

$$Z\equiv 1\ (mod 1),\quad Z\equiv 2\ (mod 2),\quad Z\equiv 2\ (mod 3),\quad Z\equiv 3\ (mod 4).$$

Man findet

$$Z\equiv 1.12+2.24+2.4+3.9=95\ (mod 12)$$

oder $Z=11+12n$.

Die Aufgabe ist unmöglich, weil 11 die gegebenen Reste nicht liefert. Die Bedingung ist: r_2 und r_4 gleichzeitig gerade oder ungerade.

Wir verfehlen nicht, bei dieser Gelegenheit auf eine andere Methode, welche v. Schäven im IX. Bande der Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht S. 117 gegeben hat, hinzuweisen, wobei der Fall der Unmöglichkeit der Aufgabe nicht berücksichtigt worden ist. Derselbe giebt die Auflösung

$$Z=\sum_1^u r_h\frac{m}{A}.\varkappa_h,$$

worin die $\varkappa$ irgend eines der Werthsysteme bedeuten, welche die Gleichung

$$\frac{m}{A}\varkappa_1 + \frac{m}{B}\varkappa_2 + \ldots + \frac{m}{U}\varkappa_u = 1$$

befriedigen. Wenden wir dies auf unsere Beispiele an.

1. Beispiel. Die Moduln sind 1, 2, 3, 4; die Reste 1, 1, 2, 3; $m = 12$.

Man genügt der Bedingungsgleichung

$$12\varkappa_1 + 6\varkappa_2 + 4\varkappa_3 + 3\varkappa_4 = 1$$

durch $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = -2$, $\varkappa_3 = 1$, $\varkappa_4 = -1$ und findet

$$Z \equiv 1.1.12 - 1.2.6 + 2.1.4 - 3.1.3 = -1 \pmod{12},$$

also $Z = 11 + 12n$. Die Aufgabe ist also möglich.

2. Beispiel. Die Moduln sind 1, 2, 3, 4; die Reste 1, 2, 2, 3; $m = 12$.

Die Bedingungsgleichung ist natürlich dieselbe, aber

$$Z \equiv 1.1.12 - 2.2.6 + 2.1.4 - 3.1.3 = -13 \pmod{12},$$

also $Z = 11 + 12n$. Die Aufgabe ist demnach unmöglich.

3. Beispiel (v. Schäven). Die Moduln sind 8, 6, 9, 5; die Reste 3, 5, 2, 1.

Beide Methoden führen zur richtigen Auflösung $Z = 11 + 360$.

4. Beispiel. Die Moduln sind 8, 6, 9, 5; die Reste 1, 2, 2, 3.

Beide Methoden führen zu einer falschen Auflösung; die Aufgabe ist demnach unmöglich. Sie ist jedoch möglich z. B. für $r_1 = 2m + 1$, $r_2 = 6p - 1$, $r_3 = 3q + 2$.

Der weitere Inhalt des ersten Abschnittes der Tá jàn lǐ schū ist leider bis jetzt unbekannt. Alexander Wylie versichert indess, dass Texte in China nach längerem Suchen noch aufzutreiben seien. Es wäre in der That für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit, chinesische mathematische Werke über unbestimmte Analytik zu importiren.

Miscelle.

Von

FRIEDRICH HULTSCH

in Dresden.

Das *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus*, zu welchem im XXIV. Jahrg. dieser Zeitschrift, Hist.-lit. Abthlg. S. 199 flgg., einige Erläuterungen gegeben wurden, ist in so verderbter Gestalt überliefert, dass das Meiste so, wie es von Herrn Henry zum Abdruck gebracht worden, unverständlich bleibt. Bei Gelegenheit der früheren Besprechung schlug ich einige Verbesserungen vor, zu denen hier ein kleiner Nachtrag folgen möge. Ganz meine Aufmerksamkeit darauf richtend, die Eintheilung einer Einheit in Sechzigstel, und dieser Sechzigstel wieder in zweite Sechzigstel u. s. w. nachzuweisen, behielt ich in der genannten Schrift S. 1 Z. 10 u. 14 die überlieferten Zahlen ξ′ bei, obgleich an beiden Stellen von der Eintheilung der Peripherie eines Kreises die Rede ist. Wenn nun auch eine solche Theilung in Sechzigstel bei den Griechen von Eratosthenes bis Hipparch üblich gewesen ist*, so zeigen doch die beigefügten Worte *ἕκαστον τῶν τμημάτων μοῖραν ὠνόμασαν οἱ παλαιοί* deutlich, dass nur der „Grad" im Sinne des Ptolemaeus, d. h. $\frac{1}{360}$ der Peripherie verstanden werden kann. Mit Recht bemerkt daher Herr Ingenieur Paul Tannery in Havre, der bereits mehrere treffliche Beiträge zur Geschichte der Mathematik veröffentlicht hat, in einem an mich gerichteten Schreiben, dass an beiden obigen Stellen τξ′ = 360 herzustellen sei. Ich schlage demnach nun folgende Lesarten vor: Z. 10 *Τοῦ ζωδιακοῦ γὰρ κύκλου εἰς τξ′ διαιρουμένου.* Hier ist lediglich die irrthümliche Henry'sche Lesart *τὰ ξ′* zusammengezogen zu *τξ′* und dies zu lesen *τριακοσιοστὰ ἑξηκοστά*, *scil. μέρη*, so dass auch das anfänglich von mir vermuthete *τμήματα* wieder in Wegfall kommt. Ferner ergiebt sich von Z. 13 an folgende wahrscheinliche Verbesserung, welche wir neben den Henry'schen Text zur rechten Seite stellen:

διὰ οὖν τὰ προσήμερα ταύτῃ, τὸ δ'εστι τω τοῦ ξ′ μέρει τοῦ κύκλου ποτε μὲν ὡς ποδΐ ποτὲ δὲ ὡς μονὰδΐ δυναμένη παραλαμβάνεσθαι,	*διὰ οὖν τὰ προειρημένα ταὐτόν ἐστι τῷ τξ′ μέρει τοῦ κύκλου ποτὲ μὲν ὡς ποδὶ ποτὲ δὲ ὡς μονάδι δυναμένῳ παραλαμβάνεσθαι,*

d. h. „wegen des Vorherbemerkten also ist (der Grad) dasselbe, wie der 360. Theil des Kreises, indem dieser Theil bald als Fuss, bald als Einheit genommen werden kann", eine Erklärung, welche offenbar der

---

* Vergl. W. Abendroth, Darstellung und Kritik der ältesten Gradmessungen, Programm der Kreuzschule, Dresden 1866, S. 22 flgg.

spätere Zusatz eines Scholiasten ist, da sie mit anderen Worten nur wiederholt, was bereits unmittelbar vorhersteht.

Der geneigte Leser der Zeitschrift wolle entschuldigen, dass die Verbesserung weniger Zeilen eines jüngeren griechischen Tractates einen verhältnissmässig grossen Raum beansprucht hat; aber da es einmal die Pflicht der philologischen Kritik ist, kein Verderbniss in den alten Texten stehen zu lassen, so lange irgend ein Weg der Verbesserung noch sich darbietet, so musste nochmals auf diese Stelle, deren Wiederherstellung ich früher vergeblich versucht hatte, zurückgekommen werden. Wie anders sieht nun τὰ προειρημένα aus, als das unverständliche τὰ προσήμερα, welches anfänglich auf falsche Spur geführt hatte (vgl. XXIV, S. 201 Anm. 2).

Zum Glück sind nicht alle griechischen Texte so verderbt, wie dieses *Opusculum*, welches nur unter Benutzung besserer Handschriften lesbar sich wird herstellen lassen.

Eine algebraische Lösung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen.

Von

Dr. Lehmann,

Gymnasiallehrer in Rudolstadt.

Im *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *t. V*, 1879, ist eine Abhandlung, betitelt „*Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie des coefficients de cette équation dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elles commensurable*“ von Herrn Guido Weichold, Oberlehrer in Zittau, erschienen. Dieselbe giebt eine höchst originelle Lösung des irreducibeln Falles der cubischen Gleichungen. Der Weg der Lösung ist im Wesentlichen folgender.

Es seien a, b, c die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

θ und θ' die complexen dritten Wurzeln der Einheit und

$$a + \theta b + \theta' c = \varrho, \quad bc + \theta ac + \theta' ab = \varrho_1,$$
$$a + \theta' b + \theta c = \varrho', \quad bc + \theta' ac + \theta ab = \varrho'_1,$$

so stellen sich die Wurzeln a, b, c unter folgender Form dar*:

---

* Der Verfasser hat wohl nicht ohne Absicht gerade diese Form der Darstellung für die Wurzeln gewählt, denn die Werthe ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1 sowohl, als die gleich zu erwähnenden N, N', P spielen in der Discussion der algebraischen Curven dritten Grades eine wichtige Rolle.

$$\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\} = \frac{-A+\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho+\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'}{3} = -\frac{\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho_1-\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'_1}{\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho-\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'}$$

$$= -\frac{2B-\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho_1-\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'_1}{2A+\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho+\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'} = -\frac{3C}{B+\left.\begin{matrix}1\\\theta'\\\theta\end{matrix}\right\}\varrho_1+\left.\begin{matrix}1\\\theta\\\theta'\end{matrix}\right\}\varrho'_1}.$$

Die Aufgabe läuft darauf hinaus, die Grössen ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1 im irreducibeln Falle durch elementare Operationen in expliciter Form darzustellen. Nun bestehen zwischen den Grösen ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1 und den Coefficienten eine Anzahl Relationen. Setzt man

$$\begin{aligned}\varrho\varrho' &= A^2-3B = N,\\ \varrho_1\varrho'_1 &= B^2-3AC = N',\\ \varrho\varrho'_1+\varrho'\varrho_1 &= AB-qC = P\end{aligned}$$

und

$$\varrho\varrho'_1-\varrho'\varrho_1=\sqrt{P^2-4NN'}=Si\sqrt{3},$$

so lassen sich die Werthe $\varrho\varrho'_1$, $\varrho_1\varrho'$, ϱ^3, ϱ'^3, ϱ_1^3, ϱ'^3_1, $\varrho^2\varrho_1$, $\varrho'^2\varrho'_1$, $\varrho\varrho_1^2$, $\varrho'\varrho'^2_1$ durch die Grössen N, N', P, S, d. h. durch die Coefficienten A, B, C ausdrücken. Die letztgenannten Werthe sind, wenn die Wurzeln a, b, c reell sind, sämmtlich complex, da in ihnen allen die Grösse $Si\sqrt{3}$ als Addend auftritt und da

$$S=(a-b)(a-c)(b-c)$$

ist. Wollte man die Werthe ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1, welche die Wurzeln der Gleichung geben, durch Ausziehen der dritten Wurzel aus ϱ_3, ϱ'^3, ϱ_1^3, ϱ'^3_1 bestimmen, so würde man auf den irreducibeln Fall stossen, da sich der Werth $\sqrt[3]{\alpha+\beta i}$ auf elementarem Wege nicht in die explicite Form $p+qi$ bringen lässt. Es lassen sich aber die vier Hilfsgrössen ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1 in expliciter Form und auf elementarem Wege auch anders, als durch Ausziehen der dritten Wurzel darstellen, nämlich durch Bestimmen des grössten gemeinschaftlichen complexen Factors zwischen zwei complexen Grössen, oder einer reellen und einer complexen Grösse. Das Aufsuchen des gemeinschaftlichen complexen Factors geschieht auf demselben Wege, wie das Aufsuchen eines grössten gemeinschaftlichen Factors zwischen zwei reellen Grössen. Durch diesen neuen und fruchtbaren Gedanken ist die Lösung des irreducibeln Falles durch rein algebraische Operationen gegeben. Der Weg der Lösung ist demnach folgender:

Man berechne aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung die Werthe N, N', P, S, mit Hilfe derselben $\varrho\varrho'_1$, ϱ^3 u. s. w., bestimme ϱ

als grössten gemeinschaftlichen complexen Factor zwischen $\varrho\varrho'$ und ϱ^3 (oder $\varrho\varrho'$ und $\varrho\varrho'_1$, oder $\varrho\varrho'$ und $\varrho\varrho_1$ u. s. w.), wodurch ϱ' und damit auch ϱ_1 und ϱ'_1 gegeben sind, und setze die Werthe in eine der oben angegebenen Gleichungen für a, b, c, z. B. in

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} = \frac{-A + \left.\begin{matrix} 1 \\ \theta' \\ \theta \end{matrix}\right\} \varrho + \left.\begin{matrix} 1 \\ \theta \\ \theta' \end{matrix}\right\} \varrho'}{3}$$

ein, so erhält man die gesuchten Wurzeln a, b und c. Da sich die Hilfsgrössen ϱ, ϱ', ϱ_1, ϱ'_1 auf verschiedene Weise als gemeinschaftliche Factoren finden lassen, so ist noch die Möglichkeit einer Controlerechnung geboten. Der Verfasser führt die Rechnung für verschiedene Beispiele durch. Es möge zum Schluss, zur Verdeutlichung der Operationen, die Lösung einer (in der Abhandlung nicht behandelten) Gleichung folgen.

Die Gleichung sei

$$x^3 - \tfrac{244}{105}x^2 + \tfrac{188}{105}x - \tfrac{48}{105} = 0.$$

Es ist

$$A = -\tfrac{244}{105}, \quad B = \tfrac{188}{105}, \quad C = -\tfrac{48}{105};$$

$$\varrho\varrho' = N = \tfrac{316}{11025}, \quad \varrho_1\varrho'_1 = N' = \tfrac{208}{11025};$$

$$P = -\tfrac{512}{11025}, \quad S = \tfrac{16}{11025};$$

$$\varrho\varrho'_1 = \tfrac{1}{2}(P + Si\sqrt{3}) = \frac{-256 + 8i\sqrt{3}}{11025}.$$

Wir bestimmen ϱ als gemeinschaftlichen Factor von $\varrho\varrho'$ und $\varrho\varrho'_1$, also, mit Anwendung des vom Verfasser eingeführten Zeichens,

$$\varrho = \overline{\varrho\varrho' \mid \varrho\varrho'_1} = \overline{\frac{316}{11025} \Bigg| \frac{-256 + 8i\sqrt{3}}{11025}}.$$

Gemeinschaftlicher Factor ist

$$\tfrac{4}{11025} = (\tfrac{2}{105})^2, \text{ also } \varrho = \tfrac{2}{105}.\overline{79 \mid -64 + 2i\sqrt{3}}.$$

Es ist

a) $(-64 + i\sqrt{3}) : 79 = -1$, $(15 + 2i\sqrt{3})$ Rest und Divisor,

b) $\dfrac{79}{15 + 2i\sqrt{3}} = \dfrac{79(15 - 2i\sqrt{3})}{237} = \dfrac{15 - 2i\sqrt{3}}{3}$,

$79 : (15 + 2i\sqrt{3}) = 5 - i\sqrt{3}$, $(-2 + 5i\sqrt{3})$ Rest und Divisor,

c) $\dfrac{15 + 2i\sqrt{3}}{-2 + 5i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$. Die Division geht auf, und der letzte Divisor $(-2 + 5i\sqrt{3})$ ist der grösste gemeinschaftliche Factor. Also

$$79 = (-2 + 5i\sqrt{3})(-2 - 5i\sqrt{3}) \text{ oder } = (2 - 5i\sqrt{3})(2 + 5i\sqrt{3}),$$

$$-64 + 2i\sqrt{3} = (-2 + 5i\sqrt{3})(2 + 4i\sqrt{3}) \text{ oder}$$

$$= (2 - 5i\sqrt{3})(-2 - 4i\sqrt{3}).$$

Um zu entscheiden, ob

$$\varrho = (-2+5i\sqrt{3})\tfrac{2}{105} \text{ oder } = (2-5i\sqrt{3})\tfrac{2}{105},$$

berechnet man

$$\varrho^3 = \tfrac{1}{2}(3P - 2AN + 2Si\sqrt{3}) = -\frac{3536}{105^3} + \frac{24i\sqrt{3}}{105^2}$$

und

$$\varrho^3 = [(-2+5i\sqrt{3})\tfrac{2}{105}]^3 = \frac{3536}{105^3} - \frac{24i\sqrt{3}}{105^2}.$$

Da die Vorzeichen der Werthe von ϱ^3 entgegengesetzte sind, so ist

$$\varrho = (2-5i\sqrt{3})\tfrac{2}{105}$$

und

$$\varrho' = (2+5i\sqrt{3})\tfrac{2}{105}, \quad \varrho_1 = (-2+4i\sqrt{3})\tfrac{2}{105}, \quad \varrho'_1 = (-2-4i\sqrt{3})\tfrac{2}{105}$$

und also

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{-A+\varrho+\varrho'}{3} = {}^4/_5, \\ b &= \frac{-A+\theta'\varrho+\theta\varrho'}{3} = {}^2/_3, \\ c &= \frac{-A+\theta\varrho+\theta'\varrho'}{3} = {}^6/_7. \end{aligned}\right.$$

Die Idee des Verfassers, den Ausdruck $\sqrt[3]{\alpha+\beta i}$ in die explicite Form $p+qi$ durch Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Factors zu bringen, ist neu und originell. Die Rechenoperationen, anfangs etwas ungewohnt, sind bei einiger Uebung leicht und elegant auszuführen. So sei denn diese Lösung des irreducibeln Falles der Beachtung der Mathematiker auf's Wärmste empfohlen.

Recensionen.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. THEODOR REYE, o. Professor an der Universität Strassburg. Zweite Abtheilung. 2. vermehrte Aufl. Hannover, Carl Rümpler. 1880.

Der im Jahre 1877 erschienenen zweiten Auflage der ersten Abtheilung der Geometrie der Lage von Reye ist im Jahre 1880 die zweite Auflage der zweiten Abtheilung gefolgt, im Grossen und Ganzen in unveränderter Gestalt. Doch enthält sie sieben Vorträge mehr, als die erste Auflage, also im Ganzen 30 Vorträge. Neu sind hinzugekommen die Vorträge 10, 11, 16, 27—30; sie behandeln das Nullsystem und den linearen Strahlencomplex (10), das Strahlensystem erster Ordnung und Classe (11), die geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades (16), Bündel von Flächen zweiter Ordnung (27), das F^2-Gebüsch, seine projectivische Beziehung auf ein räumliches System und die Steiner'sche Fläche vierter Ordnung (28), besondere Fälle des F^2-Gebüsches (29) und das Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Classe und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten (30). Ganz oder theilweise umgearbeitet sind ferner die Vorträge 12: „Erzeugnisse von zwei collinearen Strahlenbündeln oder ebenen Systemen. Raumcurven und Ebenenbüschel dritter Ordnung"; — 15: „Projectivische Verwandtschaft zwischen einem Strahlensystem erster Ordnung und einem ebenen System. Geradlinige Flächen vierter Ordnung, welche durch projectivische Ebenenbüschel zweiter Ordnung erzeugt werden"; — 18: „Strahlencomplexe, welche von collinearen räumlichen Systemen erzeugt werden"; — 19: „Büschel von Flächen zweiter Ordnung, Raumcurven und Ebenenbüschel vierter Ordnung"; — 20: „Projectivische Beziehung der F^2-Büschel und Kegelschnittbüschel". Durch diese Veränderung hat der Herr Verfasser den neueren Resultaten der Forschung Rechnung getragen, so dass sein Werk, wie bisher, auf der Höhe der Wissenschaft steht und den Leser nicht nur mit dem in der Geometrie Erreichten bekannt macht, sondern auch in die offenen Fragen einweiht und zu eigener Arbeit auffordert.

Vor Eintritt in eine ausführlichere Besprechung soll hervorgehoben werden, dass auch im Auslande „Die Geometrie der Lage" Anerkennung gefunden hat, leider nicht in legitimer Form. Vor zwei Jahren nämlich hat der Universitätsprofessor Antonio Favaro in Padua ohne Wissen des Herrn Verfassers eine italienische Bearbeitung herausgegeben,

von welcher 1879 unter dem Titel *Leçons de Statique graphique, par Antonio Favaro, traduites de l'Italien par Paul Ferrier. Première partie: Géométrie de Position*, eine französische Uebersetzung erschienen ist. Hierüber sagt Herr Reye im Vorwort: „Herr Favaro hat es nicht für passend gehalten, meinen Namen im Titel seines Buches zu erwähnen; die versteckte Art und Weise, wie er meine „„Geometrie der Lage““ in der Vorrede und sonst citirt, und seine Paragrapheneintheilung scheinen vielmehr darauf berechnet zu sein, den wahren Sachverhalt zu verdunkeln. Nach sorgfältiger Durchsicht der französischen Uebersetzung constatire ich deshalb, dass, abgesehen von der Vorrede, den Literaturangaben und geschichtlichen Anmerkungen Favaro's, ungefähr neun Zehntel seines Buches aus meinem Buche übersetzt sind, und zwar meistens Satz für Satz, jedoch die ersten Capitel mehr auszugsweise und mit Umstellung der Sätze. Nur an fünf Stellen habe ich grössere Zusätze von zwei bis sechs Seiten Länge bemerkt; von verschiedenen derselben aber kann ich nachweisen, dass sie aus Schroeter-Steiner's Vorlesungen und Cremona's *Geometria descriptiva* abgeschrieben sind. Die eigenen kleinen Zuthaten Favaro's im Texte sind unbedeutend; von seinen 77 Figuren sind 65 aus meiner „„Geometrie der Lage““ copirt.“ Da Referent nach sorgfältiger Vergleichung des deutschen Originals mit der französischen Uebersetzung die vorigen Bemerkungen Wort für Wort als durchaus gerechtfertigt anerkennen muss, so hält er es für geboten, auch an dieser Stelle das unerhörte Verfahren Favaro's auf's Härteste und, wie Reye es selbst thut, als unerlaubte Aneignung fremden Eigenthums zu verurtheilen.

Wir gehen jetzt zu einer näheren Besprechung über. Die ersten vier Vorträge sind den collinearen und reciproken Verwandtschaften gewidmet, aus denen im fünften und sechsten Vortrage die Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung, ihre Classification und Polarität abgeleitet werden. Aus den polaren Beziehungen ergeben sich dann die Eigenschaften der Durchmesser und Durchmesserebenen, der Axen und Symmetrieebenen. Die Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung sind S. 267 Nr. 33 in den im Anhange gegebenen Aufgaben und Lehrsätzen behandelt. Von der Verwerthung der allgemeinen geometrischen Verwandtschaften für Oberflächen zweiter Ordnung geht das Buch dann zu den speciellen geometrischen Verwandtschaften der Affinität, Aehnlichkeit, Congruenz, Symmetrie ebener und räumlicher Systeme über, zu ineinander liegenden reciproken und Polarsystemen.

Hierauf werden im 10. und 11. Vortrage neu behandelt „das Nullsystem und der lineare Strahlencomplex“ und „das Strahlensystem erster Ordnung und Classe“. Wenn zwei reciproke räumliche Systeme solche Lage haben, dass jede Ebene des einen durch den ihr entsprechenden Punkt des andern geht, so liegen sie involutorisch und können als ein

System aufgefasst werden, welches nach Möbius und v. Staudt ein „Nullsystem" genannt wird. Seine wichtigsten Eigenschaften wurden schon 1833 von Möbius angegeben. Jeder Ebene ist ein Punkt als „Pol" und jeder Geraden eine andere als „Polare" zugeordnet. Diejenigen Geraden des Nullsystems, welche sich selbst zugeordnet sind, heissen „Leitstrahlen" desselben und bilden den „linearen Strahlencomplex". Als grundlegende Sätze finden wir abgeleitet: Ein Nullsystem ist bestimmt 1. durch ein räumliches Fünfeck $ABCDE$, in welchem jede der fünf Kanten sich selbst zugeordnet ist; 2. durch drei windschiefe Gerade $g g_1 l$, von denen g und g_1 einander zugeordnet sind und l ein Leitstrahl ist; 3. durch fünf beliebige Leitstrahlen; 4. durch zwei Paar zugeordnete Gerade, die in einer Regelschaar liegen, oder durch eine involutorische Regelschaar. Nachdem dann die Geraden und Ebenen, deren Polaren und Pole unendlich fern liegen, als „Durchmesser" und „Durchmesserebenen" des Nullsystems definirt sind, wird gezeigt, dass der lineare Strahlencomplex und das zugehörige Nullsystem sich nicht ändern, wenn man sie in der Richtung der parallelen Durchmesser verschiebt. „Hauptaxe" des Nullsystems ist derjenige Durchmesser, welcher die Pole aller zu den Durchmessern normalen Ebenen enthält. Durch die Hauptaxe und einen Leitstrahl, welcher sie weder schneidet, noch rechtwinklig kreuzt, ist das Nullsystem bestimmt; durch eine Drehung um die Hauptaxe ändert sich das Nullsystem nicht. Zum Schlusse des Vortrages werden noch die Sätze bewiesen: „Bezeichnet r den Abstand eines beliebigen Punktes P von der Hauptaxe und ϱ den Winkel, welchen seine Polarebene mit der Hauptaxe bildet, so ist $r . tg \varrho$ eine constante Grösse, welche sich mit der Lage von P nicht ändert." Bezeichnet man mit e den constanten Abstand der Pole aller Ebenen, welche mit der Hauptaxe einen halben rechten Winkel bilden, von dieser, mit r den Abstand eines beliebigen Leitstrahles von derselben, und mit ϱ den Winkel, den dieser Leitstrahl mit der Hauptaxe bildet, so ist $r . tg \varrho = e$, die Gleichung des Complexes bezüglich seiner Hauptaxe, weil ihr alle Leitstrahlen genügen." Schliesslich wird noch gezeigt, dass die Tangenten einer Schraubenlinie, welche die Hauptaxe zur Axe hat und irgend einen Leitstrahl berührt, lauter Leitstrahlen sind und dass durch die Schraubenlinie das Nullsystem und sein Strahlencomplex bestimmt sind. Der folgende Vortrag beginnt mit der Definition des Strahlensystems. Ein solches heisst von der n^{ten} Ordnung und k^{ten} Classe, wenn durch einen Punkt n Strahlen gehen und in einer Ebene k Strahlen liegen. Es folgt sofort, dass die gemeinschaftlichen Leitstrahlen von zwei Nullsystemen ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe bilden, dass also zwei lineare Strahlencomplexe ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe gemein haben. Seine Strahlen sind bezüglich jeder Regelfläche, welche durch eine seiner Regelschaaren geht, paarweise reciproke Polaren. Es ist bestimmt durch vier

willkürlich angenommene Strahlen und wird erzeugt durch zwei in verschiedenen Ebenen liegende collineare Systeme, welche die Schnittlinie der Ebene, nicht aber jeden Punkt derselben entsprechend gemein haben. Es giebt zwei Gerade, welche jeden Strahl des Systems schneiden, und jede Gerade, welche jene beiden schneidet, ist ein Strahl desselben; diese Geraden heissen die „Axen" des Systems. Alle Strahlen des Systems, welche eine Curve zweiter Ordnung schneiden, liegen auf einer geradlinigen Fläche vierter Ordnung, welche die Axen zu Doppelpunktsgeraden hat; dieselbe kann daher auch erzeugt werden durch eine Gerade, welche an zwei windschiefen Geraden und einem Kegelschnitte hingleitet. Im 12. Vortrage der zweiten Auflage behandelt der Verfasser dasselbe Thema, wie im 10. der ersten, doch in anderer Darstellung; in der neuen Auflage macht er Gebrauch von den vorher construirten Gebilden des Strahlencomplexes und Strahlensystems; er beschäftigt sich hauptsächlich mit den Erzeugnissen collinearer Strahlenbündel und den Raumcurven dritter Ordnung. Hier hat der Verfasser (S. 92) einen Satz nochmals bewiesen, der schon in der I. Abtheilung (S. 109) vorkommt, dass nämlich eine Regelschaar und ein projectivisch auf sie bezogener Ebenenbüschel erster Ordnung eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen. Im 15. Vortrage folgt zunächst die Erzeugung des Strahlensystems erster Ordnung durch collineare Strahlenbündel; dasselbe ist von der zweiten Classe, wenn die Bündel eine Ebene entsprechend gemein haben, und von der dritten Classe, wenn sie kein Element entsprechend gemein haben. Die Mittelpunkte aller in einem solchen System vorkommenden Kegelflächen liegen auf einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung. Das Mittel, welches zur weiteren Erforschung des Strahlensystems erster Ordnung angewendet wird, besteht darin, es zu einem ebenen System in projectivische Verwandtschaft zu setzen und zwar dadurch, dass man die beiden das Strahlensystem erzeugenden Bündel reciprok auf ein ebenes System bezieht. Jedem Kegelschnitte des letzteren ist eine geradlinige Fläche F^4 vierter Ordnung verwandt. Aus den verwandtschaftlichen Beziehungen ergiebt sich sofort, was übrigens auch aus dem Schlusse des 11. Vortrages der I. Abtheilung S. 115 folgt, dass zwei nicht concentrische projectivische Ebenenbüschel zweiter Ordnung eine geradlinige Fläche vierter Ordnung erzeugen; diese hat eine Raumcurve k^3 dritter Ordnung als Doppelpunktslinie. Die Strahlen der Fläche sind Sehnen von k^3 und werden aus je zwei Punkten dieser Linie durch projectivische Ebenenbüschel projicirt. Man kann die Fläche F^4 auch mittelst einer Linie k^3 dritter Ordnung und einer Kegelfläche erzeugen, deren Mittelpunkt auf k^3 liegt; nämlich alle Tangenten der Kegelfläche, welche Sehnen von k^3 sind, liegen auf einer Fläche F^4. Je nachdem die Doppelpunktslinie k^3 eine irreducible Raumcurve dritter Ordnung ist oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade oder in drei Gerade zerfällt, hat

man drei Hauptarten dieser Fläche zu unterscheiden; der von den doppelt berührenden Ebenen gebildete Büschel ist bei der ersten Hauptart ein irreducibler Ebenenbüschel dritter Ordnung. Bei den anderen Hauptarten zerfällt er in zwei Büschel erster und zweiter Ordnung oder in drei Büschel erster Ordnung. Jede Fläche der ersten Hauptart besteht aus allen Strahlen eines linearen Strahlencomplexes, welche Strahlen der irreducibeln Doppelpunktscurve sind. Der synthetische Beweis dieses von Clebsch (Mathem. Ann., Bd. II) gegebenen Satzes rührt von Herrn Richard Krause her („Ueber ein specielles Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung", Inauguraldissert., Strassburg 1879).

Die Vorträge 16, 17, 18 behandeln die geometrischen Verwandtschaften des zweiten Grades, die ineinander liegenden collinearen Systeme, die involutorischen Systeme in der Ebene und im Raume und die Strahlencomplexe zweiten Grades.

Projicirt man aus irgend zwei Punkten einer Raumcurve dritter Ordnung das Secantensystem derselben durch zwei collineare Strahlenbündel und bezieht reciprok auf diese ein ebenes System Σ_1, so ist jedem Punkte von Σ_1 diejenige Sehne der Raumcurve zugeordnet, in welcher sich die dem Punkte entsprechenden Ebenen der collinearen Bündel schneiden. Schneidet man dann das Secantensystem der Raumcurve durch eine Ebene Σ und ordnet jeder Secante ihren Schnittpunkt mit Σ zu, so sind Σ und Σ_1 in einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades. Diesen in der ersten Auflage eingeschlagenen Weg zur Einführung der quadratischen Verwandtschaft hat die zweite Auflage verlassen und dafür den folgenden gewählt: Man bezieht ein ebenes System Σ reciprok auf zwei andere Σ_1 und Σ_2, die in derselben Ebene liegen, und ordnet jedem Punkte von Σ den Schnittpunkt der verwandten Geraden in Σ_1 und Σ_2 zu, und ebenso jeder Geraden von Σ die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte in Σ_1 und Σ_2.

Eine andere quadratische Verwandtschaft erhält man, wenn man die Systeme Σ, Σ_1, Σ_2 collinear aufeinander bezieht und jedem Punkte von Σ die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von Σ_1 und Σ_2, jeder Geraden von Σ den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden zuordnet.

Nur auf die erstere wird näher eingegangen; die zweite hat Referent in der Abhandlung „Ueber eine reciproke Verwandtschaft zweiten Grades" im 79. Bande des Crelle'schen Journals behandelt.

Als Beispiele quadratischer Verwandtschaften werden noch folgende hinzugefügt:

Ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe wird von zwei beliebigen Ebenen in quadratisch verwandten Punktsystemen geschnitten.

Ein Ebenenbündel zweiter Ordnung wird von je zwei seiner Ebenen in quadratisch verwandten Strahlensystemen geschnitten.

Ordnet man in einem ebenen Polarsystem jedem Strahl den ihm conjugirten Normalstrahl zu, so erhält man zwei quadratisch verwandte ebene Strahlensysteme in involutorischer Lage.

Zwei collineare Systeme können involutorische Lage haben, je zwei zugeordnete Punkte liegen mit dem Involutionscentrum in einer Geraden und sind durch dieses und die Involutionsebene harmonisch getrennt; auf letzterer schneiden sich je zwei zugeordnete Ebenen. Diese schon von Möbius in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (25. October 1856) unter dem Titel: „Theorie der collinearen Involution von Punktepaaren in der Ebene und im Raume“ aufgestellte Verwandtschaft lässt sich, wie Referent gezeigt hat (Crelle's Journal, Bd. 86, „Zur Theorie der Kegelschnitte“) in einfacher Weise zu einer elementaren Theorie der Kegelschnitte verwerthen. Man kann leicht eine solche Verwandtschaft herstellen, dass zwei Kegelschnitten, welche zwei oder vier imaginäre Schnittpunkte haben, zwei Kreise verwandt sind, und dadurch die Polareigenschaften eines Kreisbüschels auf ein Kegelschnittbüschel übertragen.

Im 19. und 20. Vortrage wendet sich der Verfasser zu den Flächenbüscheln, den Raumcurven vierter Ordnung und der projectivischen Beziehung der Flächenbüschel. „Die allgemeinen Sätze des Strahlencomplexes gewinnen an Anschaulichkeit und Bedeutsamkeit, wenn wir sie bei der Untersuchung der Flächen zweiter Ordnung zu Grunde legen.“ Diese Worte des Verfassers am Anfange des 16. Vortrages der ersten Auflage charakterisiren den Unterschied zwischen dem 18. und 19. Vortrage der zweiten Auflage. Während im ersten die allgemeinen Gesetze der Strahlencomplexe zweiten Grades untersucht werden, beschäftigt sich der andere mit ihrer Anwendung auf Flächen zweiter Ordnung. Nach den Untersuchungen allgemeiner Natur, die dem Verständniss nicht selten mancherlei Schwierigkeiten bieten, welche nicht immer durch eine eingehendere Ausführung gehoben werden, die der Leser, bei der dem Verfasser eigenen Art möglichst knapper Behandlung, durch wiederholte Ueberlegung überwinden muss, findet die Anschauung bei den Betrachtungen der Oberflächen zweiter Ordnung wieder sichern Boden. Die Beziehung zum Strahlencomplex zweiten Grades wird durch folgende Sätze vermittelt: „Zwei räumliche Polarsysteme bestimmen im Allgemeinen einen Strahlencomplex zweiten Grades; derselbe enthält jede Gerade, deren zwei Polaren sich schneiden, und ist in jedem der beiden Polarsysteme sich selbst zugeordnet, indem die Polaren jedes Complexstrahles wieder Complexstrahlen sind.“ „Werden zu zwei gegebenen räumlichen Polarsystemen alle diejenigen Polarsysteme construirt, von denen jedes mit einem der übrigen oder der gegebenen denselben Strahlencomplex, wie die beiden gegebenen bestimmt, so bilden die Ordnungsflächen der Polarsysteme einen Büschel oder eine Schaar von Flächen zweiter Ordnung.“

Die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung ist eine Raumcurve vierter Ordnung, durch welche sich unendlich viele Flächen zweiter Ordnung legen lassen. Alle Sehnen derselben, welche von einer festen Sehne ausserhalb der Curve geschnitten werden, bilden eine Regelschaar oder eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt ein Hauptpunkt des Strahlencomplexes oder eine Ecke des gemeinschaftlichen Poltetraeders ist. Da zwei Raumcurven vierter Ordnung höchstens acht gemeinschaftliche Punkte haben, so können auch drei beliebige Oberflächen zweiter Ordnung sich in höchstens acht Punkten schneiden; durch neun Punkte ist eine Oberfläche zweiter Ordnung bestimmt. — Uebergehend zu den projectivischen Eigenschaften der Büschel von Flächen zweiter Ordnung (F^2-Büschel), gelangen wir zu dem Satze (S. 155): ,,Diejenigen Geraden, welche den Punkten einer beliebigen Geraden g conjugirt sind hinsichtlich des F^2-Büschels, bilden eine zu g projectivische Kegelfläche zweiter Ordnung oder Regelschaar. Im ersteren Falle liegen auf der Kegelfläche zweiter Ordnung auch die Polaren von g hinsichtlich der Flächen des Büschels; im letzteren Falle sind die Polaren von g Leitstrahlen der Regelschaar.“ Der letzte Theil des Satzes findet sich auf der folgenden Seite noch einmal. Aber es sind nicht die Bedingungen angegeben, unter denen die conjugirten Geraden der Punkte von g eine Kegelfläche bilden; auch ist Nichts gesagt über die Vertheilung derjenigen Geraden im Raume, denen solche Kegel der conjugirten Geraden ihrer Punkte zugehören. Bekannt ist darüber eine Bemerkung von Sturm (vergl. Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, S. 36), worin er zeigt, dass in einer Ebene durch jeden Punkt sich nur zwei solche Gerade ziehen lassen. Es lässt sich aber direct nachweisen, dass zwei von diesen Geraden einer Ebene durch alle übrigen in projectivischen Punktreihen geschnitten werden, dass also alle Geraden einer Ebene, deren Polarhyperboloide in Kegel degeneriren, einen Kegelschnitt einhüllen. Ueber die Vertheilung dieser Geraden im Raume giebt uns aber der vorhin angeführte Satz des 19. Vortrages Auskunft; alle Gerade, deren Polarhyperboloide in Kegel degeneriren, erfüllen einen Strahlencomplex zweiten Grades. Alle Strahlen desselben, die durch einen Punkt gehen, liegen auf einer Kegelfläche; alle in einer Ebene liegende Strahlen des Complexes bilden einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung (S. 136). Diese aus den Eigenschaften des Complexes abgeleiteten Sätze, die aber im Anschluss an den genannten Satz auf S. 155 hätten hervorgehoben werden können, beantworten die gestellte Frage vollständig. Vielleicht wäre noch anzuführen, dass jeder Kegelschnitt, dessen Tangenten solche Gerade sind, deren Polarhyperboloide in Kegel ausarten, die vier Ebenen des gemeinschaftlichen Poltetraeders berühren; dass ferner jede Erzeugende der im Flächenbüschel vorkommenden vier Kegelflächen zu jenen Geraden gehört. Diese Geraden haben aber noch eine andere wichtige Eigenschaft, die nirgends

erwähnt wird. Sie lassen sich in einer solchen Art projectivisch auf das F^2-Büschel beziehen, dass, wenn den Punkten A und B die Flächen A^2 und B^2 entsprechen, die Polarebenen von A nach B^2 und von B nach A^2 zusammenfallen. In dieser Eigenschaft der „gemischten Polarebene" ist aber das Fundament für die Polarentheorie der Oberflächen dritter Ordnung enthalten. Auf letztere führt schon der Schlusssatz des Vortrages: „Ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung erzeugt mit einem zu ihm projectivischen Ebenenbüschel erster Ordnung eine Fläche dritter Ordnung."

Aus dem Umstande, dass die Normalen einer Fläche zweiter Ordnung und die Axen aller auf der Fläche enthaltenen Kegelschnitte einen tetraedralen Strahlencomplex bilden, dessen Strahlen von den Ebenen des Haupttetraeders in projectivischen Punktreihen geschnitten werden, folgt neben anderen Eigenschaften der Hauptsatz: „Zu einem gegebenen Axencomplex lassen sich unendlich viele Flächen zweiter Ordnung construiren; oder es giebt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, welche dieselben Axen besitzen, wie eine gegebene." Unter den Flächen zweiter Ordnung, denen ein bestimmter Axencomplex zukommt, werden besonders zwei Gruppen betrachtet, die „coaxialen und homothetischen" oder die „ähnlichen, concentrischen und ähnlich liegenden" und die „confocalen". Zwei Flächen, denen derselbe Axencomplex zukommt, heissen homothetisch, wenn je zwei Durchmesser, welche parallelen Ebenen in Bezug auf die beiden Flächen conjugirt sind, zusammenfallen. Nennt man denjenigen Punkt, in welchem eine Axe einer Fläche zweiter Ordnung von der zu ihr senkrechten conjugirten Ebene geschnitten wird, einen „Fusspunkt" der Axe, welcher Name davon herrührt, dass der Schnittpunkt einer Normale mit der zu ihr senkrechten conjugirten Ebene der Fusspunkt der Normale ist, so giebt es unter den Flächen zweiter Ordnung, denen derselbe Axencomplex zukommt, unendlich viele, für welche alle Axen dieselben Fusspunkte haben; sie heissen „confocale" Flächen und bilden eine Flächenschaar. Die Axe eines Ebenenbüschels, von welchem je zwei zu einander rechtwinklige Ebenen conjugirt in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung sind, heisst eine „Focalaxe" der Fläche zweiter Ordnung und jede Focalaxe einer Fläche zweiter Ordnung ist eine gemeinschaftliche Focalaxe aller zur ersten confocalen Flächen. Die Focalaxen einer Schaar confocaler Flächen sind identisch mit den Geraden, die auf den confocalen Flächen liegen. Neu eingeführt ist der Begriff des „Focalkegelschnitts" und des „Focalpunktes". Um zu ihm zu gelangen, bringt man mit einer Symmetrieebene der confocalen Flächen jede Ebene und den ihr conjugirten Normalstrahl, d. h. den durch den Pol der Ebene zu ihr senkrechten Strahl zum Durchschnitt; dadurch erhält man auf der Symmetrieebene die zugeordneten Elemente eines ebenen Polarsystems. Die Ordnungscurve desselben heisst der

„Focalkegelschnitt“ und jeder Punkt desselben ein „Focalpunkt“ der confocalen Flächen. Die confocalen Flächen zweiter Ordnung haben zwei und nur zwei reelle Focalkegelschnitte. Jeder derselben wird aus den Punkten des andern durch Rotationskegelflächen projicirt.

Im 24., 25., 26. Vortrage wird die Theorie der Flächen und ebenen Curven dritter Ordnung entwickelt, leider nicht in dem Umfange, den dieselbe beanspruchen könnte. Es fehlt vollständig die Ableitung der Polareigenschaften, welche doch der ganzen Theorie, wie bei den Gebilden zweiter Ordnung, das Hauptinteresse und die Anwendungsfähigkeit auf Gebilde höherer Ordnungen sichern. Bis jetzt hat allerdings eine rein geometrische Polarentheorie der Flächen dritter Ordnung gefehlt; doch hat kürzlich Herr Professor Sturm (Crelle's Journal, „Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung“, Band 88 Heft 3) eine vom Referenten (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 21 S. 436) für ebene Curven dritter Ordnung aufgestellte rein geometrische Polarentheorie auf Flächen dritter Ordnung übertragen. Im Verlaufe der Besprechung wird sich übrigens noch Gelegenheit finden, auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

Die Fläche dritter Ordn. wird auf die Grassmann'sche Art (Crelle's Journal, Bd. 49) erzeugt durch drei beliebige nicht concentrische collineare Strahlenbündel, deren homologe Ebenen sich auf ihr schneiden; jeder Punkt der Fläche kann zum Mittelpunkte von einem der collinearen Bündel, welche die Fläche erzeugen, gemacht werden. Aus den Eigenschaften der beiden auf der Fläche liegenden Systeme von Raumcurven ergiebt sich der Begriff der Polare eines Punktes der Fläche. Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkte S der Fläche an jede Raumcurve des ersten Systems eine Sehne und bestimmt auf ihr denjenigen Punkt, welcher zu S bezüglich der Raumcurve conjugirt ist, so erfüllen alle so gefundenen Punkte eine Fläche zweiter Ordnung, welche die Fläche dritter Ordnung harmonisch von S trennt. Sie heisst die erste Polare von S. Die Eigenschaften der auf F^3 liegenden Raumcurven geben eine sehr wichtige Erweiterung dieses Satzes, von der bis jetzt noch wenig Gebrauch gemacht ist. Sie heisst: „Die sämmtlichen Punkte, welche durch je zwei Punkte der Fläche F^3 von einem ausserhalb gelegenen Punkte P harmonisch getrennt sind, liegen auf einer zweiten Fläche dritter Ordnung.“ In der schon vorher genannten Abhandlung hat Herr Prof. Sturm diesen Satz benutzt, um zu beweisen, dass die Satellitfläche eines Punktes bezüglich einer Fläche dritter Ordnung die erste Polarfläche des Punktes längs einem Kegelschnitte berührt, der in der Polarebene des Punktes liegt. Jener Satz hat aber eine weiter reichende Bedeutung, da er zum Fundamentalsatze der Polarentheorie gemacht werden kann, wie Referent an anderer Stelle näher nachweisen wird.

Jedem Punkte P ist nämlich durch diesen Satz eine Fläche P^3 als Polfläche zugewiesen und die jedem Punkte dieser Fläche zugeordnete

Polfläche muss, wie sofort aus der Entstehung sich ergiebt, durch P gehen. Liegt P auf der Fundamentalfläche F^3, so zerfällt P^3 in die Berührungsebene durch P und in die vorher genannte erste Polarfläche P^2 von P. Eine Gerade durch P schneide F^3 noch in Q und R; die den Punkten P und Q zugeordneten Polflächen zerfallen in die Berührungsebenen und in die Flächen zweiter Ordnung P^2 und Q^2, die ersten Polarflächen von P und Q. Sie schneiden sich in einer Raumcurve ϱ^4 vierter Ordnung, durch welche auch die dem Punkte R zugeordnete Fläche, welche aus der Berührungsebene und der Polarfläche R^2 besteht, gehen muss. Denn ist A ein beliebiger Punkt von ϱ^4, und wird F^3 von den Geraden AP, AQ, AR noch in $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$ geschnitten, so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitte, in Bezug auf welchen A und PQR Pol und Polare sind, da APP_1P_2 und AQQ_1Q_2 harmonische Punkte sind; also sind auch ARR_1R_2 harmonisch und die dem Punkte A zugewiesene Fläche muss durch R, also umgekehrt R^2 durch A, also durch ϱ^4 gehen. Eine zweite Gerade durch P treffe F^3 in $Q_0 R_0$; die ersten Polaren ${Q_0}^2 {R_0}^2$ dieser Punkte schneiden sich in einer auf P^2 liegenden Raumcurve ${\varrho_0}^4$ vierter Ordnung; die beiden Curven ϱ^4 und ${\varrho_0}^4$ haben acht gemeinschaftliche Punkte $S_1 S_2 \ldots S_8$; sie sind die Pole der Ebene $PQRQ_0R_0$ und diese ist die Polarebene eines jeden von ihnen. Die dem Punkte S_1 zugewiesene Polfläche ${S_1}^3$ schneidet F^3 in der Curve dritter Ordnung, in welcher F^3 von der Ebene $PQRQ_0R_0$ getroffen wird; die Flächen F^3 und ${S_1}^3$ schneiden sich in einer Curve dritter Ordnung und daher noch in einer Raumcurve sechster Ordnung, durch welche sich eine Fläche ${S_1}^2$ zweiter Ordnung legen lässt (Sturm, Flächen dritter Ordnung, S. 197); diese ist die erste Polarfläche von S_1. Somit ist der Begriff der ersten Polarfläche eines beliebigen Punktes abgeleitet.

Dem 24. Vortrage über Flächen dritter Ordnung folgt derjenige über die ebenen Curven dritter Ordnung. Der Verfasser hat hier den gewöhnlichen Gang, den er bei den Kegelschnitten selbst eingeschlagen, verlassen, nämlich von den Gebilden der Ebene zu denen des Raumes aufzusteigen; ein Grund hierfür mag wohl der sein, dass er die Eigenschaften der Oberflächen dritter Ordnung brauchte, um folgende Fundamentalsätze aus der Theorie der ebenen Curven zu beweisen: „Durch neun beliebige Punkte lässt sich im Allgemeinen nur eine Curve dritter Ordnung legen; zwei Curven dritter Ordnung schneiden sich in neun Punkten.“ Cremona stellt den zweiten Theil dieses Satzes als Grundsatz auf; synthetisch bewiesen sind jene Sätze zum ersten Male wohl von Herrn Kortum im Jahre 1861 in seiner fast gar nicht bekannt gewordenen Dissertation: „*De proprietatibus curvarum tertii ordinis synthetica methodo deductis*“; darauf von Reye in der Geometrie der Lage S. 208—212, von Milinowski (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 23. Jahrg. 5. Heft S. 343, und 21. Jahrg. 6. Heft S. 427) und von Schur (Zeitschr. f. Math. u. Phys.,

24. Jahrg. 2. Heft S. 119). Bei allen Beweisen kommt es darauf an, zu zeigen, dass eine Curve dritter Ordnung, welche auf die Chasles'sche Art durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt ist, auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden kann und dass dabei von den fünf Grundpunkten der Büschel vier beliebig auf der Curve gewählt werden können. Herr Prof. Reye beweist das Letztere, indem er die Curve dritter Ordnung als Schnitt einer Fläche dritter Ordnung behandelt; die übrigen Beweise stützen sich nur auf Betrachtungen in der Ebene. Mittels dieses Satzes wird im 26. Vortrage nachgewiesen, dass es auf der Fläche dritter Ordnung 27 Gerade giebt; ihre Eigenschaften ergeben sich durch Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Diese Abbildung wird dadurch gewonnen, dass man drei collineare Strahlenbündel, welche die Fläche dritter Ordnung erzeugen, reciprok auf ein ebenes System bezieht; jedem Punkte der Fläche entspricht ein einziger Punkt des Systems. Schneiden sich drei homologe Ebenen der Bündel in einer Geraden, so entspricht dieser ein Punkt des Systems, welcher ein „Hauptpunkt" desselben heisst. Da es nur sechs Hauptpunkte giebt, so giebt es nur sechs Gerade, in denen sich drei homologe Ebenen treffen. Die sechs Hauptpunkte liegen nicht auf einem Kegelschnitte, daher lassen sich sechs Kegelschnitte durch je fünf dieser sechs Punkte legen; jedem entspricht auf der Fläche dritter Ordnung eine Gerade; ebenso den 15 Seiten des von den sechs Hauptpunkten gebildeten Sechsecks; also giebt es 27 Gerade auf F^3. Dieser Beweis ist einfach; ein von Herrn Sturm in der schon citirten Abhandlung als Ergänzung eines Beweises in den „Synthetischen Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung" gegebener Beweis übertrifft ihn wohl an Kürze, benutzt aber den Satz, dass zwei Curven von den Ordnungszahlen 3 und 6 sich in 18 Punkten schneiden. Dieser ist aber bei der angewendeten Erzeugung dieser Curven rein geometrisch nicht bewiesen.

Von den 27 Geraden werden neben den Steiner'schen Sätzen auch diejenigen über Schlaefli's Doppelsechse entwickelt.

Von den bekannten Erzeugungsarten werden nur die erste Steiner'sche und die August'sche (Sturm, Synthetische Untersuchungen, S. 1 und 44) nicht besprochen. Bei der ersten ergiebt sich der Nachweis der 27 Geraden auf der Fläche dritter Ordnung sehr einfach unmittelbar aus der Erzeugungsart ohne Zuhilfenahme einer Abbildung. Die vierte Steiner'sche Erzeugungsart, die sich als specieller Fall der Grassmann'schen ergiebt, wird im 27. Vortrage besprochen. Dieser handelt von dem Flächenbündel zweiter Ordnung, welches durch drei Flächen zweiter Ordnung bestimmt ist. Einem beliebigen Punkte P ist hinsichtlich des Bündels ein Punkt P' conjugirt; den Punkten einer Geraden sind die Punkte einer cubischen Raumcurve conjugirt; den Punkten einer Ebene φ sind hinsichtlich des Bündels die Punkte einer

Fläche F^3 dritter Ordnung conjugirt, auf welcher auch die Pole von φ bezüglich aller Flächen des Bündels, sowie die Mittelpunkte aller in ihm enthaltenen Kegelflächen liegen. Die letzteren liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung, der Kerncurve des Bündels. Jedem Punkte derselben ist hinsichtlich des Bündels eine Gerade, „Doppelsehne", conjugirt, welche die Kerncurve in drei Punkten schneidet; durch jeden Punkt derselben gehen drei Doppelsehnen. — Von speciellen F^2-Bündeln wird nur derjenige untersucht, dessen Flächen eine Gerade gemein haben.

Grössere Wichtigkeit hat aber ein anderer, der sich auf folgende Art herstellen lässt. Es seien A^2 und B^2 zwei Flächen zweiter Ordnung und g eine solche Gerade, dass ihr Polarhyperboloid in einen Kegel degenerirt; A und B seien bezüglich des Büschels $(A^2 B^2)$ die conjugirten Punkte der reciproken Polaren von g nach A^2 und B^2. Ausserhalb g sei C ein beliebiger Punkt, α und β seien seine Polarebenen bezüglich A^2 und B^2, und C^2 sei eine Fläche zweiter Ordnung, in Bezug auf welche A und α, B und β Pol und Polarebene sind. Dann degeneriren auch die Polarhyperboloide von AC nach $(A^2 C^2)$ und BC nach $(B^2 C^2)$ in Kegel und der Bündel $(A^2 B^2 C^2)$ lässt sich projectivisch auf die Ebene (ABC) so beziehen, dass jedem in ihm vorkommenden Büschel eine solche Gerade zugeordnet ist, dass ihr Polarhyperboloid in einen Kegel ausartet und dass, wenn P und Q die den Flächen P^2 und Q^2 entsprechenden Punkte sind, die Polarebenen von P nach Q^2 und von Q nach P^2 zusammenfallen. Der so construirte Bündel gehört dem Polargebüsch der ersten Polarfläche einer Oberfläche dritter Ordnung an.

Mit dem „Gebüsch", seinen projectivischen Beziehungen auf ein räumliches System und der Steiner'schen Fläche vierter Ordnung beschäftigt sich der 28. Vortrag. Vier Flächen zweiter Ordnung bestimmen ein Gebüsch; nämlich je zwei Flächen, welche mit drei der gegebenen in einem Bündel liegen, bestimmen mit der vierten einen neuen Bündel, dessen sämmtliche Flächen dem Gebüsch angehören. Dieses enthält also jeden Büschel, welcher irgend zwei seiner Flächen verbindet, und jeden Bündel, welcher durch drei seiner Flächen gelegt ist. Weist man jeder Fläche des Gebüsches die Polarebene eines festen Punktes P als entsprechende zu, so ist das Gebüsch auf ein räumliches System Σ projectivisch bezogen. Jeder Gruppe von acht Punkten, in welcher drei beliebige Flächen des Gebüsches sich schneiden und die „associirte" Punkte genannt werden, entspricht ein Punkt des Systems Σ. Da zwei Punkte in einer Geraden liegen, so liegen zwei Gruppen associirter Punkte auf einer Raumcurve vierter Ordnung.

Diejenigen Punkte, welche paarweise hinsichtlich des Gebüsches conjugirt sind, liegen auf einer Fläche K^4 vierter Ordnung, nach Jacob Steiner der „Kernfläche" des Gebüsches. Den Kegelflächen

des Gebüsches entsprechen in Σ die Berührungsebenen einer Fläche Φ_4 vierter Classe; dieselbe ist eindeutig auf K^4 bezogen, indem jeder Berührungsebene von Φ_4 der Mittelpunkt der zugehörigen Kegelfläche auf K^4 entspricht. Den Punkten von K^4 entsprechen in Σ die Punkte von Φ_4. — Jeder Verbindungsgeraden zweier associirten Punkte, die ein „Hauptstrahl" heisst, entspricht in Σ eine Doppeltangente von Φ_4 und da acht associirte Punkte 28 Verbindungsgerade haben, so bilden die Doppeltangenten der Fläche Φ_4 ein Strahlensystem 28. Ordnung und Φ_4 ist nach Kummer's Bezeichnung die „Brennfläche" dieses Systems, d. h. der Ort aller Punkte und Ebenen, für welche zwei Strahlen des Systems zusammenfallen.

Einer im F^2-Gebüsch beliebig angenommenen Ebene φ entspricht im System Σ eine Fläche F^4 vierter Ordnung, die Steiner'sche Fläche, welche von der dritten Classe ist, weil durch eine Gerade l sich nur drei Berührungsebenen an die Fläche legen lassen, die denjenigen drei Flächen F^2 des dem Ebenenbüschel (l) entsprechenden Flächenbüschels entsprechen, welche φ berühren. Der Schnittlinie von φ und der Kerncurve K^4 entspricht eine Raumcurve achter Ordnung, längs welcher die Steiner'sche Fläche von der Fläche Φ_4 berührt wird.

Die Ebene φ enthält höchstens drei Hauptstrahlen, also ist das von den Hauptstrahlen gebildete Strahlensystem von der dritten Classe und siebenten Ordnung; da die Schnittpunkte dieser drei Hauptstrahlen in φ associirte Punkte sind, so entspricht ihnen ein Punkt O von F^4, in dem sich die drei Doppelpunktsgeraden der Fläche schneiden, welche den drei Hauptstrahlen von φ entsprechen; O ist ein dreifacher Punkt von F^4. Aus ihm wird F^4 durch einen Strahlenbündel projicirt, welcher auf die Ebene φ quadratisch bezogen ist.

Die zwischen dem F^2-Gebüsch und dem System Σ aufgestellte projectivische Beziehung hat sich somit höchst fruchtbar erwiesen, indem sie in einfachster Weise die Eigenschaften des Gebüsches und der aus ihm hervorgehenden Flächen herleiten liess. Diese Beziehung führt noch zu anderen Flächen vierter Ordnung, denn jeder in Σ angenommenen Fläche L^2 zweiter Ordnung entspricht im Gebüsch eine Fläche vierter Ordnung L^4. Da erstere auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke Strahlenbündel erzeugt werden kann, so kann L^4 durch zwei reciproke F^2-Bündel des Gebüsches erzeugt werden.

Zwei projectivische F^2-Büschel können allemal durch ein Gebüsch verbunden werden; ihnen entsprechen in Σ zwei projectivische Ebenenbüschel, welche eine Regelfläche zweiter Ordnung erzeugen, der wieder eine Fläche vierter Ordnung entspricht, das Erzeugniss der projectivischen F^2-Büschel. Schneidet man alle Gebilde durch eine Ebene, so erhält man den Satz: „Zwei projectivische Kegelschnittbüschel, die in einer Ebene liegen, erzeugen eine Curve vierter Ordnung; dieselbe kann

auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden.“ Bemerkt muss hierbei werden, dass diese Kegelschnittbüschel nicht willkürlich gewählt werden können, sondern dass jeder Kegelschnitt drei feste Paare von Punkten, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, zu conjugirten Punkten haben muss. Die Grundpunkte dieser Kegelschnittbüschel sind entweder die Schnittpunkte homologer Kegelschnitte oder die Punkte, in denen ein durch vier solche Schnittpunkte gelegter Kegelschnitt die Curve vierter Ordnung trifft.

Der allgemeine Satz heisst: Ist eine Curve vierter Ordnung durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt, so kann sie auf unendlich viele Arten durch projectivische Büschel erzeugt werden; die vier Grundpunkte des einen Büschels und einen Grundpunkt des andern kann man beliebig auf der Curve wählen. Zu diesem Satze hat also die projectivische Beziehung zwischen dem Gebüsche und dem System Σ nicht geführt; einen Beweis desselben sehe man in dieser Zeitschrift, 23. Jahrg. 2. und 4. Heft: Milinowski, Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung.

Der 29. Vortrag behandelt besondere Fälle des F^2-Gebüsches, zunächst denjenigen, in welchem alle Flächen desselben einen gemeinschaftlichen Punkt A haben. In diesem Falle bilden die Doppeltangenten von Φ_4, welche den Hauptstrahlen durch A entsprechen, ein Strahlensystem zweiter Classe; der Punkt A ist ein konischer Knotenpunkt der Kernfläche und sein Tangentenkegel ist eine Fläche des Gebüsches; der Ebene φ des Gebüsches entspricht im System Σ eine geradlinige Fläche F^3 dritter Ordnung, die auch durch einen Kegelschnitt und eine projectivische Gerade erzeugt werden kann. — Besprochen werden noch die Fälle, in denen alle Flächen zwei und drei gemeinschaftliche Punkte haben; sind im letzteren Falle ABC die gemeinschaftlichen Punkte, so entsprechen ihnen im System Σ drei Punkte $A_1 B_1 C_1$; jedem Punkte der Ebene ABC entspricht ein Punkt der Ebene $A_1 B_1 C_1$; die beiden Ebenen sind quadratisch verwandt.

Unter den Specialfällen des F^2-Gebüsches, von denen mehrere noch im Anhange untersucht werden, verdient einer, der nicht behandelt ist, besonders hervorgehoben zu werden. Man kann, wie früher S. 54 gezeigt ist, drei Flächen A^2, B^2, C^2 zweiter Ordnung drei Gerade a, b, c und ihre Schnittpunkte A oder (bc), B oder (ac), C oder (ab) so zuordnen, dass die Polarhyperboloide von a nach dem Büschel $(B^2 C^2)$, von b nach $(A^2 C^2)$, von c nach $(A^2 B^2)$ in Kegel degeneriren und dass die Polarebenen von A nach B^2 und von B nach A^2, ebenso von A nach C^2 und von C nach A^2 und auch von B nach C^2 und von C nach B^2 zusammenfallen. Ist nun D ein beliebiger Punkt, der nicht in der Ebene ABC liegt, sind α, β, γ seine Polarebenen nach $A^2 B^2 C^2$, ist D^2 eine Fläche zweiter Ordnung, welche A und α, B und β, C und γ zu Pol und Polar-

ebene hat, so sind auch die Polarhyperboloide von AD nach $(A^2 D^2)$, von BD nach $(B^2 D^2)$ und von CD nach $(C^2 D^2)$ in Kegel ausgeartet. Durch die Zuordnung von A und A^2, B und B^2, C und C^2, D und D^2 sind aber die Punkte des Raumes projectivisch auf die Flächen des Gebüsches $(A^2 B^2 C^2 D^2)$ so bezogen, dass allen Punkten einer Geraden die Flächen eines Büschels entsprechen, dass das Polarhyperboloid dieser Geraden hinsichtlich des zugeordneten Büschels ein Kegel wird, dass ferner allen Punkten einer Ebene die Flächen eines Bündels entsprechen. Ein solches Gebüsch heisst ein „Polargebüsch". Unter den Flächen jedes Büschels desselben giebt es drei, welche durch die homologen Punkte gehen; alle Punkte, welche auf ihren entsprechenden Flächen liegen, erfüllen also eine Fläche F^3 dritter Ordnung, welche zu dem Gebüsche in der Beziehung steht, dass ein Punkt und die ihm entsprechende Fläche Pol und Polarfläche bezüglich F^3 sind.

Einen andern, besonders interessanten Fall lernen wir im letzten, 30. Vortrage kennen, welcher die Theorie des Strahlensystems zweiter Ordnung zweiter Classe und diejenige der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten enthält. Alle Flächen des F^2-Gebüsches sollen einem räumlichen Sechseck 1 2 3 4 5 6 umschrieben sein; die Kernfläche des Gebüsches geht durch die 15 Kanten des Sechsecks und durch die zehn Doppellinien seiner zehn Paar Gegenebenen, ausserdem durch die Raumcurve K^3 dritter Ordnung, welche dem Sechseck umschrieben werden kann. Die Punkte derselben sind associirte Punkte des F^2-Gebüsches und entsprechen also einem Punkte O des Systems Σ; die Kernfläche K^4 wird von jeder Sehne der Curve K^3 in vier harmonischen Punkten geschnitten, von ihren Tangenten aber osculirt, so dass K^3 eine „Haupttangentencurve" von K^4 ist. Die Fläche Φ_4 hat O als Knotenpunkt und ausserdem noch 15 Knotenpunkte, die den Kanten des Sechsecks entsprechen. Alle Doppeltangenten von Φ_4, welche den Strahlen des Punktes 1 entsprechen, bilden ein Strahlensystem I zweiter Classe zweiter Ordnung. Seine Brennfläche Φ_4 ist eine Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten; sie ist die Brennfläche von noch fünf Strahlensystemen, welche aus den Strahlenbündeln 2, 3, 4, 5, 6 abgeleitet werden. Diese sechs Strahlensysteme haben 16 gemeinschaftliche singuläre Ebenen, so dass also die Kummer'sche Fläche 16 singuläre Ebenen hat, deren gegenseitige Beziehungen hier nicht erwähnt werden können, welche aber im höchsten Grade interessant sind und die mannigfachste Anregung geben.

Andere specielle Fälle des Gebüsches finden ihre Erledigung im Anhange, der „zur Uebung für Studirende" eine Zahl von Aufgaben und zu beweisenden Lehrsätzen enthält. „Vorzugsweise sind solche Sätze aufgenommen, welche als Ausgangspunkte neuer Theorien geeignet schienen, den Anfänger zu selbstständiger Forschung anzuregen." Besonders

gilt dies von den Abschnitten über das Flächengebüsch, welche mit der Methode der geometrischen Verwandtschaften vertraut machen, und von demjenigen Abschnitte (S. 275), dessen Ueberschrift lautet: „Büschel, Bündel und Gebüsch linearer Strahlencomplexe. Projectivische Erzeugung quadratischer Strahlencomplexe.“ Zunächst werden zwei Elemente als „einander zugeordnet bezüglich eines linearen Strahlencomplexes“ definirt, wenn sie in dem Nullsystem, aus dessen Leitstrahlen der Complex besteht, einander zugeordnet sind. Alle linearen Strahlencomplexe, welche durch ein Strahlensystem erster Ordnung erster Classe gehen, bilden ein „Complexbüschel“. Zwei projectivische Complexbüschel erzeugen einen Strahlencomplex zweiten Grades. — Drei lineare Strahlencomplexe bestimmen einen durch sie gehenden „Complexbündel“; vier lineare Strahlencomplexe, die nicht in einem Complexbündel liegen, bestimmen ein durch sie gehendes „Complexgebüsch“. Dieses lässt sich auf ein räumliches System collinear beziehen. Für weitere Forschungen über Strahlensysteme und Complexe, denen erst in jüngster Zeit die Untersuchungen der Geometer sich lebhafter zuwenden, ist somit das Fundament gelegt.

Hiermit wäre in grossen Zügen der ungemein reiche Inhalt der Geometrie der Lage angegeben; sie ist in der ganzen mathematischen Literatur augenblicklich das einzige Werk, welches eine Uebersicht über den heutigen Stand der synthetischen Geometrie giebt. Allen Fortschritten derselben ist Rechnung getragen; die „Geometrie der Lage“ steht auf der Höhe der Wissenschaft. Im Verlaufe der Besprechung hat Referent einzelnen Wünschen Ausdruck gegeben. Häufig ist der Ausdruck vielleicht zu knapp und etwas grössere Breite wäre mitunter erwünscht; denn auch Geübtere haben oft Mühe, den Inhalt voll und ganz sofort zu erfassen und die Richtigkeit der Folgerungen zu erkennen, da Verweisungen auf die begründenden Sätze im Allgemeinen nur selten vorhanden sind und überall stets der ganze vorangegangene Inhalt vorausgesetzt wird. Wer sich aber durchgearbeitet hat, kommt zur vollen Erkenntniss des ganzen wohldurchdachten Baues, der innigen Gliederung der einzelnen Theile und der scharfen, präcisen Begründung derselben; er fühlt sich mitten im Leben der Wissenschaft, überall treten ihm anregende Gedanken entgegen und fordern ihn zum eigenen Forschen auf. Dadurch aber ist dem Verfasser die Erfüllung seines Wunsches gesichert, durch sein Werk der synthetischen Geometrie immer neue Freunde zu gewinnen und das Interesse für diese bedeutende Schöpfung unseres Jahrhunderts in immer weitere Kreise zu verbreiten.

Milinowski.

Kalkül der abzählenden Geometrie, von H. SCHUBERT. Leipzig, Teubner. 1879.

Aus einer Reihe von Abhandlungen in den Mathematischen Annalen, den Göttinger Nachrichten und dem Journal für Mathematik ist bekannt geworden, in welcher namhaften Weise Herr Schubert die sogenannte abzählende Geometrie gefördert und Probleme derselben zu bemeistern gewusst hat, welche mit den Mitteln der bisherigen Methoden gar nicht oder nur mühsam zu bewältigen gewesen sind. Es ist ihm dies vor Allem dadurch gelungen, dass er, eine glückliche symbolische Bezeichnung Halphen's benutzend, einen eigenthümlichen Kalkül der Bedingungen ausgebildet hat. In dem vorliegenden Buche giebt er eine neue Bearbeitung seiner schon früher veröffentlichten Darstellung dieses Kalküls, die sich nicht nur durch eine consequentere Durchführung und grössere Klarheit auszeichnet, sondern auch eine Reihe neuer Anwendungen bringt. Wer nur immer mit geometrischen Abzählungen künftighin sich zu beschäftigen hat, wird, wofern er sich mit Schubert's Kalkül bekannt gemacht hat, des Nutzens und der Kraft desselben sich bewusst werden und erkennen, wie die gestellten Probleme an Deutlichkeit, Allgemeinheit und Gedrängtheit gewinnen.

Das Schubert'sche Buch zerfällt in sechs Abschnitte.

Der erste Abschnitt: „Die Symbolik der Bedingungen", erläutert die Symbole und das Rechnen mit denselben. Das äussere Ziel der abzählenden Geometrie ist die Beantwortung aller Fragen: Wie viele Gebilde von bestimmter Definition erfüllen gewisse gegebene Bedingungen? Sie verzichtet zunächst auf die viel schwierigeren Probleme der eigentlichen Construction und der Discussion der Realität.

Wenn es überhaupt ∞^c Individuen eines gewissen Gebildes Γ im Raume giebt, so wird c die Constantenzahl von Γ genannt. Genügen nun ferner einer gewissen Bedingung $\infty^{c-\alpha}$ Gebilde, so ist die Bedingung α-fach oder α^{ter} Dimension, und die Gesammtheit aller $\infty^{c-\alpha}$ Gebilde heisst ein System $(c-\alpha)^{\text{ter}}$ Stufe [oder ein $(c-\alpha)$-fach unendliches System] von Gebilden Γ. Man kann dann nach denjenigen Individuen desselben fragen, die noch einer $(c-\alpha)$-fachen — im Allgemeinen aus mehreren zusammengesetzten — Bedingung genügen. Dass das Gebilde zwei Bedingungen y und z zugleich erfüllen soll, wird als Bedingung yz — symbolisches Product zweier Bedingungen — nach Halphen bezeichnet; $y+z$ heisst, dass y oder z erfüllt werden soll.

Die von den Hauptelementen (Punkt, Strahl, Ebene) erzeugten Grundgebilde erster bis dritter, bez. vierter Stufe: Punktreihe, ...; Strahlbüschel etc., veranlassen Grundbedingungen: eine Grundbedingung für ein Hauptelement oder ein Gebilde ist eine solche, durch die verlangt wird, dass das Hauptelement selbst oder ein dem Gebilde angehöriges in einem gegebenen Grundgebilde sich befinde, z. B. dass eine Curve eine

Gerade treffe (Bedingung ν) oder dass sie eine Ebene berühre (Bedingung ϱ), sind Grundbedingungen: ein Punkt, bez. eine Tangente der Curve soll auf eine Punktreihe (oder „Punktaxe", wie Sch. sagt), bez. in ein Strahlenfeld fallen.

Die Symbole für die Grundbedingungen der Hauptelemente sind: p, p_g, P, dass der Punkt p in eine gegebene Ebene, auf eine gegebene Gerade, in einen gegebenen Punkt selbst falle (ein- bis dreifach); e, e_g, E, dass die Ebene e durch einen gegebenen Punkt, eine gegebene Gerade gehe, gegeben sei; g, g_e und g_p, g_s, G, dass die Gerade g eine gegebene Gerade treffe, mit einem gegebenen Punkte oder einer gegebenen Ebene incidire, einem gegebenen Strahlbüschel angehöre, selbst gegeben sei (einfach, zwei zweifache, dreifach, vierfach). Der Name des Elements dient also zugleich zur Bezeichnung der einfachen Grundbedingung; g^i bedeutet, dass g i gegebene Gerade treffe; gg_p, dass sie eine gegebene Gerade treffe und durch einen gegebenen Punkt gehe. Man ersieht unmittelbar, dass $p_g = p^2$, $pp_g = P = p^3$, $e_g = e^2$, $ee_g = E = e^3$, $gg_p = gg_e = g_s$, $gg_s = g^2{}_p = g^2{}_e = G$, $g_p g_e = 0$, $p^i = 0$, $e^i = 0$, wenn $i > 3$; $g^i = 0$, wenn $i > 4$.

Enthält Γ ∞^α Gebilde Γ', so ist eine α'-fache Bedingung für Γ' eine $(\alpha' - \alpha)$-fache für Γ; da z. B. eine Curve ∞^1 Punkte und Tangenten enthält, so sind die obigen Bedingungen ν, ϱ für eine Curve $(2-1)$-fache.

Hat ein algebraisches Gebilde Γ die Constantenzahl c, so ist die endliche Zahl der Γ, welche einer c-fachen (einzelnen oder zusammengesetzten) Bedingung genügen, unveränderlich, wie auch die der Bedingung angehörigen Gebilde, ihre Art natürlich behaltend, sich ihrer Lage oder Gestalt nach ändern, so lange sie überhaupt endlich bleibt. Dieses längst bekannte algebraische Princip beutet Sch. zum ersten Male in seiner ganzen Bedeutung aus; er nennt es das Princip der Erhaltung der Anzahl (in den früheren Abhandlungen auch: Princip der speciellen Lage).

Ein i-stufiger Ort von Hauptelementen, deren Constantenzahl c ist, wird durch alle einer $(c-i)$-fachen Bedingung genügenden Hauptelemente erzeugt; die nach dem eben Gesagten unveränderliche Zahl derjenigen, welche die i-fache Grundbedingung erfüllen, heisst der Grad des Ortes und — in so noch nicht durchgeführter Consequenz — vertheilt nun Sch. die Worte: Ordnung, Rang, Classe, je nachdem das Hauptelement ein Punkt, ein Strahl oder eine Ebene ist, und muss deshalb von dem Range einer Plancurve sprechen als der Zahl ihrer Tangenten, die eine Gerade treffen.

Um nun zum symbolischen Rechnen zu gelangen, lässt er das Symbol einer c-fachen Bedingung für Γ die constante Zahl der sie erfüllenden Individuen von Γ bedeuten und sagt auch statt: „Anzahl der die Bedingung erfüllenden Individuen" kurz: „Bedingung". So gelangt

er zu „Gleichungen zwischen Bedingungen" und zwar zunächst zu solchen c^{ter} Dimension. Aber sofort ergiebt sich auch für homogene Gleichungen von niedrigerer Dimension ein Sinn. Sind z. B. $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ Bedingungen c'^{ter} Dimension für Γ $(c' < c)$, so sagt die Gleichung

$$x = \alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \ldots + \alpha_n . y_n,$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ numerische Coefficienten sind, aus, dass in jedem System c'^{ter} Stufe von Gebilden Γ die Zahl der Γ, welche x erfüllen, gleich ist der Summe der bez. mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ multiplicirten Zahlen der Γ, welche resp. die Bedingungen $y_1, y_2, \ldots$ erfüllen. Streng genommen muss noch die — im Allgemeinen zusammengesetzte — $(c-c')$-fache Bedingung z, welche das System definirt, hinzugefügt werden, so dass man hat

$$z x = \alpha_1 . z y_1 + \alpha_2 . z y_2 + \ldots$$

Da aber die Gleichung allgemeingiltig, d. h. richtig sein soll, welches auch die Bedingung z sei, so wird dieser (symbolische) Factor weggelassen.

Wenn nun weiter v eine beliebige Bedingung ist, deren Dimension $c'' \leqq c - c'$ ist, so wollen wir sie mit irgend einer Bedingung w von der Dimension $c - c' - c''$ zur definirenden Bedingung z zusammensetzen und haben dann zunächst

$$v w x = \alpha_1 . v w y_1 + \alpha_2 . v w y_2 + \ldots,$$

und da wiederum w ganz willkürlich ist, unterdrücken wir diesen Factor und schreiben

$$v x = \alpha_1 . v y_1 + \alpha_2 . v y_2 + \ldots,$$

eine Gleichung $(c' + c'')^{\text{ter}}$ Dimension, die aus der obigen c'^{ter} Dimension durch „symbolische Multiplication mit v" hervorgegangen ist und, wie jene für jedes beliebige System c'^{ter} Dimension von Γ galt, so für jedes beliebige System $(c' + c'')^{\text{ter}}$ Dimension gilt. Sachlich genommen, ist die symbolische Multiplication eine Particularisation.

Nun ergeben sich bei dieser Multiplication oft Glieder, bei denen sofort erkannt wird, dass sie 0 sind, weil die multiplicirten Bedingungen nicht zugleich erfüllt werden können. Z. B. erhält man für ein zweistufiges System von Strahlen durch Anwendung des Princips von der Erhaltung der Anzahl $g^2 = g_e + g_p$, durch Multiplication mit g, bez. g^2 ergiebt sich

$$g^3 = g_e g + g_p g = g_s + g_s = 2 g_s:$$

ein Complex n^{ten} Grades (Ranges) hat mit einer Regelschaar $2n$ Gerade gemein;

$$g^4 = (g_e + g_p) g^2 = (g_e + g_p)^2 = g^2_e + 2 g_e g_p + g^2_p = G + 0 + G = 2G,$$

das bekannte Steiner'sche Theorem.

Weil man solche verschwindende Glieder weglässt, so ist die symbolische Division nicht zulässig.

Man kann also jede Bedingung, wo sie als Factor auftritt, stets ersetzen durch einen für sie gewonnenen Ausdruck durch andere Bedingungen (derselben Dimension), z. B. oben g^2 durch $g_e + g_p$.

Die Gewinnung solcher Ausdrücke — welche Sch. in den früheren Arbeiten nach Chasles Moduln der Bedingungen genannt hat — wird gerade eine Hauptaufgabe der abzählenden Geometrie.

Der zweite Abschnitt handelt von den sogenannten Incidenzformeln. Es werden Paare zu einander incidenter Hauptelemente betrachtet, zuerst ein Strahl g mit einem auf ihm befindlichen Punkte p, ein Gebilde, wie es z. B. jede Tangente einer Curve mit ihrem Berührungspunkte bildet, und ein einstufiges System von Curven hat ein zweistufiges System solcher Gebilde. Durch das Princip der Erhaltung der Anzahl erhält man für ein zweistufiges System von Strahlpunkten sehr leicht

$$pg = p_g + g_e = p^2 + g_e,$$

d. h. die Zahl der Gebilde, wo der Punkt auf eine gegebene Ebene fällt und zugleich der Strahl eine gegebene Gerade schneidet, ist gleich der Summe der Zahlen der Gebilde, wo der Punkt auf eine Gerade, bez. der Strahl in eine Ebene fällt. Durch symbolische Multiplication werden hieraus noch Formeln höherer Dimension abgeleitet, z. B. $p^3 g = p^2 g_e$.

Für zwei incidente (d. h. sich schneidende) Strahlen g, h ergeben sich aus den vorhergehenden Formeln für p und g, p und h, wo p der Schnittpunkt ist, durch Elimination der Symbole für p die Formeln, z. B. die sehr interessante:

$$G - g_s h + g_e h_p + g_p h_e - g h_s + H = 0.$$

Aus den Strahl-Punkt- und den dazu dualen Strahl-Ebene-Formeln folgen ebenso durch Elimination der Symbole des Strahls die Formeln für Punkt und Ebene, die incident sind; z. B.

$$p^2 e - p^3 = p e^2 - e^3.$$

Beide Seiten dieser Gleichung stellen sich als gleich der Bedingung dar, dass der durch beide Hauptelemente constituirte Strahlbüschel einen gegebenen Strahl enthält, wofür das Symbol $\widehat{pe}$ eingeführt wird.

Enthält der Strahl p n Punkte $p_1, \ldots p_n$, so hat man n Gleichungen

$$p_1 g = p_{1g} + g_e, \quad p_2 g = p_{2g} + g_e, \quad \ldots,$$

und hieraus durch Addition, wenn nun pg und p_g bedeuten, dass irgend einer der n Punkte p_i die betreffende Bedingung erfülle, da dann z. B. $p_{1g} + p_{2g} + \ldots = p_g$ ist,

$$pg = p_g + n.g_e.$$

Für ein höherstufiges System, z. B. ein dreistufiges System von „Punkt-Ebenen", wie es bei einem zweistufigen System von Plancurven a^{ter} Ordnung vorkommt, führt, wenn ν die obige Bedeutung hat, μ, P aber die Bedingungen sind, dass die Curvenebene, bez. die Curve selbst durch einen gegebenen Punkt gehe, die obige Formel

$$p^3 - p^2 e + p e^2 - e^3 = 0$$

zu

$$P = \mu\nu - a.\mu^2,$$

weil $p^3 = P$, $p^2 e = \mu\nu$, $pe^2 = a.\mu^2$ [denn erfüllt die Curvenebene die Bedingung μ^2 (also e^2), so erfüllen a Punkte der Curve von selbst die Bedingung p], endlich $e^3 = 0$; so dass wir für die einer Plancurve auferlegte Bedingung P einen Ausdruck in den Bedingungen μ, ν gefunden haben. In Worten lautet diese Beziehung so: In einem zweistufigen System von Plancurven a^{ter} Ordnung (mit veränderlicher Ebene) ist die Zahl derjenigen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, gleich der Zahl derjenigen, bei denen die Ebene durch einen gegebenen Punkt geht und zugleich die Curve eine gegebene Gerade trifft, vermindert um die a-fache Zahl derer, deren Ebene durch eine gegebene Gerade (oder zwei gegebene Punkte) geht.

Mit solchen Umformungen der Incidenzformeln in Formeln für die Punkt-, Strahlen- und Ebenen-Oerter schliesst der Abschnitt. Eine andere solche für Plancurven geltende Beziehung ist

$$T = \mu^2\varrho - a.\mu^3,$$

wo T die dreifache Bedingung ist, dass die Curve eine gegebene Gerade berühre. Durch Multiplication erhält man

$$PT = (\mu\nu - a.\mu^2)(\mu^2\varrho - a.\mu^3) = \mu^3\nu\varrho,$$

weil alle übrigen Glieder 0 sind; also in einem fünfstufigen System von Plancurven (derselben Ordnung) ist die Zahl derjenigen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zugleich eine gegebene Gerade berühren, gleich der Zahl derjenigen, die, in fester Ebene liegend, eine gegebene Gerade treffen und zugleich eine gegebene Ebene tangiren.

Der dritte Abschnitt: „Die Coincidenzformeln“, beschäftigt sich mit Paaren von Hauptelementen und deren Coincidenzen. Bezeichnet z. B. bei einem Punktepaar p den einen, q den andern Punkt, g den Verbindungsstrahl und zugleich die einfachen Grundbedingungen dieser Elemente, so führt bei einem einstufigen System von Punktepaaren das Chasles'sche Correspondenzprincip, angewandt auf irgend einen Ebenenbüschel, zu

$$\varepsilon = p + q - g,$$

wo ε die Zahl der Punktepaare des Systems ist, deren Punkte coincidiren, für welche Zahl somit ein Ausdruck gewonnen ist in den Grundbedingungen der ein Paar constituirenden Elemente.

Die symbolische Multiplication führt zu Formeln für höhere Systeme, wie z. B.

$$\varepsilon g_p = p g_p + q g_p - g_s$$

oder, vermöge der Incidenzformeln,

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s.$$

Die Coincidenzen können erster, zweiter oder dritter Gattung sein; bei den letzteren, den völligen Coincidenzen, wird g ganz unbestimmt und also g_p von selbst erfüllt. Sie treten erst in drei- und höherstufigen Systemen auf, und wenn sie dann die einzigen sind, so empfiehlt es sich, εg_p durch ein einziges Symbol η zu ersetzen, so dass man dann hat $\eta = p^3 + q^3 + g_s$. Paart man z. B. die Punkte p einer Fläche m^{ter} Ordnung auf alle möglichen Weisen mit denen q einer Curve n^{ter} Ordnung, so ergiebt sich, da hier nur volle Coincidenzen auftreten, nämlich in den gemeinsamen Punkten von Fläche und Curve, weil $p^3 = q^3 = 0$, $g_s = mn$, für die Zahl dieser gemeinsamen Punkte $\eta = mn$, also der bekannte Bézout'sche Satz. Desgleichen werden Sätze über Berührung von Flächen und Curven abgeleitet, wie der bekannte Satz „$m\mu + r\nu + n\varrho$" (S. 70).

Die Ebenenpaarformeln ergeben sich durch Dualität. Beim Strahlenpaare g, h giebt es zwei Ausartungen: die Coincidenz ε und das Schneidepaar σ, bei dem dann noch p und e der Punkt und die Ebene seien, und von Systemen zweiter Stufe ab treten dann noch Schneidepaarcoincidenzen auf: $\varepsilon\sigma$. Zur Gewinnung der Fundamentalformeln dient wieder das Correspondenzprincip (angewandt auf einen Strahlbüschel), das Princip der speciellen Lage und noch eine Punktepaarformel, in dem die Punkte auf g und h gepaart werden. Eine volle Coincidenz genügt von selbst der Bedingung $\varepsilon\sigma p e$, tritt erst in Systemen vierter Stufe auf, und man hat, wenn nur volle Coincidenzen vorhanden sind,

$$\eta = G + g_s h + g_p h_p + g_e h_e + g h_s + H,$$

woraus z. B. mit Leichtigkeit Halphen's Satz über die gemeinsamen Strahlen zweier Congruenzen abgeleitet wird.

Eine weitere interessante Anwendung der Formeln für Strahlenpaare geschieht auf Flächen zweiten Grades, deren jede ja ∞^2 Schneidepaare hat, so dass jede einem Schneidepaar auferlegte i-fache Bedingung für die Fläche eine $(i-2)$-fache ist. Sind μ, ν, ϱ die bekannten elementaren Bedingungen der F^2, durch einen Punkt zu gehen, eine Gerade, bez. eine Ebene zu tangiren, ist ferner z. B. x die dreifache Bedingung, eine gegebene Gerade zu enthalten, so ersieht man leicht

$$\sigma g_e h = 4\varrho, \quad \sigma p G = \sigma e G = x, \quad G h p = \mu x \quad \text{etc.}$$

Die Bedingungen für σ stehen vermöge der gewonnenen Formeln in Beziehung zu den Bedingungen für die Coincidenz $\varepsilon\sigma$. Solche Coincidenzen aber können nur auf den drei ausgearteten Flächen F^2: Kegelschnitt φ, Kegel χ, Ebenenpunktpaar ψ auftreten, und ist z. B. $\sigma\varepsilon p e = 2\varphi + 2\chi + 2\psi$. Zwischen φ, χ, ψ und μ, ν, ϱ bestehen die bekannten von Zeuthen gefundenen Relationen; aus allen diesen Beziehungen leitet Schubert Ausdrücke für die Bedingung x und für ähnliche Bedingungen in den symbolischen Producten der μ, ν, ϱ her.

Es folgen die Formeln für Paare aus ungleichartigen Elementen und den Schluss bildet die Ableitung der Cayley-Brill'schen Formel für

die Zahl der Coincidenzen einer Correspondenz auf einer Plancurve beliebigen Geschlechts.

Der vierte Abschnitt, welcher der bei weitem umfangreichste ist, hat es mit der Reduction der Anzahlen allgemeiner Gebilde auf die Anzahlen der Ausartungen zu thun.

In Kegelschnittsystemen erster Stufe, welche — wie man jetzt nach Halphen's Untersuchungen sagen muss — nur die beiden Ausartungen Punktepaar η und Geradenpaar δ enthalten, bestehen die mit Hilfe des Correspondenzprincips sich ergebenden Beziehungen

$$\nu = \tfrac{2}{3}\eta + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{4}{3}\mu, \quad \varrho = \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{2}{3}\mu,$$

wo μ, ν, ϱ die oben für Systeme von Plancurven gegebenen Bedeutungen haben. Mit Hilfe dieser Formeln werden alle Zahlen μ^3, ν^n, ϱ^{5-n}, aus diesen dann μ^2, ν^n, ϱ^{6-n}, dann μ, ν^n, ϱ^{7-n}, endlich ν^n, ϱ^{8-n} gewonnen, wofern man alle aus sieben Bedingungen μ, ν, ϱ und einer Bedingung δ, η zusammengesetzten Bedingungen kennt. Diese sind aber, da δ und η nur aus Hauptelementen bestehen, mit Berücksichtigung gewisser Regeln über Multiplicitäten, einfach zu berechnen. Vermittelst der obigen Formel für die dreifache Bedingung T, welche hier, wo $a=2$ ist, lautet: $T = \mu^2\varrho - 2\mu^3$, ist dann auch z. B. $T\nu^5 = \mu^2\nu^5\varrho - 2\mu^3\nu^5$, also die Zahl der $T\nu^5$ erfüllenden Kegelschnitte in den oben berechneten ausgedrückt.

Nach dieser von Chasles und Zeuthen ausgebildeten Methode werden demnach die Zahlen für Gebilde stets auf solche für einfachere, ihre Ausartungen, zurückgeführt. Die Ermittelung und Discussion dieser Ausartungen ist freilich meistens eine schwierigere Sache, und dass sie bei den von Schubert betrachteten Fällen erschöpft sind, ist wenigstens dem Referenten nicht bewusst geworden. Bei den Kegelschnitten, Flächen zweiten Grades und den cubischen Curven leitet Sch. — nach Zeuthen's Idee — sie durch eine gewisse centrische Collineation (dies Wort oder das Poncelet'sche „Homologie" wäre wohl richtiger, als das von ihm gebrauchte zu allgemeine „Homographie"), deren constantes Doppelverhältniss den ausgezeichneten Werth 0 hat, aus der allgemeinen Curve oder Fläche ab; aber er gewinnt selbst schon bei der cubischen Plancurve mit Doppelpunkt — abgesehen von den beiden vor ihm durch Zeuthen und Maillard erkannten Ausartungen — nicht sämmtliche elf neuen durch diese centrische Collineation; er sagt, er habe sie zum Theil durch Rückschlüsse aus berechneten Anzahlen gefunden. Sodann hat, wie schon oben bemerkt, Halphen auch seine Bemerkungen gegen Chasles' Charakteristikenformel $\alpha\mu + \beta\nu$ darauf gegründet, dass auch in einfach unendlichen Kegelschnittsystemen nicht blos die beiden Ausartungen δ, η, die man ihnen bisher allein zuschrieb, vorkommen. Also sind hier wohl einige Wünsche berechtigt; immerhin aber darf in Schubert's Zahlenresultate kaum irgendwelcher Zweifel gesetzt werden, da

seine Untersuchungen ihm von selbst die mannigfachsten Controllen dargeboten haben.

Insofern nun eine Ausartung meistentheils aus Theilgebilden besteht, wird eine ihr auferlegte Bedingung entweder durch eins oder das andere dieser Theilgebilde erfüllt; z. B. die cubische Raumcurve als Punktort kann ausarten in einen Kegelschnitt und eine ihn treffende Gerade; der Strahlenort zerfällt dann in den des Kegelschnittes und den doppelten Strahlbüschel, der durch die Gerade und die Kegelschnittstangente im Begegnungspunkte constituirt ist. Soll nun die Bedingung ϱ — dass eine Tangente der Curve in eine gegebene Ebene fällt, eine dem Strahlenorte auferlegte Bedingung — erfüllt werden durch diese Ausartung ω, so geschieht dies entweder dadurch, dass der Kegelschnitt die Ebene berührt (Bedingung r), oder doppelt dadurch, dass der Begegnungspunkt in die Ebene fällt (Bedingung R), also

$$\omega\varrho = r\omega + 2R\omega.$$

Wie oben die Kegelschnitte, so werden auch die Flächen zweiten Grades behandelt; ihre Zahlen werden auf die der Ausartungen φ, χ, ψ reducirt. Für φ und χ, welche dual sind, werden die gewonnenen Kegelschnittanzahlen benutzt, ψ besteht allein schon aus Hauptelementen. Als interessantes Beispiel mag erwähnt werden die Zahl der neun gegebene F^2 berührenden F^2, nämlich $(2\mu + 2\nu + 2\varrho)^9 = 666841088$.

Sodann aber wendet er sich zu dem Problem, durch welches seine Untersuchungen überhaupt veranlasst sind, zu der Kopenhagener Preisaufgabe von 1873, der Bestimmung der Fundamentalzahlen der cubischen Raumcurve. Da von derselben die cubische Plancurve mit Spitze und die mit Doppelpunkt Ausartungen sind, so müssen diese erst vorher berechnet werden. Bei beiden nimmt er als zu behandelnde Bedingungen die schon erläuterten Elementarbedingungen μ, ν, ϱ für Plancurven an, sodann bei der Curve mit Spitze z. B. noch die den sechs Elementen des Dreiecks, das durch Spitze, Wendepunkt und den Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten entsteht, auferlegten Grundbedingungen (singuläre Bedingungen) und führt nun die Anzahlen der allgemeinen Curven mit Spitze oder Doppelpunkt, die zehn, bez. elf solchen Bedingungen („Fundamentalbedingungen“) genügen, auf die Zahlen der Ausartungen zurück, welche neun, bez. zehn solcher Bedingungen erfüllen. In nur durch solche Bedingungen definirten Systemen erster Stufe kommen nach ihm bei der Curve mit Spitze 12, bei der mit Doppelpunkt 13 Ausartungen vor. Diese Untersuchungen sind schon und zwar ausführlicher in den Mathem. Annal. Bd. XIII veröffentlicht und vom Unterzeichneten in den Fortschr. d. Math. Bd. X S. 431 besprochen, so dass ein weiteres Eingehen hier unterbleiben kann.

Noch nicht veröffentlicht sind die Untersuchungen über die cubischen Raumcurven selbst; sie sollten ursprünglich den dritten Theil der in den

Mathem. Annal. erschienenen Beiträge zur abzählenden Geometrie bilden, der nun nicht mehr erscheinen wird. Sch. legt hier nun folgende Bedingungen zu Grunde: ν, dass die Curve eine gegebene Gerade treffe; ν' die duale, dass eine Schmiegungsebene durch eine gegebene Gerade gehe; ϱ, dass die Curve eine gegebene Ebene tangire; ϱ' (dual), dass eine Tangente durch einen gegebenen Punkt gehe; dann die beiden doppelten und zu einander dualen P, P', dass die Curve durch einen gegebenen Punkt gehe, bez. eine gegebene Ebene osculire, und die dreifache T, dass sie eine gegebene Gerade tangire. Er erwähnt, dass er sich auch noch mit drei gewissen Bedingungen β, β', σ beschäftigt habe. In einem einfach unendlichen System von Curven, die nur durch solche Bedingungen definirt sind, hat er 11 Ausartungen gefunden. Aus der einen von ihnen, die zu sich selbst dual ist, leitet er sofort den — von Voss auf anderem Wege erhaltenen — Satz ab: $T^4 = 0$; d. h. obgleich die Constantenzahl der cubischen Raumcurve 12 ist, giebt es doch im Allgemeinen keine Curve, welche vier beliebig gegebene Geraden berührt; vielmehr erzeugen alle Geraden, welche mit drei gegebenen Geraden ein — dann gleich von ∞^1 Curven berührtes — Tangentenquadrupel bilden, einen Complex vierten Grades.

Nun werden gewisse Systeme der Curven zusammengefasst und wir erhalten eine grosse Menge von Zahlen für die cubische Raumcurve, von denen wir uns begnügen, $\nu^{12} = \nu'^{12} = 80160$, $\varrho^{12} = \varrho'^{12} = 56960$ anzuführen. Die Zahl der 12 gegebene Flächen F^2 berührenden cubischen Raumcurven ist 13stellig. Einige der Zahlen, deren Symbole den Factor P^5, P^4 enthalten, sind auf synthetischem Wege vom Referenten gefunden und scheinen Herrn Schubert zu seinen Untersuchungen angeregt zu haben.

Indem er kurz auch die Plancurven vierter Ordnung in fester Ebene betrachtet, macht er aus zwei Ausartungen interessante Rückschlüsse auf die allgemeine Curve (ähnliche hat er auch schon bei den beiden behandelten Plancurven dritter Ordnung gemacht), von denen z. B. der eine ausspricht, dass 12 Strahlen eines Büschels, wenn sie Tangenten einer allgemeinen Plancurve vierter Ordnung sein sollen, derartig von einander abhängen, dass elf von ihnen den zwölften 451440deutig bestimmen. Die algebraische Herleitung dieses Gleichungsgrades ist von der Kopenhagener Akademie als Preisaufgabe gestellt.

Es folgt dann die Behandlung der linearen Congruenz: es genüge, als Beispiel anzuführen, dass es 14 lineare Congruenzen giebt, welche in jedem von acht gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl besitzen, und auf die von ihm hervorgehobene Entstehungsweise der Ausartung dieser Congruenz hinzuweisen: sie wird durch alle Strahlbüschel erzeugt, deren Punkt und Ebene homologe Elemente in einer Punktreihe und einem Ebenenbüschel sind, welche projectiv sind und denselben Träger haben.

Endlich wendet er sich zu den Problemen über Projectivität, Collineation, Correlation, mit denen sich Hirst und der Unterzeichnete beschäftigt haben, jener durchweg, dieser auch zuletzt unter Anwendung der Methode der Reduction auf die Ausartungszahlen; sie werden wesentlich vereinfacht durch die Anwendung des symbolischen Kalküls.

Es werden zunächst betrachtet folgende Gebilde: 1. zwei Gerade g, h, welche bez. eine Punktreihe und einen Ebenenbüschel tragen, die projectiv sind; 2. zwei Gerade g, h, welche zwei projective Ebenenbüschel tragen; 3. ein Ebenenbüschel um g und ein Strahlbüschel (p, e), welche projectiv sind; 4. zwei projective Strahlbüschel (p, e) und (p', e'). Im letzteren Falle z. B. sind die behandelten Bedingungen zunächst die Grundbedingungen für p, e, p', e', sodann die Bedingung ζ, dass entsprechende Strahlen der beiden Büschel zwei gegebene Geraden treffen. Die Ausartung γ tritt dadurch ein, dass die Projectivität so degenerirt, dass jeder der beiden Büschel einen singulären Strahl hat, dem alle im andern homolog sind. Die Reductionsformel ist: $2\zeta = \gamma + p + e + p' + e'$.

Sodann wendet er sich zur Betrachtung von Gebilden (Constantenzahl 14), die aus zwei collinearen, bez. zwei correlativen Bündeln bestehen. Einfache Bedingungen sind p, p' für die Scheitel, sodann μ, ν (von Hirst und mir, jedoch nicht ganz berechtigt, vergl. 6. Abschnitt, Charakteristiken genannt), die Bedingungen, dass zwei conjugirte Strahlen der correlativen Bündel — wenn wir uns hier auf diese beschränken — durch zwei gegebene Punkte, bez. zwei conjugirte Ebenen durch zwei gegebene Geraden gehen. Bei den Ausartungen π, λ enthält jeder der beiden correlativen Bündel einen singulären Strahl, bez. eine singuläre Ebene, und die Correlation geht über in eine Projectivität von zwei Ebenen-, bez. zwei Strahlbüscheln, so dass die vorher gefundenen Zahlen nothwendig werden. Die Reductionsformeln, gefunden mit Hilfe der Paarformeln aus Abschnitt III, lauten: $3\mu = p + p' + \pi + 2\lambda$, $3\nu = 2p + 2p' + 2\pi + \lambda$. Doppelte Bedingungen, wie z. B. dass entsprechende Strahlen collinearer Bündel selbst nach gegebenen Punkten gehen, werden durch „specielle Lage" auf einfache zurückgeführt.

Der fünfte Abschnitt behandelt die mehrfachen Coincidenzen. Als einleitendes Beispiel wird eine Gerade g mit den n Punkten $p_1, \ldots, p_n$ betrachtet, in denen sie eine Fläche F^n schneidet. Die Punktepaar-Formel giebt für die Coincidenz ε_2 von p_1, p_2 nach Abschnitt III $\varepsilon_2 = p_1 + p_2 - g$; sollen noch p_3 und p_4 sich vereinigen und zugleich g in eine gegebene Ebene fallen, so ist

$$\varepsilon_{22} g_e = (p_1 + p_2 - g)(p_3 + p_4 - g) g_e = 4 p_1 p_3 g_e - 4 p_1 g_s + G$$

oder vermöge der Incidenzformeln $= 4 p_1 p_3 g_e - p_1^3 g - 3G$, wenn hierin p_1, $p_1 p_3$ bedeuten, dass irgend einer, bez. irgend zwei der n Punkte in eine, bez. in zwei gegebene Ebenen fallen. Man findet leicht, dass $p_1 p_3 g_e = n^2(n-1)(n-2)$, wenn man überlegt, dass, nachdem die drei

Incidenzen erzielt sind, jede zwei beliebige der $n-2$ übrigen Punkte p_2, p_4 sein können; ferner $p_1{}^3 g = 0$, $G = n(n-1)(n-2)(n-3)$, also $\varepsilon_{22} g_e = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$, die bekannte Zahl der Doppeltangenten eines ebenen Schnittes von F^n. So werden die Anzahlen, die sich auf die singulären Tangenten der F^n beziehen, gewonnen, insbesondere aber auch die der Tangenten, welche fünfpunktig u. dergl. berühren, und damit in überaus einfacher Weise, wie schon am Anfang bemerkt, Probleme gelöst, welche mit den gewöhnlichen Mitteln der analytischen Geometrie noch nicht bewältigt werden konnten. Es wird hier auch die nicht überall berechtigte Benutzung eines Satzes, wie sie in der ersten Bekanntmachung dieser Untersuchungen über singuläre Tangenten stattgefunden hatte (Mathem. Annal. Bd. XI), vermieden.

Dieses Problem von n Punkten auf einer Geraden und ihren vielfachen Coincidenzen wird dann nochmals und ohne die einschränkende Vorstellung, dass sie je die Schnitte mit einer F^n seien, in anderer Weise behandelt, sodann wird das analoge Problem von n Strahlen eines Strahlbüschels und seine Anwendung auf den allgemeinen Complex n^{ten} Grades besprochen.

Eine Reihe von Resultaten, welche Voss durch Betrachtungen der analytischen Liniengeometrie gewonnen, werden bestätigt, viele neue hinzugefügt. Wir erwähnen die Zahl der Strahlbüschel, von deren n einem gegebenen Complex angehörigen sich sechs vereinigt haben, welche also den Complex „sechsstrahlig berühren“; ferner das Analogon der 27 Geraden der cubischen Fläche, die 1280 vollständigen Strahlbüschel, welche ein allgemeiner Complex vierten Grades enthält.

Der sechste Abschnitt endlich behandelt die Charakteristikentheorie. Diese Theorie nahm bekanntlich ihren Ausgangspunkt von dem 1864 von Chasles empirisch gefundenen Satze, dass in jedem Kegelschnittsystem erster Stufe in fester Ebene die Zahl der eine hinzutretende Bedingung z erfüllenden Kegelschnitte gleich $\alpha\mu + \beta\nu$ ist, wo μ, ν die zuerst von Chasles so genannten Charakteristiken des Systems sind, d. h. die Anzahlen seiner Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punkt gehen, bez. eine gegebene Gerade berühren, α, β aber nur von z abhängen. Die allgemeine Frage also geht dahin: Ist es bei einem gegebenen Gebilde Γ möglich, jede beliebige ihm auferlegte i-fache Bedingung durch irgendwelche m andere i-fache Bedingungen auszudrücken, so dass die entstehende Gleichung für jedes System i^{ter} Stufe von Γ richtig ist? Wenn dies möglich ist, dann heissen die Zahlen der Γ eines Systems, die den m Bedingungen genügen, die i-fachen Charakteristiken des Systems, m die i-fache Charakteristikenzahl von Γ; dann kann man aber diese m i-fachen Bedingungen ersetzen durch irgendwelche andere von einander unabhängige m i-fache, z. B. die üblichen einfachen Charakteristiken eines ebenen Kegelschnittsystems erster Stufe durch die Ausartungszahlen

δ, η. Ferner lässt sich dann die Zahl der gemeinsamen Elemente eines Systems i^{ter} Stufe von Gebilden Γ (Constantenzahl c) und eines Systems $(c-i)^{\text{ter}}$ Stufe von Γ darstellen als eine Summe von m (gewöhnlichen) Producten, bei denen der erste Factor stets die Anzahl der Γ des ersten Systems ist, die einer gewissen i-fachen Bedingung genügen, und der zweite die Zahl der Γ aus dem zweiten, welche eine gewisse $(c-i)$-fache Bedingung befriedigen. Da jede den Mitgliedern eines Systems i^{ter} Stufe auferlegte Bedingung als definirende Bedingung z eines Systems $(c-i)^{\text{ter}}$ Stufe angesehen werden kann, so läuft, für ein vorgelegtes Gebilde Γ, das Charakteristikenproblem auf die Aufstellung solcher Formeln für alle Werthe von i von 1 bis $\frac{1}{2}c$, bez. $\frac{1}{2}(c-1)$ hinaus, wofern sie möglich sind; die ersteren Factoren sind dann die Charakteristiken des Systems i^{ter} Stufe, analog den Chasles'schen μ, ν, die anderen hängen von der Bedingung z ab und sind den α, β analog. Es erhellt hieraus, das die i-fache Charakteristikenzahl eines Gebildes stets mit der $(c-i)$-fachen gleich ist.

Für die Hauptelemente ist durch die Bézout'schen und den Halphen'schen Satz das Problem erledigt. Es wird nun der Beweis für den Chasles'schen Satz gegeben, d. h. die Formel für die Anzahl der Kegelschnitte, welche zwei Systemen erster und vierter Stufe in derselben Ebene gemein sind, bewiesen; freilich wird dabei, wie schon oben bemerkt, auf die Möglichkeit solcher Ausartungen, wie sie neuerdings Halphen (*Proc. London Math. Soc. IX*, Mathem. Annal. XV) auch in Systemen erster Stufe vorkommend erkannt hat, nicht Rücksicht genommen; wie sich Sch. selbst über Halphen's Aufsätze äussert, sehe man Fortschr. d. Math. X, 407.

Weitere Gebilde, für welche das Charakteristikenproblem erledigt wird, sind: 1. ein Strahl mit einem auf ihm befindlichen Punkte, 2. der Strahlbüschel, 3. Strahl mit incidentem Punkte und incidenter Ebene, 4. Strahl mit n incidenten Punkten, 5. n Strahlen eines Büschels. Die Zahl der Strahlbüschel z. B., welche einem zweistufigen und einem dreistufigen System von Strahlbüscheln gemeinsam sind, ist

$$x = p'^2 . e^3 + p'e' . \widetilde{pe} + e'^2 . p^3,$$

wo die gestrichenen Symbole sich auf das zweistufige System beziehen. Als interessante Anwendung werden die Tangentenbüschel einer Fläche von der Ordnung n, dem Range r, der Classe m und die der Flächen eines Systems erster Stufe mit den Elementarzahlen μ, ν, ϱ genommen; es ist $p'^2 = n$, $p'e' = r$, $e'^2 = m$; $p^3 = \mu$, $\widetilde{pe} = \nu$, $e^3 = \varrho$; also giebt es $n\varrho + r\nu + m\mu$ Flächen des Systems, welche die Fläche (n, r, m) tangiren. Derartige Anwendungen sind sehr zahlreich und bestätigen bekannte Resultate oder bringen neue; die Gebilde 4) und 5) werden besonders benützt zur Gewinnung von Sätzen über die vielfachen Secan-

ten der vollen Schnittcurve zweier Flächen, und über die zweien Complexen gemeinsamen Congruenzen.

Das Buch schliesst mit einem sehr eingehenden Literaturnachweise, einem Sach- und einem Autorenregister.

Dass der Verfasser nicht mit Unrecht von seinem Buche aussagt, es habe auch den Zweck, die Eigenschaften des Raumes in einem neuen Lichte erscheinen zu lassen, dürfte aus dieser Besprechung desselben vielleicht sich ergeben.

Münster. R. Sturm.

Einleitung in die Analysis, von R. Götting, Oberlehrer am Gymnasium zu Torgau. Berlin 1880, J. A. Wohlgemuth's Verlagsbuchhdlg. (Max Herbig). II, 188.

An Büchern, welche zur Einleitung in die Analysis dienen, ist in den letzten Jahren wahrlich kein Mangel fühlbar geworden, und es hat namentlich mit Freude begrüsst werden können, dass Schriftsteller von anerkannter Bedeutung es nachgerade auch in Deutschland nicht verschmähen, mit Lehrbüchern in die Oeffentlichkeit zu treten. Um so mehr darf und muss aber die Kritik an jedes neu erscheinende Werk der Art die Frage der Berechtigung knüpfen. Ist nun, wie uns däucht, ein Werk vollberechtigt nur dann, wenn es in Stoff, oder Anordnung, oder Beweisführung wesentlich von anderen Schriften sich unterscheidet, so wird verhältnissmässig selten das Beiwort voller Berechtigung zuertheilt werden können. Das uns vorliegende Werk verdient es in ausgesuchter Weise. Wir erklären gleich zum Voraus, dass uns lange kein Buch in die Hände gekommen ist, welches einen sympathischeren Eindruck auf uns gemacht hätte, und wenn wir einzelne Punkte hervorheben, wo wir dem Verfasser nicht beizustimmen vermögen, so sind das eben nur Einzelheiten, die Gesammtwirkung nicht beeinträchtigend.

Das I. Capitel (S. 1—46) führt die Ueberschrift: „Permutationen. Binomischer Satz. Arithmetische Reihen.“ Gleich in diesem ersten Abschnitte sehen wir den Verfasser erfolgreich bemüht, seine Leser mit Begriffen der modernen Mathematik bekannt zu machen, wenn dieselben auch nicht zu den unentbehrlichen Hilfsmitteln gehören, deren er sich weiter zu bedienen hat. Die einzelnen Permutationsformen werden nämlich durch Substitutionen aus einander abgeleitet, und diese Gelegenheit ist benutzt, um einige Haupteigenschaften aus der Substitutionenlehre mitzutheilen. Die Permutationszahlen $\Pi_n = n!$ werden auf ihren Sinn geprüft, wenn $n=0$ oder gar negativ ist, und alsdann kommen die Eigenschaften von $\frac{\Pi_n}{\Pi_a \cdot \Pi_b}$ bei $a+b=n$ zur Entwickelung, die Binomialcoefficienten, wie der Verfasser sie vorgreifend nennt. Mit der Bezeich-

nung n_α, gesprochen: n Index α, für den Binomialcoefficienten können wir uns nicht einverstanden erklären, da die Indicirung eines Buchstaben ohne functionale Beziehung des Index zum Hauptbuchstaben auch in dem vorliegenden Buche, wie selbstverständlich, so oft vorkommt, dass Verwechslungen fast nicht zu vermeiden sind. Das übliche $\binom{n}{\alpha}$, gesprochen: n über α, scheint uns weit vorzuziehen und die Verwechselung mit dem Zeichen der Substitution kaum zu befürchten. Bei der Darstellung des Binomialsatzes für ganze positive Exponenten ist $(a+b)^n = A+B$ gesetzt, wo unter A die Summe aller Glieder mit geraden, unter B die der Glieder mit ungeraden Potenzen von b verstanden sind. Aehnlich ist $(a+bi)^n = A'+B'i$, wo A' mit A, B' mit B, abgesehen von den wechselnden Vorzeichen, Glied für Glied übereinstimmt. Damit gewinnt der Verfasser schon auf S. 29 den wichtigen Satz, dass A' höchstens gleich A, B höchstens gleich B sein kann. Wir heben endlich aus diesem Capitel noch die Lehre von den arithmetischen Reihen beliebiger Ordnung (S. 38 flgg.) hervor, welche in methodisch neuer Weise von der allgemeinen Form des n^{ten} Gliedes der Reihe ausgeht, um aus ihr die Eigenschaften der auf einander folgenden Differenzenreihen zu entwickeln.

Das II. Capitel (S. 47—85) ist überschrieben: „Geometrische Reihe. Exponentialfunctionen.“ Hier ist (S. 47) der Satz ausgesprochen, e^n werde, wenn e ein echter Bruch ist, kleiner als jede noch so kleine Zahl. Das ist ja gewiss wahr, aber es sollte bewiesen werden. Folgender Beweis scheint der einfachste. Wenn p und q positive Werthe sind, n positiv und ganzzahlig, so ist vermöge des Binomialsatzes $(p+q)^n > np^{n-1}q$. Jedes echtgebrochene e ist aber $=\frac{p}{p+q}$ und somit $e^n = \frac{p^n}{(p+q)^n} < \frac{p^n}{np^{n-1}q}$ oder $e^n < \frac{p}{nq}$, und der Bruch rechts sinkt bei wachsendem n unter jeden angebbaren Werth. Sehr hübsch ist sodann (S. 48) die Untersuchung, unter welcher Voraussetzung e^n unendlich klein werde, falls $e = a+bi$; bei dieser Gelegenheit übt der vorerwähnte Satz über $(a+bi)^n = A'+B'i$ seine Wirkung, wird auch der Begriff der Norm einer complexen Grösse, sowie der der Convergenz einer Reihe eingeführt und damit der Uebergang zur Function $\cos x + i.\sin x$ gewonnen. Die beiden trigonometrischen Functionen sind als bekannt vorausgesetzt, das Argument x ist als Zahl verstanden, welche die Länge eines Bogens im Kreise mit dem Radius 1 angiebt. Das Moivre'sche Theorem kann schon nach wenigen Seiten entwickelt werden. Um nun zu Kriterien der Reihenconvergenz zu gelangen, die Glieder der unendlichen Reihe bereits als complexe Grössen gedacht, ist S. 57 eine hübsche kleine Untersuchung über die Werthe von $\sin\delta$, $\cos\delta$, $\tan\delta$, wenn $0<\delta<1$ ist, eingeschaltet, aus-

gehend von der als bekannt vorausgesetzten Ungleichung $\tan\delta > \delta > \sin\delta$. Kurze Betrachtungen über Reihenconvergenz folgen und S. 61 flgg. die Exponentialreihe mit complexem Argumente, von deren Summe $f(x)$ in für den Anfänger wohl etwas schwieriger Beweisführung der Satz $f(x).f(y) = f(x+y)$ festgestellt wird. Bei den weiteren Folgerungen ist, soweit wir fanden, einmal die nothwendige Strenge ausser Acht gelassen, S. 69, wo aus dem fortwährenden Wachsen von $f(x)$ zugleich mit x, dessen Fortschreiten zur Unendlichkeit ohne Weiteres behauptet wird, als ob kein Steigen gegen eine endliche Grenze hin möglich wäre. Die Ergänzung des Beweises ist übrigens leicht. Jetzt tritt auch die Versinnlichung der complexen Zahlen in der Zahlenebene ein und lässt den Begriff der Stetigkeit zu deutlichem Bewusstsein gelangen.

Das III. Capitel (S. 85—127), Logarithmen und Arcus Tangentis. Wir heben eine interessante Entwickelung (S. 88) von $(x+y+xy)^n$ nach Ausdrücken von der Form $s_n = x^n + y^n$ hervor, auf welche übrigens der Verfasser selbst in dem Vorworte aufmerksam macht. Sie dient insbesondere dazu, um nach weiteren Betrachtungen über Reihenconvergenz umgekehrt eine nach s_n fortschreitende unendliche Reihe in eine solche zu verwandeln, welche nach $(x+y+xy)^n$ geordnet ist, wodurch auch $\varphi(1+x) + \varphi(1+y) = \varphi(1+x+y+xy) = \varphi[(1+x)(1+y)]$ bewiesen werden kann, sofern $\varphi(x)$ die logarithmische Reihe bedeutet. Da stets complexe Argumente der Betrachtung unterliegen, auch die geometrische Versinnlichung nicht ausser Acht gelassen wird, so ist die Gemeinschaft von Logarithmen und Arcus Tangentis sofort hergestellt.

Das IV. Capitel (S. 127—188) bildet mit dem allgemeinen binomischen Satze und Anwendungen desselben den Schluss des Bändchens. Dieser letzte Abschnitt geht von dem n^{ten} Binomialcoefficienten der x^{ten} Potenz aus, dessen Eigenschaften für beliebige complexe x dargestellt werden. Die Anwendungen bestehen alsdann aus mancherlei Reihenentwickelungen theilweise ziemlich zusammengesetzter Natur.

Diese nur ganz flüchtige Inhaltsangabe wird wohl genügen, um die Ueberzeugung hervorzurufen, dass es ein sehr eigenartiges, lesenswerthes Buch ist, welches wir in den Anfangsworten zu empfehlen mit gutem Gewissen wagen durften. Wir schliessen unsern Bericht, indem wir jene Empfehlung wiederholen und ihr noch beifügen, dass der Verfasser eine grosse Anzahl zweckmässig gewählter Uebungsaufgaben nach jedem wichtigeren Satze hat folgen lassen, zum Theil mit Angabe der Resultate, zum Theil mit Andeutungen ihrer Auflösung versehen, eine Beigabe, deren gewiss die meisten Leser sich erfreuen werden, zumal solche, welche aus dem Buche die ersten Kenntnisse der darin vorgetragenen Lehren sich erwerben.

Cantor.

Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires, par Dr. P. M. Heringa.

Der Verfasser geht aus von dem Plateau'schen Versuche*, bei welchem eine Eisenscheibe mit centraler Oeffnung in eine in einem alkoholischen Gemisch schwebende Oelkugel so hineingeführt wird, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht in die Ebene der Scheibe fällt. Ist dabei die Scheibe von grösserem Radius, als die Kugel, so breitet sich das Oel über die Scheibe aus und bildet zwei sphärische Segmente von ungleicher Krümmung. Infolge der grösseren Krümmung des grösseren Segments ist nach der Theorie der Capillarität der Druck auf der Seite dieses Segments der grössere; daher bewegt sich die Flüssigkeit nach der Seite des kleineren Segments hin und Gleichgewicht tritt erst ein, wenn die beiden Segmente gleich geworden sind. Dabei bewegt sich offenbar der Schwerpunkt der ganzen Oelmasse und der Verfasser findet eine Verletzung des Schwerpunktssatzes darin, dass eine solche Bewegung des Schwerpunktes einer Masse infolge von Kräften eintreten soll, welche die Theile der Masse selbst auf einander ausüben. Er hat dabei übersehen, dass die Oelmasse wegen ihrer Verbindung mit der festgehaltenen Scheibe nicht frei ist, während der Schwerpunktssatz, welchen er im Sinne hat, nur für ein freies System gilt. Ebenso bewegt sich der Schwerpunkt eines an einem Ende befestigten Stabes, wenn dieser schwingt, infolge innerer Kräfte, der Elasticitätskräfte.

Aus der geschilderten Betrachtung hat der Verfasser Verdacht gegen die Theorien der Capillarität von Laplace, Gauss, Poisson geschöpft und glaubt wirklich in all' diesen Theorien principielle Fehler aufgefunden zu haben. Zur Beurtheilung des Gewichts der Einwürfe, welche der Verfasser gegen diese Theorien macht, führen wir ein Paar Betrachtungen desselben an.

Nach Laplace wird die Wassersäule in einem Capillarrohr getragen durch die Wirkung des Meniscus auf die Wassersäule. Der Verfasser fragt, weshalb die Wirkung des Meniscus auf die Wassersäule nicht aufgehoben werde durch die Wirkung der Wassersäule auf den Meniscus (S. 8). Gewiss wird der Verfasser keine Schwierigkeit darin finden, zu erklären, wie ein Bleiloth von dem Faden, an dem es hängt, getragen wird durch die Wirkung des Fadens auf das Bleiloth; und doch könnte er hier mit demselben Rechte fragen, weshalb nicht die Wirkung des Fadens auf das Bleiloth aufgehoben werde durch die Wirkung des Bleiloths auf den Faden.

Durch ganz dieselbe Schlussweise glaubt der Verfasser zu zeigen, dass die Theorie von Gauss auf falscher Grundlage beruhe**. Indem

* *Statique exp. et théor. des liquides soumis aux seules forces moléculaires. T. I § 18.*

** S. 16—17.

Gauss das Gleichgewicht einer flüssigen Masse bestimmen will, die mit festen Wänden in Berührung ist, zieht er die Kräfte in Betracht, welche die Flüssigkeitstheilchen auf einander und welche die festen Wände auf die Flüssigkeitstheilchen ausüben. Nach dem Verfasser hätte Gauss die Kräfte vergessen, welche die Flüssigkeitstheilchen auf die festen Wände ausüben.

Es war der Hauptzweck des Verfassers, seine Leser von der Unvollkommenheit der herrschenden Theorien der Capillarität zu überzeugen; um so mehr glauben wir nach dem Gesagten auf die Reproduction der neuen Ideen des Verfassers verzichten zu dürfen.

Freiburg i. B., den 23. Nov. 1880. E. WARBURG.

Trois lettres inédites de Jean Ier Bernoulli à Léonard Euler tirées de la correspondance de Jean Ier Bernoulli gardée dans la bibliothèque de l'académie royale des sciences de Stockholm par Gustaf Eneström. Stockholm 1880. *Kongl. Boktryckeriet, P. A. Norstedt & Söner.* 24 S.

Bekanntlich ist es dem berühmten Astronomen Gyldén gelungen, jene sagenhafte Correspondenz Johann Bernoulli's, die nur durch eine gelegentliche Notiz in Hindenburg's „Archiv" bekannt, seitdem aber vollständig verschollen war, in den Archiven der königl. schwedischen Akademie zu Stockholm wiederzufinden; eine Publication des für die Geschichte der Wissenschaft natürlich äusserst wichtigen Briefwechsels war damals, einer Ankündigung in der Zeitschrift der Züricher naturwissenschaftlichen Gesellschaft zufolge, von jener gelehrten Körperschaft in Aussicht genommen worden. Leider ist es dann wieder ganz stille davon geworden, und man hat nichts mehr davon gehört, ob die Verwirklichung des gefassten Planes erfolgen werde oder nicht. Um so angenehmer musste es überraschen, dass nunmehr wenigstens ein kleiner Bruchtheil dieser reichen Sammlung dem Publicum zugänglich gemacht worden ist, denn einmal haben wir es hier wirklich mit einer recht dankenswerthen und interessanten Gabe zu thun, und zum Zweiten dürfen wir hoffen, dass nun das Eis gebrochen ist. In Dr. Eneström, der sich durch seine treffliche Monographie über die Geschichte des isoperimetrischen Problems und verschiedene kleinere Arbeiten bereits sehr vortheilhaft bekannt gemacht hat, würde die Stockholmer Akademie gewiss den richtigen Mann gefunden haben, welchem sie die Lösung auch der grösseren Aufgabe getrost überlassen könnte, und so darf man wohl mit Zuversicht hoffen, dass der von allen Freunden der geschichtlich-mathematischen Forschung gehegte lebhafte Wunsch in Bälde auf Erfüllung zu rechnen haben werde.

Von den zwischen Johann Bernoulli und Leonhard Euler gewechselten Briefen sind mehrere bereits in der von Fuss edirten „*Correspondance mathématique et physique*“ abgedruckt worden. Drei weitere übergiebt uns hier Herr Eneström; der Inhalt derselben ist ein sehr mannichfaltiger. In dem ersten ertheilt Bernoulli seinem jüngern Landsmanne in ziemlich vornehmem Tone Aufklärung über seine Auffassung des Wesens der Logarithmen negativer Grössen. Man weiss, dass in dieser lang andauernden Controverse die von Bernoulli und d'Alembert vertretene Theorie unterlag, und auch in der hier behandelten Angelegenheit ist der zurechtgewiesene Euler in seinem Rechte. Die Nr. 1 beschäftigt sich in ihrer Fortsetzung mit der Integration der Differentialgleichung*

$$d\,dx = x^n Y\, dx^{m-n}\, dy^{2-m} + x^p Y\, dx^{q-p}\, dy^{2-q} + \dots$$

und mit dem Problem der geodätischen Linie. Sonderbar ist, dass Bernoulli gelegentlich dieses letzteren auch die Euler'sche Bezeichnung „konoidische Flächen“ tadelt. Der zweite Brief kommt zuerst nochmals auf die obige Differentialgleichung zurück, ist aber in seinem weiteren Verlaufe einer von Euler gestellten Aufgabe gewidmet: „*data qualicunque curva, invenire aliam ei jungendam, per quam utramque oscillationes integrae sint isochronae in vacuo*“. Im dritten Schreiben (vom 6. November 1737) nimmt der Vater seines Sohnes Johannes Erstlingsarbeit gegen einige Ausstellungen Euler's in Schutz, welche der Letztere gegen des jungen Mannes Methode, die Geschwindigkeit des Lichtes und Schalles zu bestimmen, geltend gemacht hatte. Weiterhin folgt eine Diatribe über die Frage, ob der Name „Mechanik“ oder „Dynamik“ für die von Euler zuerst systematisch bearbeitete Wissenschaft vorzuziehen sei, und hierauf der Versuch, Euler'n einen von ihm begangenen Fehler nachzuweisen — was freilich dieser, wie Herr Eneström darthut, nicht gelten lässt. Endlich kommt Bernoulli noch auf Euler's Verfahren der Reihensummirung mit Hilfe der Integralrechnung zu sprechen und kann nicht umhin, demselben alles Lob zu Theil werden zu lassen.

Der Herausgeber hat durch erläuternde Noten für besseres Verständniss des merkwürdigen Briefcyklus gesorgt und durch dieselben thatsächlich auch erreicht, dass kein moderner Leser Schwierigkeiten bei der Lecture begegnen wird. Man darf demselben deshalb für seine Leistung sehr dankbar sein; indess wollen wir sie, wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden möge, nur als eine Abschlagszahlung betrachtet wissen.

---

* Nach Euler's Erinnerung ist die Methode übrigens nur für eine Differentialgleichung von etwas weniger allgemeinem Charakter brauchbar.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi fondatore dell' accademia dei lincei e da esso intitolato „del natural desiderio di sapere et institutione de Lincei per adempimento di esso". Ricerche del socio Gilberto Govi. Roma. Coi tipi del Salviucci. 1880. 20 S.

Friedrich Cesi, Fürst von St. Angelo, ist in der Geschichte der exacten Wissenschaften wohlbekannt als Stifter jener ehrwürdigen Akademie „der Luchse", welche, wenn auch neuerdings zweigetheilt, bis zu unseren Tagen sich ihre volle Lebenskraft bewahrt und erst soeben wieder durch Publication vorliegender interessanter Schrift den Liebhabern historischer Forschung einen anerkennenswerthen Dienst erwiesen hat. Der seiner Aufgabe völlig mächtige Herausgeber macht sich zuerst daran, den Zeitpunkt festzustellen, zu welchem Cesi's Rede gehalten ward; verschiedene mit Geschick gegen einander gehaltene Gründe lassen es wahrscheinlich erscheinen, dass dies nicht vor dem Jahre 1614 geschah. Da nun constatirt ist, dass am 26. Januar 1616 eine Akademiesitzung stattfand, an welcher die Mitglieder Stelluto, Johann Faber, Lucas Valerius (der Neubegründer der theoretischen Statik) und endlich Galilei Theil nahmen, so mag wohl in dieser Sitzung Cesi seine Ansprache gehalten haben, welche er denn auch in der That an keinen Andern besser, als an das berühmteste Mitglied der Körperschaft adressiren konnte. Einer kurzen bibliographischen Beschreibung der Handschrift lässt sodann Herr Govi den Abdruck dieser selbst folgen. Der Vortrag ist für die Gedankenrichtung bezeichnend, welche für naturwissenschaftlich gebildete Männer in jener Zeit die massgebende war. Speciell möge die ehrende Erwähnung hervorgehoben werden, welche Galilei's optischen Entdeckungen zu Theil wird. Auf einem beigefügten Concept hatte Cesi einen Theil des Verdienstes an der Erfindung des Fernrohres dem von ihm hochverehrten Porta, Verfasser der „*Magia Naturalis*", zu vindiciren gesucht, indess scheint er sich später von der Unhaltbarkeit dieser Ansicht überzeugt und Galilei's grosse Leistung voll anerkannt zu haben. — Durch Anmerkungen unter dem Texte hat der Herausgeber das Verständniss des merkwürdigen Documents in dankenswerther Weise zu erleichtern gesucht.

Ansbach. Dr. S. Günther.

Bibliographie

vom 16. November 1880 bis 31. Januar 1881.

Periodische Schriften.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann, Müller u. Wangerin. 10. Bd. 1878. 3. Heft (Schluss). Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet v. Grunert, fortgesetzt v. R. Hoppe. 66. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. v. J. C. V. Hoffmann. 12. Jahrg. 1881. (12 Hefte.) 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 10 Mk. 80 Pf.

Centralzeitung für Optik und Mechanik, red. v. O. Schneider. 2. Jahrg. (24 Nummern.) Nr. 1. Leipzig, Gressner & Schramm. pro compl. 8 Mk.

Zeitschrift für Instrumentenkunde, redigirt von Schwirkus. 1. Jahrg. (12 Hefte.) 1. Heft. Berlin, Springer. pro compl. 15 Mk.

Repertorium für physikalische Technik und Instrumentenkunde, herausgegeben von Ph. Carl. 17. Bd. (12 Hefte.) 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 24 Mk.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1883. Herausgeg. vom Reichsamt des Innern, redig. von Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 5 Pf.

Fortschritte der Physik. 1879—1880. Cöln, Mayer. 3 Mk.

Publicationen des astrophysischen Observatoriums zu Potsdam. 2. Bd. Nr. 5. (Sonnenflecken-Beobachtungen von 1846—1879; v. Spörer.) Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica; ed. F. Frenkel. 30. Jahrg. 1. Heft (Januar-Juni), 1880. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl., Abth. II. 82. Bd. 3. Heft. Wien, Gerold. 3 Mk. 20 Pf.

Register zu d. B. 76 bis 80 d. Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien; math.-naturw. Cl. Wien, Gerold. 90 Pf.

Geschichte der Mathematik.

Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig, Engelmann. 16 Mk

Reine Mathematik.

Scheibner, W., Supplement zur Abhandlung über die Reduction der elliptischen Integrale. (Sächs. Gesellsch.) Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 50 Pf.

Günther, S., Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen. Halle, Nebert. 12 Mk.

Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. 3. Aufl. 2. Abth. (Schluss). Braunschweig, Vieweg. 7 Mk. 20 Pf.

Spitzer, S., Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 1. Fortsetzung. Wien, Gerold. 4 Mk.

Winckler, A., Die Integration linearer Differentialgleichungen u. Herr Prof. Simon Spitzer. Wien, Hölder. 72 Pf.

——, Ueber den letzten Multiplicator eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Pick, G. u. M. Unger, Grundzüge der Theorie einer Classe Abel'scher Integrale. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.

Gegenbauer, L., Algorithmen zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Schier, O., Zur Theorie der Potenzensummen. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Igel, B., Ueber die Frage, unter welchen Bedingungen eine binäre Form m^{ter} Ordnung Theiler einer binären Form n^{ter} Ordnung ist. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber eine specielle symmetrische Determinante. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Bruhns, C., Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Decimalen. 2. Ausg. Leipzig, Tauchnitz. 4 Mk. 20 Pf.

Adam, W., Lehrbuch der Geometrie. 2. Aufl. 1. Thl.: Planimetrie; 2. Thl.: Stereometrie. Berlin, Stubenrauch. à 2 Mk.

Rüegg, H., 600 geometrische Aufgaben. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 60 Pf.

Rüefli, J., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Bern, Dalp. 1 Mk. 80 Pf.

Kohn, G., Ueber algebraische Raumcurven. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Petersen, J., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon. Kopenhagen,. Høst & S. 1 Mk. 60 Pf.

Encyclopädie der Naturwissenschaften. Handbuch der Mathematik. 6. Lief. Breslau, Trewendt. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

Löwe, O., Ausgewählte Capitel aus der darstell. Geometrie zum Gebrauch bei Constructionsübungen. 1. Heft. Clausthal, Löwe. 2 Mk. 50 Pf.

Czuber, E., Zur Theorie der Fehlerellipse. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Steinhauser, A., Karten zur mathemat. Geographie. Bl. 1—5. Wien, Artaria & Comp. à 1 Mk. 60 Pf.

Israel, C., Neue Darstellung der Hauptgleichung zur Berechnung der Länge zur See aus scheinbaren Monddistanzen. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Weyrauch, J., Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen. Wien, Waldheim. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Maxwell, J., Substanz und Bewegung, übersetzt von E. v. Fleischl. 2. Abdr. Braunschweig, Vieweg. 1 Mk. 20 Pf.

Dietrich, W., Die Anwendung des Vierordt'schen Doppelspaths in der Spectralanalyse. Stuttgart, Wittwer. 1 Mk. 60 Pf.

Hasselberg, B., Ueber die Spectra der Kometen und ihre Beziehung zu denjenigen gewisser Kohlenverbindungen. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 2 Mk. 80 Pf.

Tumlirz, J., Ueber die Fortpflanzung von Kugel- und Cylinderwellen von endlicher Schwingungsweite. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Reitlinger, E. u. A. v. Urbanitzky, Ueber die Erscheinungen in Geissler'schen Röhren unter äusserer Einwirkung. (Ak.) Ebdas. 1 Mk. 40 Pf.

Zetzsche, E., Handbuch der elektrischen Telegraphie. 4. Bd. 4. Lief. Berlin, Springer. 4 Mk. 20 Pf.

Hepperger, J. v., Ueber einige Eigenschaften des Capillarelektrometers. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie der sogenannten elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction. (Akad.) Ebendas. 40 Pf.

Stefan, J., Ueber einige Versuche mit einem erdmagnetischen Inductor. (Akad.) Ebendas. 30 Pf.

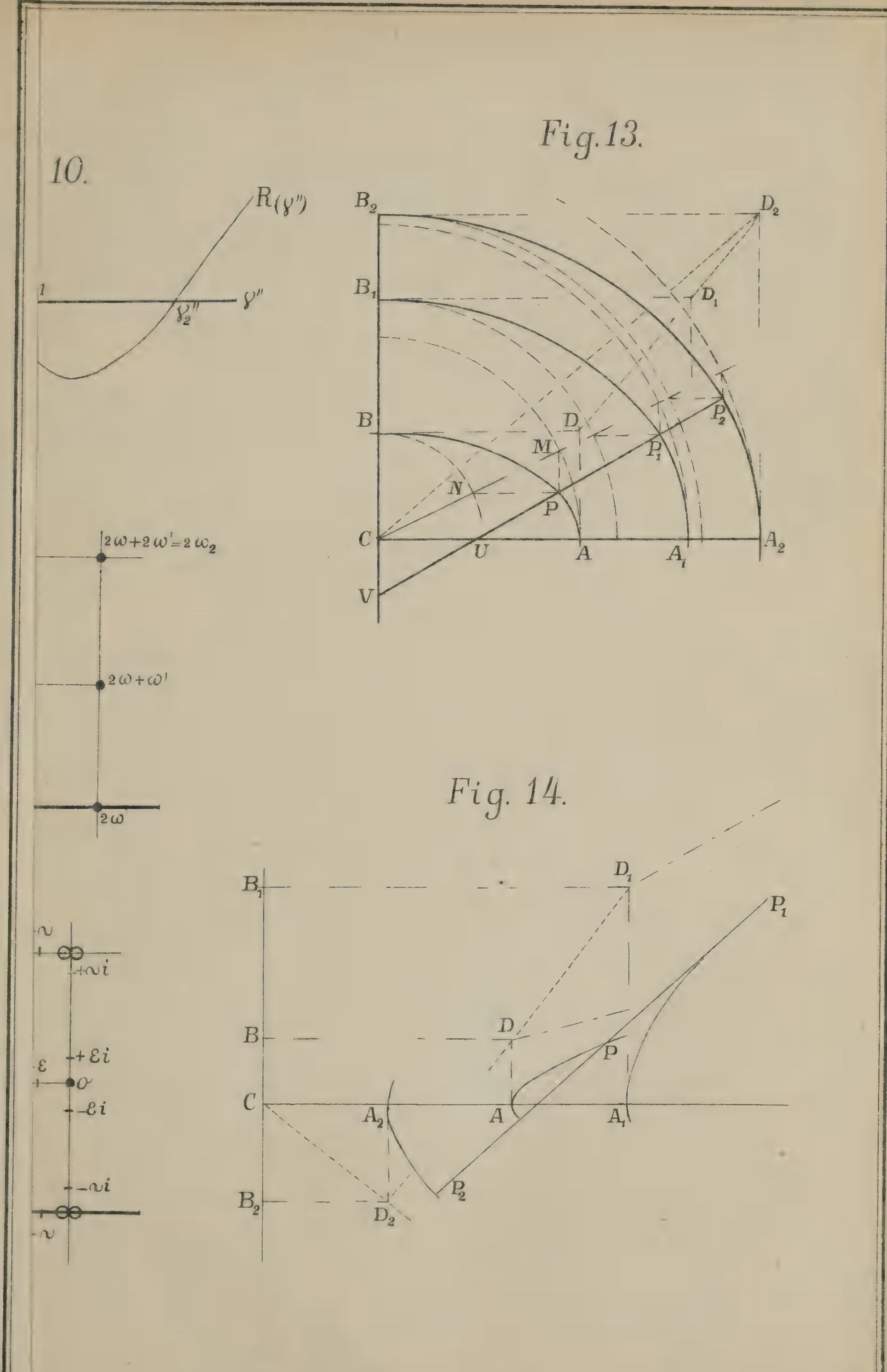
Exner, F., Zur Frage nach der Natur der galvanischen Polarisation. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Haubner, J., Versuche über das magnetische Verhalten des Eisens. (Akad.) Ebendas. 50 Pf.

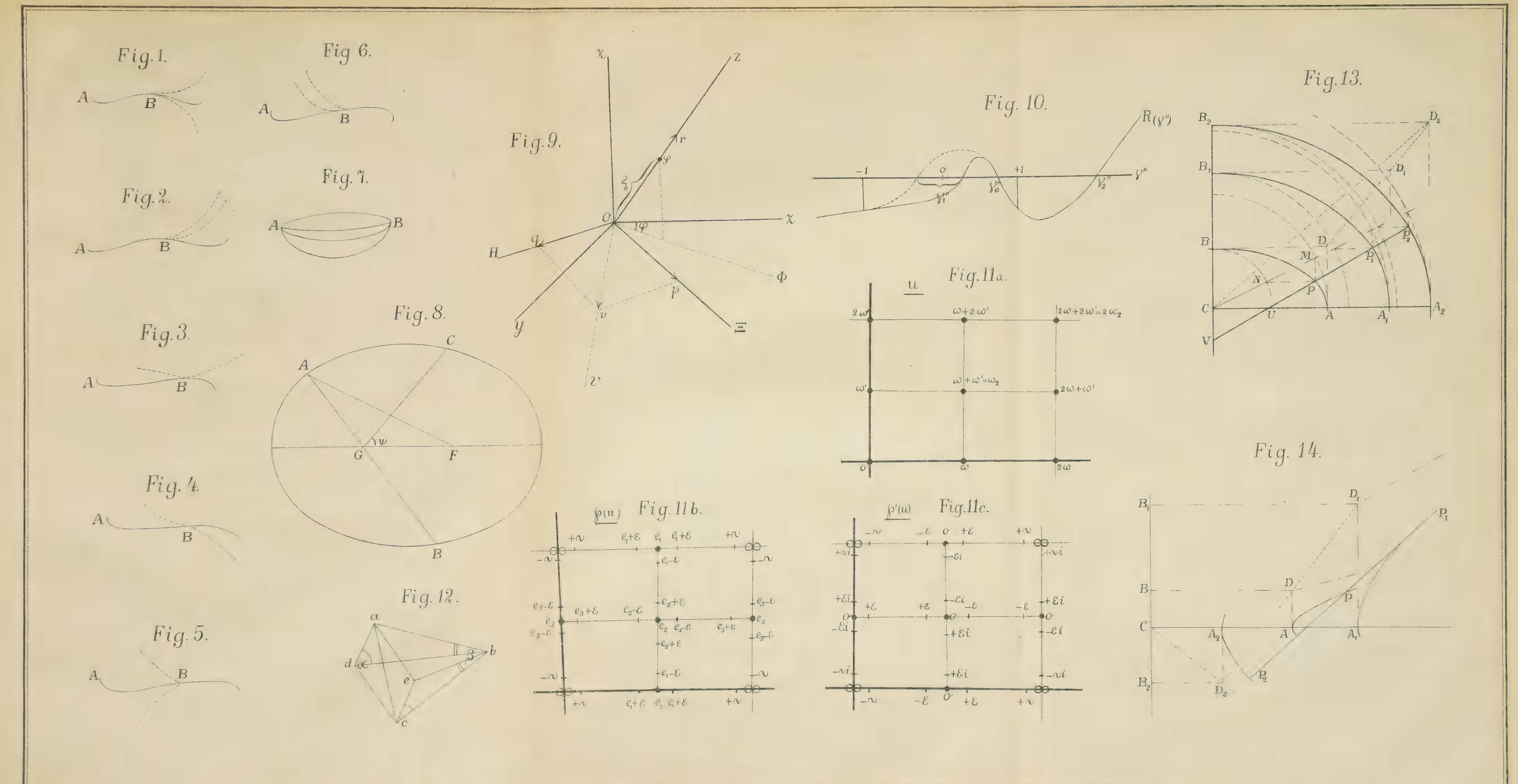
Kovačević, F., Sammlung von Aufgaben aus der galvanischen Elektricitätslehre. Prag, Dominicus. 3 Mk.

Laske, C., Messungen über das Mitschwingen bei starker Dämpfung. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Liznar, J., Ueber die Beziehung der tägl. u. jährl. Schwankung der Temperatur zur eilfjähr. Sonnenfleckenperiode. (Akad.) Ebendas. 60 Pf.



Fliegel & Sandmann Dresden



Fiegel & Sandmann Dresden

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung im rechtwinkligen Koordinatensystem. Von Dr. J. H. Franke, Trigonometer und Abtheilungsvorstand am kgl. bayer. Kataster-Bureau. Mit vielen Figuren im Text und 7 lithogr. Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1879. 8°. XVI, 464.

„Ursprünglich sollten nur die rein technischen Messungs- und Ausgleichungs-Operationen, also etwa das, was der dritte Abschnitt enthält, gegeben werden“ (S. V); die Detailtriangulirung (Punkteinschaltung) und Polygonalmessung oder die Punktsysteme III., IV. und V. Ordnung werden deshalb speciell behandelt und von der Detailmessung, einschliesslich der Kartirungs- und Flächenberechnungsarbeiten, wird eine allgemeine Uebersicht gegeben (S. 13). Den wichtigsten und selbstständig bearbeiteten Theil des Buches bilden die Vorschriften zu näherungsweisen Ausgleichungen der Vermessungen von Punkten dritter bis fünfter Ordnung und diese sollen daher zuerst besprochen werden.

Die Beurtheilung eines Ausgleichsverfahrens ist nicht einfach, da praktische und theoretische Anforderungen einigermassen in Widerspruch gerathen, die einseitige Bevorzugung der einen Rücksichten also unbillig macht. Dabei ist ferner auf den wichtigen Grundsatz aller Beobachtungs- und Rechnungstechnik, den Verfasser wiederholt betont, zu achten, „dass die Ausgleichungsmethoden um so gleichgiltiger werden, je bessere Beobachtungen vorliegen“ (S. 243), dass also Vermehrung der Sorgfalt in den Messungen, Vervielfältigung derselben, Verbesserung der Hilfsmittel grösseren Werth besitzen, als die Verfeinerungen der Ausgleichungen. Die strenge Theorie verlangt Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsummen (wie sie bekanntlich von bedeutenden Mathematikern ausgebildet ist), nöthigt aber dadurch in den meisten Fällen zu ausserordentlich mühsamen, viel Zeit in Anspruch nehmenden Rechnungen, so dass häufig ein entschiedenes Missverhältniss entsteht zwischen dem geforderten Aufwande an Mitteln und dem Zwecke. Das trifft besonders zu bei den hier in Rede stehenden Einschaltungen in die grossen Dreiecksnetze der Landesvermessung. Der strengen Methode sind Annäherungs-

verfahren, auch wenn sie mehr oder minder theoretisch anfechtbar sein sollten, dann vorzuziehen, wenn sie erhebliche Ersparung an Zeit und Mühe gestatten, und zu Ergebnissen führen, die von den wahrscheinlichsten Werthen der Grössen nur noch um Beträge abweichen, welche für die bestimmten Zwecke der besondern Vermessung keine Bedeutung mehr haben. Es ist ganz gut, sich die theoretische Befriedigung zu verschaffen, den wahrscheinlichsten Werth auszurechnen, wenn es sich um einige wenige Punkte handelt; wenn aber in verhältnissmässig kurzer Zeit Hunderte von Vermessungen zu berechnen sind, dann drängt die Anforderung der Praxis auf Einrichtung einer wohlgegliederten, jede Abkürzung ausnützenden Rechnungsweise. Das Urtheil über den Werth der vorgeschlagenen Ausgleichungsverfahren kann an bestimmten Beispielen gebildet werden, wie sie in genügender Zahl durchgeführt und mitgetheilt sind; ferner gelingt dem Verfasser aber auch eine allerdings nur genäherte Berechnung des mittlern Fehlers, der bei Anwendung des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens für einfache Punkteinschaltung noch verbleibt (S. 383), und die Vergleichung mit den bei Anwendung der strengen Rechnungsverfahren verbleibenden mittleren Fehlern giebt, wie die Ansicht der durchgerechneten Aufgaben lehrt, Beruhigung über den Grad der Annäherung und die Zulässigkeit der kürzeren Rechnungsweisen. Ob nicht, unbeschadet der vernünftigerweise einzuhaltenden Genauigkeit, in der Vereinfachung der Rechnung noch weiter gegangen werden könnte, darf wohl gefragt werden und der Berichterstatter glaubt, in einzelnen Fällen diese Frage bejahen zu sollen, wie sich später herausstellen wird.

Verfasser verwirft wiederholt ganz entschieden die vielfach nach dem „praktischen Gefühl“, also mit ziemlich grosser Willkür erfolgende Ausgleichung. Jedoch sind seine, wie alle Näherungsverfahren, durchaus nicht frei von Willkür und der Unterschied scheint wesentlich darin zu bestehen, dass die Willkür in ein System gebracht, in ähnlichen Fällen immer in gleicher Weise geübt wird. Das ist ein Vortheil, wenn und wo es sich um die geschäftsmässige Einrichtung ausgedehnter Rechnungen handelt, welche durch Gehilfen auszuführen sind, ist aber kein Vortheil hinsichtlich der grösseren Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse, weil der erfahrene Rechner wohl von Fall zu Fall einen andern Weg für nützlicher erkennen wird.

Zum Nachweis der Willkür sei die Aufgabe benützt, in welcher zwei Grundlinien $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegeben sind (S. 276) und eine Ketteneinschaltung zwischen diesen gemacht wird. Von dem ersten und dem letzten Dreieck werden je nur zwei, von allen zwischengelegenen Dreiecken alle drei Winkel gemessen. Zunächst werden nun in bekannter Weise die Winkel der Dreiecke auf die theoretische Summe ausgeglichen, dann von $P_1 P_2$ ausgehend die Coordinaten der Zwischenpunkte und endlich der Punkte Q_1 und Q_2 be-

rechnet. Die Abweichung der berechneten von den gegebenen Coordinaten des Punktes Q_1 wird, nach vorgängiger zweckmässiger Gewichtsbestimmung für den einzelnen Punkt, auf alle Punkte zwischen P_2 und Q_1 vertheilt; es bleiben noch „Restdifferenzen", nämlich die Unterschiede zwischen berechneten und gegebenen Coordinaten von Q_2, „welche dergestalt zur Vertheilung gebracht werden, dass hierbei nur die Punkte jenes Linienganges berücksichtigt werden, welcher in directer Weise die Basis $P_1 P_2$ mit dem Schlusspunkte (Q_2) verbindet", und diese zweite Vertheilung erfolgt wieder proportional den mittleren Fehlerquadraten der betreffenden Coordinatenunterschiede. Verfasser wählt zu dieser zweiten Vertheilung die Punkte 2, 3 und Q_2, und schon das ist willkürlich, denn auch der Weg von P_2 über 1, 3 nach Q_2 kann als „direct" gelten; er ist zwar etwas länger, worauf es jedoch hier nicht wesentlich ankommt, weil dadurch die Winkelmessungen nicht unsicherer werden, ist aber, wie der vom Verfasser gewählte, nur zweimal gebrochen. Wäre die zweite Ausgleichung auf die Punkte 1 und 3 geworfen worden, statt auf 2 und 3, so hätten sich zwischen den Coordinaten der Punkte 1 und 2 Unterschiede herausgestellt, sehr nahe von der Grösse, wie die geringeren Ausgleichungen (5 und 3 cm). Die Hauptwillkür liegt aber wo anders. Es ist vollkommen gleichberechtigt, die Rechnung von der P-Linie gegen die Q-Linie oder von der Q-Linie gegen die P-Linie zu führen. Bei der vorgeschlagenen Ausgleichung trifft eine grössere Verbesserung die vom Ausgangspunkte entfernteren Punkte, bei dem Verfasser also die der Q-Linie benachbarten Punkte; bei umgekehrter Anordnung der Rechnung werden die bei Q liegenden Punkte am wenigsten, die bei P benachbarten am meisten verschoben. Führt man die Rechnung in der zweiten Ordnung, sonst ganz nach Vorschrift des Verfassers aus, so zeigt sich z. B. zwischen den Ordinaten des Punktes 4, wie sie die eine oder andere Rechnungsfolge liefert, ein Unterschied von etwa 0,18 m. Damit ist die Willkür nachgewiesen und die Berechtigung, so sehr gegen das praktische Gefühl zu eifern, bestritten. Beiläufig sei noch bemerkt, dass das vom Verfasser mitgetheilte Beispiel leider einen Rechenfehler enthält, indem gleich am Anfang die Länge der Basis $P_1 P_2$ und ihre Orientirung ungenau gefunden wurde. Der Directionswinkel ist um 11″ zu klein und die Basislänge, wie es scheint, nur mit Hilfe dieses ungenauen Winkels berechnet; wäre sie, wie zur Controle immer geschehen sollte, auch aus den Quadraten der Coordinatendifferenzen der Endpunkte gerechnet worden, so hätte sich der Irrthum sofort ergeben. Theoretisch wäre es wohl besser, die Coordinaten eines möglichst mitten zwischen den zwei Grundlinien gelegenen Punktes einmal von der einen, das andere Mal von der andern Grundlinie ausgehend zu berechnen und die verbleibende Abweichung in der Art, wie es Verfasser thut, mit Berücksichtigung der Fehlerquadrate für die einzelnen Punkte zu vertheilen. Aehnliches wird

auch in den „Schlussbetrachtungen über die Methode der Ketteneinschaltung" bei grösserer Ausdehnung der Dreiecksketten durch Aufschliessen auf einen Centralpunkt, dessen Lage erst zu bestimmen ist, empfohlen.

Ausgleichungsrechnungen für „Punkteinschaltung" kommen vor, wenn ein Punkt, dessen Lage zu bestimmen ist, durch geeignete Winkelmessungen mit mehr als genügend vielen Punkten verbunden ist, deren Lagen bereits sicher bekannt sind. Verfasser giebt für diesen Fall folgende Anweisung (S. 229):

„1. Aus zwei, bezw. drei gegebenen Punkten und den erforderlichen directen Messungsergebnissen wird nach einem der im vorigen Abschnitte dargestellten trigonometrischen Elementarprobleme ein provisorischer Werth (Coordinatenwerth) für die absolute Position des zu bestimmenden Punktes berechnet;

2. für die auf der gegebenen, wie eventuell auch auf den zu bestimmenden Punkten beobachteten Richtungen sind die wahrscheinlichsten Werthe der Azimute (Directionswinkel) abzuleiten, so dass die entstehenden $\frac{n.(n-1)}{2}$ Strahlendurchschnitte eine Anzahl absoluter Positionen für den gesuchten Punkt bestimmen;

3. die aus den Strahlendurchschnitten resultirenden Positionen werden nicht direct berechnet, sondern blos deren Abweichungen von dem nach 1. gefundenen provisorischen Orte auf graphischem Wege dargestellt;

4. auf Grund dieser bemerkten Darstellung wird aus den Strahlendurchschnitten ein angenäherter mittlerer Ort O für den gesuchten Punkt abgeleitet, die durch diesen gelegten Coordinatenaxen als fixe Gerade betrachtet und auf beiden derselben ein Punkt bestimmt, welcher jeder für sich die Summe der Quadrate der Abweichungen der Directionswinkel zu einem Minimum macht. Aus diesen beiden Punkten wird schliesslich ein einziger nach dem Princip gefunden, dass 1. die Quadrate der auf die fixen Geraden bezogenen Coordinaten des gesuchten Punktes sich zu einander verhalten wie die mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der vorhin auf jenen festen Axen bestimmten Abstände, 2. das Quadrat der Entfernung des definitiven Punktes von dem angenäherten mittleren Orte O gleich dem allgemeinen Mittel der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate jener eben bemerkten Abstände sei.

Der so abgeleitete einzelne Punkt ist dann der definitive mittlere Ort des zu bestimmenden Punktes, dessen Coordinatenwerthe einfach aus dem Constructionsschema abzulesen sind."

S. 248 flgg. wird das Verfahren auf einen bestimmten Fall angewendet. Ein Punkt ist von 8 gegebenen angezielt, könnte also auf 28 Arten durch Vorwärtseinschneiden berechnet werden. Die Verbesserungen, welche

der Verfasser an den provisorischen Coordinaten anbringt, sind 1, bezw. 2 cm. Dem gegenüber darf man wohl fragen, ob der nicht unbedeutende Rechnungsaufwand gerechtfertigt ist. Der Berichterstatter hat von den 28 möglichen Berechnungen einige, die günstige Schnitte liefern, herausgewählt und diese — ohne Rücksicht auf sphärische Correctionen, welche bei den vorkommenden Entfernungen von höchstens 3 km überflüssig erscheinen — ausgeführt. Das arithmetische Mittel (ohne Berücksichtigung der Gewichte, wodurch eine weitere Annäherung möglich wäre) aus vier solchen Rechnungen (Combinationen der Punkte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8) liefert die Centimeter der Coordinaten: 33 und 53; das Mittel aus sieben Rechnungen (zu den vorigen noch die Combinationen 4 und 6, 3 und 8, 5 und 7) giebt 34 und 50 cm, während der Verfasser als schliessliches Ergebniss 34 und 49 cm hat, welche Werthe aber deshalb nicht ganz vergleichsfähig sind, weil auch in diesem Beispiel gleich von vornherein ein Rechenfehler steckt: der Directionswinkel der Richtung von Punkt 2 nach Punkt 1 ist zu ... 55,7″ angegeben, richtig berechnet aber ... 53,7″. Dann ist die Strecke zwischen Punkt 2 und 1 ungenau — ihr *Log* ist zu 3.4660879 statt 3.4661412 angegeben, zweifellos Folge des Irrthums von 2″ (der selbst wahrscheinlich nur ein Schreibfehler, 5 statt 3, gewesen) in dem Directionswinkel, erneuter Beweis, wie nöthig die Bestätigungsrechnung für die Streckenlänge aus den Quadraten der Coordinatendifferenzen ist. — Die sieben unabhängigen Berechnungen der Coordinaten auf dem elementar ebentrigonometrischen Wege lassen sich (namentlich da dieselben Logarithmen wiederholt zur Verwendung kommen) in derselben Zeit und mit geringerer Mühe (weil so zu sagen rein mechanisch, ohne Ueberlegen) ausführen, vier Berechnungen mit entschieden geringerem Aufwande. Und da ihr Ergebniss eine für Punkte dritter oder gar noch höherer Ordnung vollständig genügende Genauigkeit liefert, ist die umständlichere Ausgleichung nicht zu empfehlen.

Das eben (in § 57) behandelte Beispiel wird (in § 58) auf S. 254 flgg. nochmals in anderem Sinne, nämlich als Pothenot'sches Problem durchgeführt, wobei aber zu ganz unnöthiger Plage des Lesers und ohne ersichtlichen Grund die Bezeichnungen der Punkte geändert werden (wie das nochmals, ebenso unnöthig und störend, in § 59 erfolgt). Es lassen sich zu diesem Beispiele im Ganzen die nämlichen Bemerkungen machen, wie zu dem Beispiele des Vorwärtseinschneidens. Da jedoch die Pothenot'sche Berechnung entschieden weniger bequem, als die des Vorwärtseinschneidens ist, so mag die mehrfache Pothenot'sche Berechnung und das Mittelnehmen aus den Ergebnissen, namentlich wenn dieses noch unter Berücksichtigung der Gewichte geschehen soll, nicht in kürzerer Zeit ausführbar sein, als des Verfassers Ausgleichungsverfahren. Ist dem so, dann verdient das letztere den Vorzug und erhält zugleich insofern eine Rechtfertigung auch für das Vorwärtseinschneiden, als eine gleich-

mässige Behandlung unter den früher erwähnten Bedingungen wünschenswerth ist. Das Ausgleichungsverfahren ist ein graphisch-analytisches und unterscheidet sich in seinem constructiven Theile, über welchen S. 236, 237 eine historische Notiz mitgetheilt wird, wesentlich durch die Orientirung der fehlerzeigenden Dreiecke (Benutzung lithographirter Schemata empfohlen, wodurch die Mühe erheblich verringert, der Apparat aber vergrössert wird), welcher einfachere und bequemer zu überblickende Beziehungen zu den Coordinaten liefert. Besonders des graphischen Theiles wegen ist die Ausgleichung nun aber durchaus nicht einfach und schnell erledigbar, wenn auch gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme immerhin noch Gewinn verbleibt. Darüber, ob es „praktisch“ ist, eine Zahlenrechnung durch eine Zeichnung zu ersetzen, wird die Ansicht je nach den Verhältnissen verschieden sein. Für Architekten, Constructeure u. s. w., die das Zeichnengeräth beständig im Gebrauche und in seiner Anwendung meist grössere Fertigkeit, als im Rechnen haben, mag eine graphische Lösung, wenn sie genügend genau herstellbar ist (und das trifft hier zu), vielfach angenehm und empfehlenswerth sein, während das für den Rechner, den mit trigonometrischen Operationen beschäftigten Geodäten nicht mehr der Fall ist. Für den Letzteren ist es am vortheilhaftesten, keine anderen Hilfsmittel, als die stets unentbehrliche Logarithmentafel und einige dieser leicht anzufügende Tabellen, allenfalls noch Rechenschieber zu benöthigen; für ihn entspringt durch das Herbeischaffen des Zeichnengeräths (für das meist auf dem Arbeitstische erst wird Platz gemacht werden müssen) Zeitverlust und Unbequemlichkeit, ja schon die Abwechselung zwischen dem gewohnten Rechnen und dem ungewohnten Zeichnen geht nicht ohne „Friction“ ab.

Nachdem die verschiedenen Strahlendurchschnitte (zeichnend oder rechnend) gefunden, muss endgiltig ein Ort für den mehrfach und widersprechend bestimmten Punkt gewählt werden. Das Verfahren ist S. 242 bis 247 geschildert, der Berichterstatter muss aber gestehen, dass es ihm nicht hinreichend klar geworden ist, um darüber urtheilen zu können, und manchem andern Leser dürfte es ähnlich ergehen.

Als dritte Hauptaufgabe kommt vor die Einschaltung eines polygonalen Zuges zwischen zwei Punkten, deren Coordinaten gegeben sind und von welchen aus je nach einem gleichfalls seiner Lage nach bekannten Punkte gezielt wird, so dass für die Anfangs- und die Schlussrichtung der Directionswinkel oder das Azimut abgeleitet werden kann. Gemessen werden die Seiten des Polygonzuges und alle Winkel; nach Ausführung der Rechnung mit den unvollkommen genauen Messergebnissen wird die Schlussrichtung etwas anders orientirt sein und die Coordinaten des Schlusspunktes eine Abweichung von den gegebenen Werthen zeigen. Verfasser zeigt überzeugend, dass hier die Trennung der Winkel- von der Coordinatenausgleichung statthaft ist und einen erheblichen Gewinn

herbeiführt gegenüber den Anforderungen der Methode der kleinsten Quadratsumme, nach welcher die Verbesserungen der Richtungen und der Längen gleichzeitig vorgenommen werden sollen. Die nähere Ausführung lässt hinsichtlich Einfachheit und möglichster Annäherung an die streng theoretischen Rechnungen (deren Ergebnisse von einem Näherungsverfahren nicht verlangt werden dürfen) Nichts zu wünschen übrig. Sehr gut ist, was über die Verkettung von Polygonalzügen bemerkt wird. Auch dafür, dass bei Einschaltung eines Hilfsdreieckspunktes, wenn dieser nur durch Schnitte bestimmt ist, man von der früher gegebenen Regel für die einfache Punkteinschaltung insofern abweichen soll, dass die Gewichte der Strahlenschnitte nicht den Quadraten der Entfernungen, sondern diesen einfach umgekehrt proportional genommen werden sollen, muss man die angegebenen Gründe als treffend anerkennen. Die Ausgleichung wird umständlicher, wenn der Hilfsdreieckspunkt auch noch gleichzeitig durch einen Linienzug bestimmt ist, weil nun die zwei verschiedenen Ausgleichungen in geeigneter Weise zu vereinigen sind. Der Ausweg, den der Verfasser hier nimmt, scheint ganz zweckmässig zu sein.

Für die Rechnungen der Gemarkungstriangulation wird eine von F. G. Gauss angegebene indirecte Methode empfohlen und das wichtigste gegen diese sprechende theoretische Bedenken erwähnt, wie seiner praktischen Bedeutung nach gewürdigt. Da bei der Gemarkungstriangulation zuweilen der Geodät mit bescheidenen Hilfsmitteln eine Azimutbestimmung vorzunehmen hat, wird darüber später Einiges bemerkt.

Was an verschiedenen Stellen aphoristisch über die Organisation der Vermessungen und über die technischen Ausführungen gesagt wird, zeugt von der grossen Geschäftserfahrung des Verfassers und ist vortrefflich, macht nur den Wunsch nach eingehenderer Darlegung rege.

Die zahlreichen Rechnungen sind, wie das wichtig ist, nach bestimmten Rechnungsschematen ausgeführt, die recht zweckmässig sind. Nur ist die Erklärung ihrer Einrichtung so dürftig, dass selbst ein nicht unbewanderter Leser Mühe hat und Zeit verliert, sich zurecht zu finden; der „in die Materie erst Eintretende“, auf dessen Bedürfniss (S. IV des Vorworts) doch stete Rücksicht genommen werden soll, wird einfach die Rechnungsanordnung nicht verstehen. Ueberhaupt kann nicht mit Stillschweigen übergangen werden, dass das Buch bei vortrefflichem Inhalt formell zu sehr lebhaften Bemängelungen Anlass giebt. Es geschieht so gar nichts zur Erleichterung des Lesers, ja im Gegentheil, wenn man diesen absichtlich plagen wollte, könnte man nicht anders verfahren, als geschehen. Von der Anordnung des Stoffes im Ganzen, der bunten Reihenfolge in den Theilen des Buches, die überhaupt nur als Anhängsel zu dem oben besprochenen Hauptabschnitte erscheinen, zu geschweigen, mögen nur einige Ausstellungen hier gemacht werden.

Die Zählung der Richtungswinkel beginnt bald im Süden, bald im Westen, auch gelegentlich im Norden. Der Verfasser ist freilich unschuldig daran, dass die bayrische Landesvermessung (aus welcher die Zahlenbeispiele entlehnt sind) ihre Directionswinkel von West anfangend über Nord zählt; allein es wäre gewiss besser gewesen, entweder diese Zählungsweise folgerichtig beizubehalten oder immer eine andere und dann die bayrischen Directionswinkel durch Vermehrung oder Verminderung um einen Rechten für die Beispiele abzuändern; sehr störend ist, dass in den allgemeinen Formeln (aber auch nicht immer) die Zählung der Winkel im Süden, in den speciellen, auszurechnenden Formeln im Westen beginnt. Kommt bei diesem leicht Verwirrung erzeugenden Belieben hinzu, dass die zu einem wichtigen Beispiel gehörende Fig. 51, abweichend von allen anderen vorkommenden Figuren und von dem Gebrauche, ganz verkehrt orientirt oder eigentlich durchaus desorientirt ist, so ist die Klage über unnöthige Erschwerung des Gebrauchs des Buches wohl gerechtfertigt.

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, dass eine wohlüberlegte Wahl der Bezeichnungen vom grössten Werthe ist. In diesem Betreff aber ist das Buch entschieden zu tadeln. Häufig wird nicht oder nicht genügend die Bedeutung der Zeichen erklärt, diese werden plötzlich, ohne Benachrichtigung und ohne ersichtlichen Grund, gewechselt, ja es kommt z. B. S. 344 Z. 1 eine Formel vor:

$$Cos\,(R-(\alpha-\beta)) = tang\,\frac{y}{r}\,Cot(90-\varphi),$$

in welcher auf der einen Seite der rechte Winkel durch 90 (ohne Gradzeichen), auf der andern Seite durch R bezeichnet wird, welches Zeichen R sonst für den Erdhalbmesser dient, der hier durch r dargestellt ist, ohne dass darauf besonders hingewiesen wird. Bei der früheren Besprechung der Soldner'schen Coordinaten bezeichnete R den Radius der berührenden Kugel und auch hier hat auf derselben Seite R mit Index eine ähnliche Bedeutung.

Wie unbequem die Darstellung ist und welche Zumuthung dem Leser zuweilen gemacht wird, mag aus folgender Zusammenstellung hervorgehen. Auf einer und derselben Seite (354) kommt vor: N als Bezeichnung eines Zielobjects, n als Bezeichnung des Winkels zwischen den Richtungen vom Standpunkte nach den Objecten N und A, $n_1, n_2, \ldots n_p$ sind Symbole für die in den Sätzen 1, 2, ... p beobachteten Werthe dieses Winkels, $[n]$ bedeutet die Summe dieser Beobachtungswerthe. Dann kommt vor $n' = \frac{[n]}{p_n} - n$ und zwar $n'_1, n'_2, \ldots n'_p$, ferner (n_1), (n_2), ... (n_p), angebend die Anzahl der in die Beobachtungssätze 1, 2, ... p eingehenden Objecte. Aber dieselben Zeichen (n_1), (n_2), ... (n_p) bedeuten auch noch etwas ganz Anderes, nämlich die ausgeglichenen Einzelrichtungen, so dass $(n_1) = n_1 + (1)$, $(n_2) = n_2 + (2)$, ... $(n_p) = n_p + (p)$, wobei

(1), (2), ... (p) wieder eine gewisse symbolische Bedeutung haben. Weiter kommt noch vor $(N) = [(n)]$ als Mittel der vorstehend verzeichneten Richtungen. Aber noch nicht genug. In dem Beispiele (Alles auf derselben Seite), welches das „höchst einfache Verfahren" (Stationsausgleichung für Richtungsbeobachtungen) schematisch durchführt, kommt noch vor: (n) als allgemeiner Repräsentant für (1), (2), ... (p), dann n' als Repräsentant für b', c', ... und endlich (n) noch einmal in einer mir unverständlichen Bedeutung. Zur Mehrung der Unklarheit ist neben die vier Werthe der Colonne (n) im ersten Theile des Schemas das Wort „Beobachtungen" angeklammert, welches man deshalb versucht ist in irgend eine Beziehung zu den (n) zu bringen, die aber nicht besteht. — Nebenbei mag bemerkt sein, dass das Schema für die hier durchgeführte Stationsausgleichung erheblich einfacher und doch deutlicher geordnet werden kann.

Die so nützlichen Doppelindices kommen nur ein einziges Mal an ganz untergeordneter Stelle vor, die so übersichtliche Gestaltung der Formeln und die Entlastung des Gedächtnisses für gleichgiltige Dinge gehen also verloren. Die verwendeten Indices sind nicht rationell gewählt. Als Beleg hierfür und für die im Allgemeinen nicht glückliche Bezeichnung sei erwähnt (S. 164): „Zu bestimmen sind die Coordinaten x, y des Dreieckpunktes P, die Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 der andern Dreieckpunkte sind gegeben; bezeichnet werden die Richtungen der von A ausgehenden Strahlen nach P und einem Hilfspunkte C mit φ_2 und ψ_1, die der von B nach P und einem Hilfspunkte D zielenden Strahlen mit φ_1 und ψ_2, die Richtung von B nach A mit ψ, die P gegenüberliegende Seite mit c, der Winkel bei P mit γ, die den Punkten A und B gegenüberliegenden Seiten, wie üblich, mit a und b, die Winkel mit α und β. Es ist entschieden schwierig, das zu merken. Wie viel einfacher, die Coordinaten der drei in Frage kommenden Punkte mit x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3, die Dreiecksseiten a_{12}, a_{13}, a_{23}, die Directionswinkel φ_{12}, φ_{13}; φ_{21}, φ_{23} u. s. w. zu bezeichnen. (Verfasser unterscheidet entgegengesetzte Richtungen durch einen Accent am Directionswinkel.) Statt der unsymmetrischen Formeln, wie $x = x_1 + b \, Cos \, \varphi_2 + ⓧ = x_2 + a \, Cos \, \varphi_1 + ⓧ$, erhielte man dann $x_3 = x_1 + a_{13} \, Cos \, \varphi_{13} + ⓧ = x_2 + a_{23} \, Cos \, \varphi_{23} + ⓧ$. Bei so einfachen Fragen, wie die hier vorliegende, ist der Schade nicht so gross; etwas verwickeltere Aufgaben werden aber unabsehbar erschwert. Der Unzweckmässigkeit der Bezeichnung wegen konnte Berichterstatter, dem weder das Hansen'sche Problem, noch seine Lösung unbekannt waren, der Darstellung desselben (S. 192) trotz wiederholten Versuchen nicht folgen. Es kommen Ausdrücke vor, wie

$$tg\{N - [\psi - \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{1} + \tfrac{4}{2})]\} = tg\tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{1} - \tfrac{4}{2})\,Cot(45^0 + v),$$

worin $\frac{1}{2}$ zwar die gewöhnliche Bedeutung „einhalb" hat, hingegen die Bruchformen $\frac{4}{1}$ u. s. w. durchaus keine Brüche bedeuten, sondern Winkel, deren Scheitel die Nummer trägt, welche als Nenner figurirt, wäh-

rend die an Stelle des Zählers stehende Ziffer die Nummer angiebt des Zielpunktes im einen Schenkel (der andere Schenkel ist nicht angedeutet, nicht immer derselbe und muss gemerkt werden). Alsbald werden aber solche Winkel auch durch $\frac{2.3}{1}=t$, $\frac{3.4}{1}=u$, $\frac{3.4}{2}=x$, $\frac{4.1}{2}=y$ bezeichnet, wobei zu erinnern, dass x und y doch als Coordinatenbezeichnungen schon verbraucht sind; nicht genug, auch $\angle 1'.3.k'=t$, $\angle k.3.4=u$ u. s. w. kommt auf demselben Blatte vor. Das Zeichen $3-4$ bedeutet die Strecke zwischen den Punkten 3 und 4; gelegentlich wird eine solche aber auch $3.k$ bezeichnet. Nun könnte man denken, $3.k$ solle die unbestimmt lange Gerade durch die Punkte 3 und k andeuten und etwa $3-k$ die Strecke zwischen den Punkten; aber dem ist nicht so, denn es heisst, die Gerade $1'-2'$ schneide einen Kreis im Punkte 1 (S. 194), wobei dieser Punkt aber auf der Verlängerung der Strecke von $1'$ nach $2'$ liegt. Nicht allein erschwert eine so wenig glückliche Bezeichnung das Verständniss ungemein und ganz unnöthig, sondern es kommen auch formelle Absurditäten zum Vorschein, wie $1-2<3-4$ oder $\frac{2-3}{1-3}=\frac{Sin\frac{3}{1}}{-Sin\frac{3}{2}}$.
Hat man einmal gesagt, im Pothenot'schen Problem seien die gegebenen Punkte durch die Indices 1, 2, 3, der gesuchte durch den Index 0 angedeutet, a bezeichne Länge, φ Richtungswinkel, α die Winkel um den Pothenot'schen Punkt, so sind die nachfolgenden rationellen Formeln Jedem ohne Weiteres verständlich; die nebenanstehenden mit der Bezeichnung des Verfassers aber sicher nicht, wozu noch bemerkt wird, dass in dessen Entwickelung Winkel w'', w''', Längen r'', r''', dann Δx, Δx_2, Δx_3, Δy, Δy_2, Δy_3 vorkommen, mit denen unnöthigerweise das Gedächtniss beschwert wird.

Rationell:

Hilfswinkel ν. $tg\,\nu=\frac{a_{13}\,Sin\,\alpha_{12}}{a_{12}\,Sin\,\alpha_{13}}$.

$$tg\{\varphi_0-\tfrac{1}{2}[\beta_{12}+\beta_{13}]\} = tg\,\tfrac{1}{2}(\beta_{12}-\beta_{13})\,tg(45^0+\nu)$$

mit $\beta=\varphi-\alpha$,

$$a_{10}=a_{12}\frac{Sin(\varphi_{10}-\beta_{12})}{Sin\,\alpha_{12}}=a_{13}\frac{Sin(\varphi_{10}-\beta_{13})}{Sin\,\alpha_{13}},$$

$$x_0=x_1+a_{10}\,Cos\,\varphi_{10}+(x),$$

$$y_0=y_1+a_{10}\,Sin\,\varphi_{10}+(y)$$

und

$$\frac{y_2-y_0-(y)}{x_2-x_0-(x)}=tg(\varphi_{01}+\alpha_{12}),$$

$$\frac{y_3-y_0-(y)}{x_3-x_0-(x)}=tg(\varphi_{01}+\alpha_{13}).$$

(Durch Indexvertauschung werden sofort alle etwa noch wünschbaren Formeln gewonnen.)

Nach Franke:

Hilfswinkel ν. $tg\,\nu=\frac{(1-3)\,Sin\,o_2}{(1-2)\,Sin\,o_3}$.

$$tg\{P-\tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1)\}=tg\,\tfrac{1}{2}(\beta-\beta_1)\,tg(45^0+\nu)$$

mit $\beta=\psi-o_2$ und $\beta_1=\psi_1-o_3$,

$$A=\frac{(1\text{-}2)\,Sin(P-\beta)}{Sin\,o_2}=\frac{(1\text{-}3)\,Sin(P-\beta_1)}{Sin\,o_3},$$

$$x=x_1+A\,Cos\,P+(x),$$

$$y=y_1+A\,Sin\,P+(y),$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{y_2-y-(y)}{x_2-x-(x)}&=tg(P'+o_2)\\ \frac{y_3-y-(y)}{x_3-x-(x)}&=tg(P'+o_3)\end{aligned}\right\}\text{ wobei } P'=P+180^0+(P).$$

Noch auffallender wäre der Unterschied zwischen rationeller und des Verfassers Schreibweise für die Formeln des Hansen'schen Problems geworden, der Nachweis hätte aber zuviel Raum beansprucht.

In § 22 werden k eingeführt, die eine ganz andere Bedeutung haben, als unmittelbar zuvor in § 21, und es wird ihre Bedeutung wenigstens nicht merklich genug hervorgehoben. Diese k sind aber ausserdem ganz unnöthig, da sie sofort durch $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ ersetzt werden; ferner kommt aber im selben § 22 eine Seite weiter plötzlich und ohne darauf aufmerksam zu machen, k wieder in der Bedeutung, die es in § 21 hatte. Aehnliches gilt für n, das in diesen beiden Paragraphen in verschiedenem Sinne, ohne ein Wort der Erklärung gebraucht wird.

Auf S. 165 bedeuten a und b Dreiecksseiten, α und β deren Gegenwinkel; auf derselben Seite sind aber a und b auch Repräsentanten der Constanten in der Gleichung einer Geraden und sofort α und β die Constanten in einer Kreisgleichung (Coordinatendifferenzen bedeutend). Gewiss wird der Leser sich zurecht finden, aber es ist eine Kraftvergeudung, seine Aufmerksamkeit auf Derlei richten zu müssen. Aehnliche Unbequemlichkeiten finden sich oft, eine Untersuchung wird mit φ_1 und φ_2 geführt, diese Zeichen aber plötzlich durch φ und φ' ersetzt; in der Entwickelung der Soldner'schen Coordinaten S. 149—153 werden die Directionswinkel durch α bezeichnet, in der „Zusammenfassung der vorstehenden Entwickelungen" wird der Directionswinkel φ genannt, diesmal wird es aber wenigstens gesagt — aber man verlasse sich ja nicht darauf, denn in der ersten Zeile der Formeln 20) auf S. 154 heisst der Winkel φ, in der zweiten aber α. Die Zusammenstellung enthält x_1, x_2, y_1, y_2, während die Entwickelung x, x' und y, y' anwendete. Wie Derlei angenehm ist und dem Bedürfnisse des in die Materie erst Eintretenden entspricht! Der Berichterstatter muss sich förmlich hüten, nicht boshafte Bemerkungen zu machen aus Aerger über das Buch, dessen Durchlesung ihm mehr Plage gemacht hat, als kaum irgend eines. Niemand verlangt, dass ein Werk dieses Inhalts sich wie ein Zeitungsblatt solle lesen lassen, aber wenn der Grund des Zeitverlustes und der Unbehaglichkeit des Nichtverstehens und Missverstehens nicht in der sachlichen Schwierigkeit, sondern in der unzweckmässigen und nicht gehörig sorgfältigen Form erkannt wird, dann wird man ärgerlich und bedauert, das Buch seines wichtigen und sachlich guten Inhalts wegen nicht an die Wand werfen zu können. Es giebt gewisse Zeilen, die ein mathematisch gewöhntes Auge förmlich beleidigen, so z. B.

S. 138: $\quad log\, 1'' - 1{,}70514 = 8{,}29486 = log\, F$

oder S. 143:

$$\begin{aligned} log\, sin\, a &= 5{,}0464964 + 220 \\ log\, sin\, C &= 0{,}0000000 \\ cpl.\, log\, sin\, A &= 0{,}1504819 \\ & \ 5{,}1969783 + 440. \end{aligned}$$

Sei es gestattet, hierzu eine, nicht nur auf das zur Besprechung vorliegende Buch bezügliche Bemerkung zu machen. Man erlaubt sich häufig, die -10 hinter einem Logarithmus (z. B. goniometrischer Functionen) wegzulassen; dies scheint immer bedenklich, wenn, wie im ersten der obigen Beispiele, die Charakteristik eine kleine Zahl, wie 1 ist, und dann unzulässig zu sein, wenn sie 9 oder 8 ist, jedoch in der sonstigen Rechnung auch die Charakteristik 9, 8 oder nahestehende, ohne dass -10 hinzugedacht werden muss, vorkommt. Es empfiehlt sich, was in Deutschland noch wenig verbreitet ist, bei Anschreibung von Logarithmen die Mantisse stets positiv einzurichten, und durch ein — über der Zahl vor dem Komma anzuzeigen, dass die Charakteristik negativ ist, also zu schreiben $\bar{9},70514$ statt $1,70514-10$ oder $Log\,sin\,20^0 = \bar{1},53405$, was besser als $9,53405-10$ oder gar als $9,53405$ mit stillschweigender Weglassung der -10 ist. Bei etwas zusammengesetzteren Rechnungen treten die Vortheile dieser Schreibweise, an welche man sich rasch gewöhnt, sehr deutlich hervor.

Befremdend ist, dass der Verfasser nicht immer seine Rechnungen in den letzten Decimalen genau hat, auch wo das nicht gleichgiltig ist, nämlich z. B. S. 143 bei der Vergleichung der Ergebnisse der Berechnung eines Dreiecks nach den strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie, nach der Additamententheorie und nach dem Satze von Legendre. Hier haben offenbar die letzten Decimalen Interesse; nach des Verfassers Rechnung zeigt sich gar keine Abweichung, es ist aber belehrender und wichtiger, die kleine Abweichung, die wirklich besteht, nicht zu verstecken, sondern hervorzuheben; die genaue und sorgfältige Rechnung liefert eine Differenz von 2,4 Einheiten der 7. Decimalstelle der Logarithmen. Ferner in einem numerischen Beispiele der Berechnung der sphärischen Correctionen S. 156 flgg. Verfassers Rechnung hat einen kleinen Fehler in Δx, dessen Decimalen (Centimeter) 82, nicht 79 sind. Zufällig compensirt sich der Fehler mit einem zweiten in $\mathfrak{x}$, dessen Decimalen 92,8, nicht 96 sind. Hingegen berechnet sich y_2 genau zu $\ldots,607\,m$, nicht zu $\ldots,66\,m$, es tritt also ein belehrender Unterschied von mehr als 5 cm auf.

Eine ähnliche Ausstellung kann man machen an der Besprechung der Fehlerquellen der Horizontalwinkelmessung mit dem Theodolith S. 77. Streng richtig ist zu setzen $tg(\alpha+\delta)\,Cos\,a = tg\,h\,.\,Sin\,\alpha + Cos\,\alpha\,.\,Sin\,a$. Für genügend kleine α und δ wird dann $Sin\,\alpha = \alpha$, $Cos\,\alpha = 1$, $tg\,\delta = \delta$ gesetzt. Thut man das unmittelbar, so folgt $\frac{tg\,a + \delta}{1 - tg\,a\,.\,\delta}\,Cos\,a = tg\,h\,.\,\alpha + Sin\,\alpha$, woraus sich ergiebt $\delta = \alpha\,.\,\frac{tg\,h\,.\,Cos\,a}{1 + \alpha\,.\,Sin\,a\,.\,tg\,h}$. Ganz dasselbe erhält man auf dem umständlicheren im Buche angedeuteten Wege; Verfasser gelangt aber zu $\delta = \alpha\,.\,Cos\,a\,.\,tg\,h$. Nicht gegen die Zulässigkeit dieser Formel soll hier

gesprochen werden, sondern nur darüber, dass der Anfänger, für den ja das Buch doch auch geschrieben, das nicht sogleich einsehen wird, wozu bemerkt wird, dass erst an späterer Stelle (S. 136) von der Umwandlung des Gradmaasses in Linienmaass gesprochen wird. Bei grösserer Aufmerksamkeit wird man ja schon erkennen, dass die Formel für δ, zu der man in Ausführung der angegebenen Rechnung zunächst kommt, eine Unverträglichkeit enthält, indem der Nenner eine Mischung der unbenannten Zahl 1 und des benannten Products $\alpha . Sin\, a . tg\, h$ ist. Wer also genügend vorbereitet ist, wird bemerken, dass wegen der Homogenität der Gleichung zu schreiben ist

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{\alpha}{\omega} . \frac{Cos\, a . tg\, h}{1 + \frac{\alpha}{\omega} . Sin\, a . tg\, h}$$ (wo ω die bekannte Zahl 260265 ist),

und dann auch einsehen, dass der zweite Theil des Nenners wegen der Kleinheit von α Null gesetzt werden darf. Setzt man $h = 45^0$, $a = 45^0$ und $\alpha = 100''$, so giebt Verfassers Annäherung $70{,}71067''$; die etwas genauere Annäherung $70{,}6864''$, also sehr wenig verschieden, während allerdings die ganz genaue sphärische Berechnung $\delta = 70{,}066''$ liefert, und es ist immerhin belehrend genug, diese Vergleichung anzustellen. Die Art, wie z. B. in Jordan's Handbuch der Vermessung die Sache entwickelt wird, scheint entschieden besser.

Sei hier gleich noch erwähnt ein Versehen auf S. 200, Dreiecksbestimmung aus zwei direct gemessenen Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C betreffend. Es wird dort gesagt, der Ausdruck $c . dc = (a - b\, Cos\, C)\, da + (b - a\, Cos\, C)\, db + ab\, Sin\, C . dC$ werde zum Minimum für $C = 180^0$. Das ist aber nicht richtig, denn für $C = 180^0$ wird $dc = da + db$, hingegen für $C = 0^0$ wird $dc = da - db$; der mittlere Fehler ist allerdings in beiden Fällen durch $(dc)^2 = (da)^2 + (db)^2$ bestimmt.

Zum Beweis dafür, dass des Verfassers Anweisungen zuweilen der genügenden Schärfe und Deutlichkeit entbehren, diene S. 408: „Die graphische Berechnung der einzelnen Figuren, wo solche unregelmässige Vierecke sind, hat zu erfolgen, indem man mit feinem Bleistift durch einen der Eckpunkte eine Parallele zu der Diagonale des Vierecks zieht" (da ein Viereck zwei Diagonalen hat, ist es nicht empfehlenswerth, von der Diagonale zu sprechen — doch mag hier dem Leser zugemuthet werden dürfen, zu verstehen, dass die durch die gewählte Ecke gehende Diagonale nicht gemeint ist) „und diese durch eine nach der letzten Ecke der Figur gehende Senkrechte schneidet" (das führt geradezu irre, denn unter der letzten Ecke ist doch wohl einer der Nachbarn der gewählten ersten Ecke zu verstehen, während gemeint ist die dieser gegenüberliegende). „Sonst ist noch darauf zu achten, dass die Parallele thunlichst in der unmittelbaren Nähe des Eckpunktes, durch welchen sie gezogen worden, geschnitten wird" (ist wohl ganz gleichgiltig) „und

ferner, dass die Factoren möglichst gleich sind." (Es wäre wohl angemessen gewesen, noch beizufügen: das Product der Längenzahlen der gezogenen Diagonale und der auf sie gefällten Normalen ist das Doppelte der gesuchten Flächenzahl.)

In den rein theoretischen Theilen sollten die Definitionen besonders genau und richtig sein, sind aber im Gegentheil oft sehr zu tadeln. Zum Belege S. 15: „Der senkrecht zur Meridianebene eines Punktes A geführte Schnitt heisst das Perpendikel von A, wobei die Schnittcurve im Allgemeinen wieder eine Ellipse ist." Nach einer sehr tadelnswerthen, aber sehr verbreiteten Gewohnheit wird hier, wie im ganzen Buche, der geographische (oder physikalische, von der Schwererichtung entnommene) Begriff „senkrecht" mit dem rein geometrischen „rechtwinklig" oder „normal" verwechselt. Dies berichtigend ist also gemeint eine zum Meridian rechtwinklige, durch den Punkt A gehende Ebene. Deren giebt es aber unendlich viele, z. B. der scheinbare Horizont des Punktes, der Parallelkreis durch denselben, eine vertikale durch West und Ost gehende Ebene, endlich können noch Ebenen rechtwinklig zum Meridian gelegt werden, die schief gegen die Horizontalebene und gegen die Erdaxe stehen. An einer andern Stelle wird die fragliche Ebene als einer der Hauptnormalschnitte bezeichnet, als der Schnitt im ersten Vertikal — nur ist nicht gesagt, was darunter zu verstehen ist. Es wäre so einfach gewesen, zu sagen: die durch A rechtwinklig zur Meridianebene gelegte Vertikalebene (dass sie durch Ost und West geht, folgt dann schon, man könnte es aber auch noch zufügen). So mangelhaft die Definition ist, so schlecht gewählt ist die Bezeichnung: das Perpendikel. Darunter versteht man eine Gerade, nämlich die Fallrichtung oder die Richtung eines Fadens, an dem etc. Diese üble Benamung ist vielleicht dem Verfasser nicht ganz zuzuschreiben; doch ist auf den Unterschied zu achten, dass die amtliche „bayerische Landesvermessung" den Ausdruck „*perpendiculaire à la meridienne*" (S. 526), sogar „sogenannte *perpendiculaire à la meridienne*" (S. 525) gebraucht, durch die fremdsprachliche Bezeichnung allein also schon andeutet, dass hier ein technisches Kunstwort vorliegt, dessen Bildung nicht gebilligt wird, weil man sonst nicht (wie zuweilen durch ein *sic!*) die Verantwortung dafür ablehnte.

S. 49 wird die Axe der Libelle erklärt als eine der Sehne des ausgeschliffenen Kreisbogens parallele Gerade. Abgesehen von dem, was formaliter an dieser Erklärung zu tadeln bleibt, ist zu verwundern, dass der sehr belesene Verfasser nicht die in besseren geodätischen Werken nun allgemein übliche Definition angenommen hat.

In einem eigentlich den letzten Graden der erreichbaren Genauigkeit der Vermessungen gewidmeten Werke sollten alle Angaben genau und unzweideutig sein. Das ist die Stelle auf S. 149: „Die Zählungsweise (der Winkel) wird immer eine rechtläufige, d. h. von links nach rechts

gehende sein", sicherlich nicht. Einmal sagt bekanntlich Drehung von links nach rechts gar nichts, — geht man von links über vorn (oder unten) nach rechts, so hat man entgegengesetzte Drehung, als wenn man von links über hinten (oder oben) nach rechts geht; unzweideutigen Drehungssinn kann man entweder mittels des bekannten Uhrzeigerganges oder am besten mit den Himmelsgegenden bezeichnen. Gemeint ist hier die Drehung von West über Nord nach Ost; allein da die vom Verfasser ungenügend definirte als gleichbedeutend mit rechtläufig genannt wird, so führt er irre, denn der astronomische Sprachgebrauch nennt die eben beschriebene Drehung West-Nord-Ost rückläufig.

Die Wichtigkeit des Buches, das durch den vortrefflichen Kern seines Inhalts eine wesentliche Bereicherung der Literatur auf dem Gebiete der Ausgleichungsrechnungen bildet und durch die weitestgehenden Erfahrungen des Verfassers, welcher grossartige Rechenoperationen leitet und ausgeführt hat, erhöhte Bedeutung erhält, muss die weitläufige Darstellung seiner formalen Mängel rechtfertigen.

Wie Eingangs dieser Besprechung angegeben, ist der III. Abschnitt (überschrieben: Technik der trigonometrischen Messung. Graphisch-analytische Ausgleichung.) der Haupttheil des Werkes. Der I. Abschnitt: „Theoretische und technische Grundlage", enthält: A. Das Erdsphäroid S. 14—29; B. Theoretische Elemente der Grundoperationen S. 29—48; C. Technische Elemente der Grundoperationen S. 48—89; D. Hauptsätze der Ausgleichungsrechnung S. 89—134; dieser Theil ist ziemlich weitläufig, dazu gehören aber eigentlich auch noch IV B. Einfache Punkteinschaltung nach der Methode der kleinsten Quadrate S. 355—376, IV C. Genauigkeitsvergleichungen und Fehlergrenzen S. 376—391 und Nachträge und Anmerkungen I und II S. 418—438. Die mitgetheilten Capitelüberschriften decken sich ebenso wenig genau, als der Titel des ganzen Buches mit dem Inhalte. Der II. Abschnitt: „Theorie der Dreiecks- und Coordinatenberechnung. Trigonometrische Elementarprobleme" (S. 134—208), hält Berichterstatter, bis auf die theilweise schon erwähnten formalen Ausstellungen, für gut gelungen, und noch erfreulicher erscheint ihm IV D.: „Uebersicht der Detailmessung", worin, wie an anderen Stellen, die grosse Geschäftskenntniss des Verfassers zur günstigsten Verwendung kommt. Die Angabe der Inhaltstheile hat deren Anordnung durcheinander geworfen, weil das Anordnungsprincip nicht erkannt werden konnte; es ist noch nachzutragen: IV A. „Vermischte Aufgaben", sehr verschiedenen Inhalts, theilweise eigentlich zu früheren gehörig; endlich sind eine Anzahl nützlicher Zahlentabellen S. 457—464 zu nennen und 7 Tafeln. Die drei letzten (als Anlagen A, B, C bezeichnet) geben die Constructionen der Strahlenschnitte der früher erwähnten Rechnungsbeispiele, die vier ersten, technisch sehr schön ausgeführten, dienen für die graphische Ermittelung der sphärischen Correctionen im Soldner-

schen Coordinatensystem und „für Coordinatenconstructionen und Richtungsänderungen". Die Tafeln werden zum ersten Mal vom Verfasser publicirt, basiren auf den Elementen des bayrischen Dreiecksnetzes, sind aber auch für veränderte Netzgrundlagen brauchbar (S. 159). Die Anweisung zum Gebrauch dieser Tafeln dürfte entschieden deutlicher sein. Es handelt sich darum, in Taf. I die Ordinatencorrection $(y) = -\frac{(\Delta x)^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta y}{3}\right)$, in Taf. II die Abscissencorrection $(x) = \frac{\Delta x \,.\, y_2^{\,2}}{2R^2} - \frac{\Delta x \,.\, (\Delta y)^2}{6R^2}$ und in Taf. III die Directionswinkelcorrection $(\varphi) = \frac{\omega \,.\, \Delta x}{R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta y}{2}\right)$ zu finden (in der Aufschrift der Taf. III ist ω irrthümlich im Nenner, statt im Zähler). Die zwei ersten Tafeln enthalten also Parabeln, die dritte gerade Linien aufgezeichnet. Ueber den Nutzen der Tafeln, welcher vom Verfasser hoch angeschlagen wird, erhält man Belehrung, wenn man sie anwendet. Häufig, so gleich in dem S. 147 angegebenen Beispiele, reichen die Tafeln nicht aus und es müssen Maassstabsumrechnungen vorgenommen werden, welche Zeit und — da bald quadratische, bald lineare Glieder vorkommen — einige Achtsamkeit erfordern; hinsichtlich des Zeitaufwands muss erinnert werden, dass die Abscissencorrection aus zwei besonders aufzufindenden Theilen zusammengesetzt werden muss. Die dichtgedrängten Curven sind schwierig zu verfolgen, mit der grössten Anstrengung und Benutzung einer Lupe kann ich, auch nachdem ich mich etwas eingeübt habe, durchaus nicht mit der Rechnung genügend übereinstimmende Werthe erhalten. Entweder muss der Verfasser, wenn er, wie angegeben, auf graphischem Wege die Correctionen ermittelt hat, nebst vieler Geduld und Geschicklichkeit sehr viel schärfere Augen als ich haben und diesen unbedenklich grössere Anstrengungen zumuthen, als ich das thun wollte, oder er muss Tafeln in erheblich grösserem Maassstabe benutzt haben, denn sonst wäre die Uebereinstimmung seiner graphischen Interpolation für (y) und (x) mit den durch die Rechnung gefundenen Werthen nicht erklärlich. Für meine Neigung und Fähigkeiten ziehe ich die Berechnung entschieden der Ermittelung durch die Tafeln vor und bin sicher, in derselben oder wenigstens fast derselben Zeit rechnend zum Ergebniss zu gelangen, als der Geübteste mit den Tafeln, jedenfalls aber ohne merkliche Anstrengung das Geschäft sehr viel länger fortsetzen zu können. Nur die einfachere Tafel III mag bequem sein, ist aber auch recht wohl entbehrlich. Für die Ermittelung der Polarcoordinaten sind in dem besondern Beispiele mit schon runden Zahlen die Tafeln allerdings bequem, geben mir aber immerhin etwas andere Resultate, nämlich 1,214 statt 1,22 und 0,116 statt 0,11. In der Berechnung von *log r* ist ausserdem ein Fehler (Druck-?), die dritte Decimale muss 9, nicht 7 heissen. Den besondern Vorzug (S. 162), welchen Verfasser den Tafeln zuschreibt, bei

kürzeren Entfernungen r „mit einem Blicke das eventuelle Fallenlassen der sphärischen Correction (wegen zu geringen numerischen Betrages) als berechtigt erkennen zu lassen“ darf man wohl zugestehen; für diesen Zweck allein hätten die Tafeln aber einfacher und daher leichter anwendbar sein können.

S. 228 ist ein Beispiel der Richtungsverbesserung wegen excentrischer Aufstellung auf graphischem Wege durchgeführt. Die nicht mühelos herzustellende Zeichnung als gegeben nehmend, entnehme ich, sorgfältig verfahrend, die Normalenlängen in Millimetern zu 20; 27; 17,6; 19,1; 7, und da die Rechnung für den zweiten Fall 152 giebt, sind die abgegriffenen Werthe mit $\frac{152}{27}$ zu multipliciren, wodurch erhalten wird

112,6   152   99,08   107,5   38,

während der Verfasser

115   152   97   110   32

angiebt. Das lässt die Ungenauigkeit des Verfahrens ersichtlich werden — es ist hier sogar noch dieselbe Zeichnung benutzt, also keine Ungenauigkeit durch die geringere Sorgfalt in Ausführung dieser hineingebracht worden. Die Berechnung der Linearverbesserung kann viel schneller ausgeführt werden und ergiebt

$$-115{,}6 \quad -151{,}97 \quad -96{,}29 \quad +110{,}5 \quad +32{,}44.$$

Mit diesen oder den graphisch ermittelten Argumenten kann nun die Tafel IV zur Auswerthung der Richtungsverbesserung benutzt werden, es ist aber weniger mühsam (wenn Genauigkeit angestrebt wird), wieder zu rechnen und man erhält dann 1. wenn die von mir abgegriffenen, 2. wenn die vom Verfasser angegebenen, 3. wenn die von mir berechneten (genauen) Normalabstände benutzt werden:

ad 1.	− 114,7	− 158,34	− 99,45	+ 227,42	+ 51,90
ad 2.	− 117,1	− 158,34	− 97,36	+ 232,70	+ 43,71
ad 3.	− 117,71	− 158,34	− 96,66	+ 233,76	+ 44,33
Verfasser hat	+ 118	+ 158	+ 97	− 233	− 44.

(Warum die Vorzeichen umgekehrt wurden, ist mir nicht deutlich geworden.) Angesichts der grossen Abweichungen, welche zwischen genauer Rechnung und meinen graphischen Ermittelungen (aus derselben Zeichnung) und der sehr kleinen Unterschiede, die nach Verfassers Interpolation bleiben, möchte man fast glauben, dieser habe erst Alles berechnet gehabt und sei dann bei der graphischen Interpolation voreingenommen gewesen. Für mich geht aus den gemachten Erfahrungen die Regel hervor: keine Benutzung der graphischen Methoden, sondern den sichern Weg der Rechnung gehen.

Nachdem der Berichterstatter so Manches aus dem Buche angeführt hat, dem er seinen Beifall nicht spenden konnte, würde es ihm unbillig

erscheinen, nicht zum Schlusse noch zu betonen, dass er auch des Guten Vieles in dem Werke gefunden und gar manches Nützliche daraus gelernt hat, allerdings mit viel Mühe und Beschwerde.

Bohn.

Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen, theilweise auf Grund freier Bearbeitung von Laisant's „Essai sur les fonctions hyperboliques" und Forti's „Tavole logaritmiche" dargestellt von Dr. Siegm. Günther, Professor am Gymnasium zu Ansbach, Mitglied der Leop.-Karol. Akademie der Naturforscher, corr. Mitglied der königl. Gesellschaft zu Prag und der Akademie zu Padua Mit vielen in den Text eingedruckten Holzschn. Halle a. S., Verlag von Louis Nebert. 1881. X, 440 S.

Der Verfasser des uns zum Berichte vorliegenden Werkes hat nicht nur in verschiedenen geschichtlich-mathematischen Schriften seine Neigung bewährt, auf den Ursprung der einzelnen Theile unseres Wissens einzugehen, er hat auch in seinem „Lehrbuche der Determinantentheorie" ein einleitendes geschichtliches Capitel vorausgeschickt, und ebenso beginnt die Lehre von den Hyperbelfunctionen mit einem Capitel: Historisch-bibliographische Einleitung. S. 1—63. Bei der Determinantentheorie hatte man an Herrn Günther die Aufforderung gerichtet, die Geschichte der Lehre an das Ende des Buches zu verweisen. Er hat mit bestimmter Absicht in der zweiten Auflage trotzdem die frühere Reihenfolge beibehalten, er ist auch heute wieder der gleichen Anordnung treu geblieben. Gewiss lassen Gründe gegen und für dieselbe sich angeben, im Ganzen aber glauben wir dem Verfasser beipflichten zu müssen. Wenn auch der Leser dieses I. Capitel nicht osfort in allen seinen Theilen verstehen mag — und das bildet den Haupteinwand gegen die Anfangsstellung —, er wird doch darin eine vorläufige Kenntniss des Gesammtinhalts und damit Interesse an demselben gewinnen, er wird um so mehr, nachdem er mit stets wachsendem Interesse an das Ende des Bandes gelangt ist, zu dem Anfangscapitel zurückkehren, welches ihm jetzt willkommene Wiederholung bietet. Er wird in beiden Fällen über die ungemeine Belesenheit des Verfassers in Staunen und Freude versetzt sein; in Staunen, wie es möglich war, diese zahlreichen Schriften, deren meiste für die späteren Autoren über den gleichen Gegenstand so gut wie nicht vorhanden waren, überhaupt ausfindig zu machen, in Freude über die verhältnissmässige Sicherheit, sich hier zum Herrn des ganzen Stoffes machen zu können.

Capitel II. Die Kreis- und Hyperbelfunctionen, aus einer gemeinsamen algebraischen Quelle abgeleitet. S. 64—86. Die hier gemeinte Quelle ist keine andere, als die quadratische Gleichung

$x^2 - Px + Q = 0$, deren beide Wurzeln a und b zur Bildung der Functionen $U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$, $V_n = a^n + b^n$ Anlass geben. Bekanntlich hat Eduard Lucas, welchem Herr Günther in diesem Capitel sich wesentlich anschliesst, diese beiden Functionen in die Arithmetik eingeführt und den Zusammenhang

$$U_n = \frac{2Q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{4Q - P^2}} \sin\left(\frac{ni}{2} \log \frac{a}{b}\right), \quad V_n = 2Q^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{ni}{2} \log \frac{a}{b}\right)$$

nachgewiesen. So sind goniometrische Functionen mit imaginärem Argumente gewonnen, deren nähere Untersuchung es wünschenswerth erscheinen lässt, ihnen besondere Namen und Zeichen beizulegen. Der Uebergang zu den Hyperbelfunctionen, wie eben diese Functionen von nun an genannt sind, ist auf diese Weise zu einem durch eine besondere Aufgabe erzwungenen geworden und kein auf's Gerathewohl unternommener analytischer Versuch.

Capitel III. Theorie der einfachen Hyperbelfunctionen. S. 87—151. In diesem Capitel sind die Hyperbelfunctionen zunächst geometrisch erläutert, wodurch die Berechtigung des Namens sich ergiebt. Die im vorigen Capitel begonnenen Betrachtungen über Periodicität der Hyperbelfunctionen werden fortgesetzt und dabei Beziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunctionen zur Sprache gebracht. Insbesondere zeigt es sich, dass es stets zwei zusammengehörige Winkel u und τ giebt, deren letzterer den Namen des transcendenten Winkels führt, und dass $\mathfrak{Cos}\, u \cos \tau = 1$. Für die soweit bekannten Hyperbelfunctionen müssen alsdann die Differentialquotienten gebildet, müssen Reihenentwickelungen und Factorenfolgen gesucht werden, lauter Gegenstände, die noch in diesem Capitel abgehandelt werden. Von Interesse ist dabei die Constante $\log(1 + \sqrt{2}) = 0{,}8813735870 \ldots = \Pi$ nach der von Laisant vorgeschlagenen Bezeichnung. Zwischen dem Winkel u, dessen hyperbolischem und cyklischem Sinus finden nämlich die beiden einander sehr ähnlichen Gleichungen statt

$$u = \mathfrak{Sin}\, u - \frac{1^2}{2!} \frac{\mathfrak{Sin}\, u^3}{3} + \frac{1^2.3^2}{4!} . \frac{\mathfrak{Sin}\, u^5}{5} - \frac{1^2.3^2.5^2}{6!} \frac{\mathfrak{Sin}\, u^7}{7} + \ldots,$$

$$u = \sin u + \frac{1^2}{2!} \frac{\sin u^3}{3} + \frac{1^2.3^2}{4!} . \frac{\sin u^5}{5} + \frac{1^2.3^2.5^2}{6!} \frac{\sin u^7}{7} + \ldots$$

Diese Gleichungen, deren Abdruck (S. 131) durch einen der leider nicht ganz seltenen Druckfehler entstellt ist und bei welchen überdies, wie in dem ganzen Werke, die, wenn auch meist gebräuchliche, darum doch nicht minder unlogische* Potenzirung der Functionalzeichen angewandt

* Unter $\sin^2 u$ kann logischer Weise nur $\sin(\sin u)$, und niemals $(\sin u)^2$ verstanden werden. Man vergl. nur z. B. $d^2 u$ und du^2 oder $\log^2 u = \log(\log u)$ und $\log u^2$.

ist, gehen bei $\mathfrak{Sin}\, u = 1$ und $\sin u = 1$ in zwei besondere Fälle über, welche $\mathfrak{Arc\,Sin}\, 1$ und $\arcsin 1$ durch numerische Reihen kennen lehren. Die letztere Reihensumme wird allgemein $\frac{\pi}{2}$ genannt; warum die erstere Π statt $\frac{1}{2}\Pi$ genannt worden ist, will uns nicht recht einleuchten. Da wir uns doch einmal einige abfällige Bemerkungen gestatten, so sei erwähnt, dass in diesem Capitel, aber auch nur in diesem, soviel uns bei einmaligem Lesen aufgefallen ist, einige wenige Beweise an leicht auszufüllenden Lücken zu leiden scheinen. Vergl. z. B. S. 95 Z. 13 und S. 98 Anmerkung * zu Anfang.

Capitel IV. Anwendung der Hyperbelfunctionen auf Fragen der Algebra und Analysis. S. 152—189. Die Berechtigung einer eingehenden Sonderbetrachtung gewisser Functionen beruht, neben dem Vorhandensein interessanter Eigenschaften, eleganter Reihenentwickelungen für deren Auswerthung und dergleichen, auch auf der Verwendbarkeit der Functionen zur Lösung von mannigfachen Problemen. Das IV. und das V. Capitel hat die Bestimmung, diese Kriterien an die Hyperbelfunctionen anzulegen. Eine Anwendbarkeit derselben ist nachgewiesen erstlich zur logarithmischen Auffindung von Summenlogarithmen vermittelst $\log(a+b) = \log a + 2\log \mathfrak{Cos}\,\varphi$, während $\mathfrak{Sin}\,\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$; zweitens zur Behandlung des reduciblen Falles der cubischen Gleichung in ähnlicher Weise, wie der irreducible Fall durch Kreisfunctionen gelöst zu werden pflegt; wir erwähnen drittens manche Integrationen, welche durch Hyperbelfunctionen leichter, als in der üblichen Weise dem Gedächtnisse sich einprägen, wie z. B. neben $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ die Form $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Arc\,Tang}\, x$ der Form $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ vorzuziehen sein dürfte. Ohne alle vom Verfasser nachgewiesenen Anwendungen wiedergeben zu wollen, lassen wir uns daran genügen, viertens hervorzuheben, dass die Bernoulli'schen Zahlen als bestimmte Integrale sich ergeben, unter welchen Hyperbelfunctionen auftreten, sowie fünftens, dass Hyperbelfunctionen die Integration gewisser Differentialgleichungen vermitteln. Unzweifelhaft können in allen diesen Fällen mehr oder weniger leicht auch Exponentialfunctionen zur Anwendung kommen, aber auf dieses „mehr oder weniger leicht" ist eben ein grosses Gewicht zu legen und dieses fällt ganz in die Waagschale der Hyperbelfunctionen.

Capitel V. Anwendung der Hyperbelfunctionen auf Fragen der Geometrie und mathematischen Physik. S. 190—296. Der Inhalt dieses Capitels, des längsten des ganzen Bandes, ist durch die Ueberschrift nothdürftig bezeichnet. Wir begegnen hier, um auch

nur bei wenigen Punkten zu verweilen, imaginären Hyperbelpunkten als nöthige Ergänzung zum Begriffe der imaginären Kreispunkte; wir begegnen den sphärischen Kegelschnitten, zurückgeführt auf das von Gudermann ersonnene krummlinige Coordinatensystem; wir begegnen bequemen Ausdrücken für die Gleichungen gewisser durch elliptische Integrale rectificirbarer Curven und gewisser Minimalflächen; wir lernen elliptische und hyperbolische Cykloiden kennen; wir folgen der Discussion der Gleichung der Kettenlinie in ihrer einfachsten Gestalt $y = \mathfrak{Cos}\, x$; wir treffen endlich auf durch Hyperbelfunctionen vollzogene Umformungen gewisser Ergebnisse aus den Lehren vom Lichte, von der Wärme, von der Elektricität, welche geeignet sind, eine bequemere Berechnung zu gestatten.

Capitel VI. Die rechnerischen Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie. S. 297—336. Ausgehend von einem Versuche, das Hebelgesetz der Statik zu beweisen, welchen Lagrange's Freund und Schüler, Foncenex, einst machte, gelangt der Verfasser mit Genocchi zu der Gleichung $cos\,\beta = cos\,\frac{i}{r}\,sin\,\alpha$, deren geometrischer Sinn ermittelt werden soll. Ein imaginäres $r = \varrho i$ lässt jene Gleichung in $cos\,\beta = cos\,\frac{1}{\varrho}\,.\,cos\,(90^0 - \alpha)$ übergehen, d. h. in den pythagoräischen Lehrsatz des sphärischen Dreiecks; das Unendlichwerden des Halbmessers, $r = \infty$, liefert in der Ebene $\alpha + \beta = 90^0$; ein reelles endliches r gestattet, die Form $cos\,\beta = \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{r}\,.\,sin\,\alpha$ anzuwenden, und deren geometrischer Sinn enthüllt sich im rechtwinkligen Dreieck der pseudosphärischen Fläche von constanter negativer Krümmung. Auf derselben Fläche sind, wie bekannt, die Thatsachen der sogenannten nichteuklidischen oder absoluten Geometrie richtig, und somit ist der Uebergang zu einer Trigonometrie dieser Fläche gebahnt, in welcher die Hyperbelfunctionen eine ähnliche Rolle spielen, wie die Kreisfunctionen in der sphärischen Trigonometrie, und welche gleich der letzteren in die ebene Trigonometrie übergeht, sofern eine gewisse Strecke unendlich gross wird.

Capitel VII. Allgemeine Betrachtungen über die Generalisirung mathematischer Begriffe und Probleme; Ausdehnung des Begriffes goniometrischer Functionen auf Curven, welchen die Gleichung $x^m \pm y^m = 1$ zukommt. S. 337—358. Alle Methoden kennzeichnen zu wollen, nach welchen Mathematiker mit und ohne Erfolg versucht haben, von gelösten Aufgaben zu solchen fortzuschreiten, die den ersteren verwandt noch der Lösung harrten, wäre ein vergebliches Bemühen. Aber gewisse Grundsätze der Erweiterung giebt es, die in den verschiedenartigsten Fällen wiederkehren und die darin bestehen, dass man Elemente der ursprünglichen Aufgabe oder der

ursprünglichen Definition, die zunächst den Charakter der Constanz an sich trugen, variiren lässt (S. 341). Her Günther wendet diesen Gedanken nunmehr auf die Kreis- und Hyperbelfunctionen an, deren gemeinsame Definition er in den verschiedenen Formen, welche dafür erlangt waren, ins Auge fasst. Die erste solche Definition geht aus von der Curvengleichung $x^2 \pm y^2 = 1$, indem von jedem Punkte der Curve senkrecht zur Abscissenaxe Gerade gezogen werden, welche als goniometrische Functionen gelten. Hier sind drei Erweiterungen möglich: entweder man lässt den Exponenten 2 in m übergehen, betrachtet also die Curve, deren Gleichung $x^m \pm y^m = 1$ lautet; oder man giebt bei unverändertem Exponenten den beiden variabeln Gliedern der Curvengleichung von der Einheit verschiedene Coefficienten, so dass die Gleichung zu $Ax^2 \pm By^2 = 1$ wird; oder endlich man lässt die Richtung der von jedem Curvenpunkte nach der Abscissenaxe gezogenen Geraden von der Senkrechten abweichen. Allerdings wären hier auch andere Fälle noch denkbar, man könnte z. B. von der Curve $Ax^m \pm By^m = 1$ ausgehen und von ihr aus unter dem Winkel φ Gerade nach einer in der Curvenebene irgendwie gegebenen Axe ziehen, aber diese so verallgemeinerte Aufgabe hat der Verfasser nicht besprochen. Zunächst geht derselbe zu $x^m \pm y^m = 1$ über und bespricht sowohl den Fall der von Unverzagt eingeführten longimetrischen Functionen ($m = 1$), als auch den allgemeineren eines beliebigen ganzen positiven m.

Capitel VIII. Schiefwinklige goniometrische Linien des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel; rechtwinklige goniometrische Linien der Ellipse und willkürlichen Hyperbel. S. 359—392. Die Ueberschrift des Capitels giebt genügend zu erkennen, dass es in ihm um die beiden anderen Erweiterungen sich handelt, deren die erste Definition der goniometrischen Functionen für fähig erklärt worden ist.

Capitel IX. Die verallgemeinerten goniometrischen Reihen und die verallgemeinerten goniometrischen Operationsgesetze. S. 393—413. Eine zweite Definition der goniometrischen Functionen ist die durch die Reihenentwickelungen für $\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\mathfrak{Sin}} x$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\mathfrak{Cos}} x$, womit zugleich die Grundeigenschaft verbunden wird, welche unter Anwendung von Determinanten $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1$ und $\begin{vmatrix} \mathfrak{Sin}\, x & \mathfrak{Cos}\, x \\ \mathfrak{Cos}\, x & \mathfrak{Sin}\, x \end{vmatrix} = 1$ heisst. Die Erweiterung, welche Herr Günther hier hervortreten lässt, knüpft an Beides an: es werden von den goniometrischen Reihen nicht alle Glieder, sondern nur solche, deren Stellenindex einem gewissen Gesetze folgt, zusammengefasst, um neue Functionen zu gewinnen; es werden mehr als nur zwei Functionen gesucht, welche derartig symmetrische Determinanten, wie wir sie soeben gebildet haben, nur von

höherem Grade, aber wieder mit der Summa 1 bilden lassen. Herr Günther verweilt hier bei einer ganzen Zahl von unter einander selbstständigen, wenn auch dem Inhalt nach sich wenig von einander unterscheidenden Arbeiten, über welche er mit gewohnter Treue berichtet. Den allgemeinsten Standpunkt hat unter den benutzten Schriftstellern wohl Most eingenommen, welcher 1869 etwa im L. Bande von Grunert's Archiv die um je p Glieder von einander abstehenden Theile der Reihenentwickelung irgend einer Function $f(x)$ zu einer neuen Reihe mit zu suchender Summe zusammenfasste und zur Aufsuchung dieser Summe den Weg einschlug, dass er in $f(x)$ die allgemeine Grösse nach einander durch ihr Product in eine p^{te} Einheitswurzel ersetzte, damit durch Addition aller dieser Reihen die zu vernichtenden Glieder von selbst den Coefficienten 0 erhalten und damit zum Wegfall kommen. Diesen Gedanken hat, ohne Most's Aufsatz zu kennen, ein neuerer Mathematiker weiter ausgebeutet, dessen erste Veröffentlichung an einer allerdings nicht häufig durchforschten Stelle Herrn Günther, wie es fast zu erwarten stand, entgangen ist. Referent erachtet es um so mehr als seine Pflicht, hier ergänzend einzutreten, als es um Untersuchungen eines seiner liebsten Schüler sich handelt, welchen er dadurch die erworbene Priorität wahren will, die denselben durch später im Druck erschienene, aber bekannter gewordene Arbeiten von Yvon Villarceau und Anderen entwunden zu werden droht. Wir meinen den Vortrag, welchen Dr. Hermann Schapira aus Odessa am 19. September 1879 bei Gelegenheit der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Baden-Baden gehalten hat, und welcher unter dem Titel „Gegenseitigkeit von Partial- und circumplexen Functionen und Reihen“ S. 171—174 des Tageblattes jener Versammlung zu lesen ist. Herr Schapira hat den damals in grossen Umrissen skizzirten Entwurf weiteren Vordringens auf dem durch ihn erschlossenen Gebiete beharrlich festgehalten. Er hat insbesondere die jeweil erzielten Fortschritte dem Mathematischen Vereine in Heidelberg in Vorträgen bekannt gemacht, bei welchen Referent fast ausnahmslos zugegen war. Die Daten der Vorträge nebst den sehr bezeichnenden Titeln, unter welchen sie gehalten wurden, sind: 18. November 1879. Gegenseitigkeit von Partial- und circumplexen Functionen; 25. November. Fortsetzung; 9. December. Anwendung der Partial- und circumplexen Functionen auf algebraische Gleichungen; 16. December. Coefficienten einer algebraischen Gleichung sind successive Ableitungen von einander, Zusammenhang zwischen der Lösung einer Gleichung und der Umkehrung eines Integrals; 3. Februar 1880. Componirte Cofunctionen; 11. Mai. Cofunctionen und allgemeine Gleichungen; 3. August. Die Functionaldeterminante der Cofunctionen und die Cofunctionen als Fundamentalsysteme. Eine Vereinigung eines Theiles dieser zahlreichen Ergebnisse stellt die Doctordissertation des Herrn Schapira: „Ueber

lineare homogene Cofunctionen", dar, auf welche das vom 17. December 1880 datirte Doctordiplom als von der Facultät gebilligt Bezug nimmt, und welche, wie wir hoffen, in nicht zu später Frist der Oeffentlichkeit übergeben werden dürfte, vielleicht als Anfang eines mehrbändigen Werkes, zu welchem die Schapira'schen Ergebnisse anwachsen zu wollen allen Anschein haben.

Capitel X. Uebertragung der goniometrischen Functionen auf den Raum; Hyperboloidfunctionen. S. 414—437. Eine dritte Definition der goniometrischen Functionen liefert die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$. Ihre Erweiterung liegt in der eine weitere Variable einschliessenden Gleichung $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, zu deren Betrachtung der Verfasser in diesem letzten Capitel übergeht.

Wir haben den Inhalt des Günther'schen Werkes unseren Lesern im Ueberblicke vorgeführt, es bleibt uns eine Würdigung desselben übrig. Wir glauben es als sehr verdienstlich und der Verbreitung werth bezeichnen zu dürfen, der Verbreitung auch unter Solchen, die mit früheren Bearbeitungen der Hyperbelfunctionen bekannt sind. Nicht leicht — wir wiederholen hier ein am Anfange schon Betontes — wird Jemand die Günther'sche Belesenheit übertreffen oder nur erreichen, nicht leicht mit solchem Geschick eine Fülle fremder Arbeiten unter einzelne Gesichtspunkte zu vereinigen wissen, an welche die Verfasser selbst zwar kaum jemals dachten, welche aber für den Leser des Lehrbuches eine einheitliche Gesammtwirkung schaffen. Schon in diesem Sinne ist das Günther'sche Werk keineswegs eine Compilation zu nennen, so viel von anderer Hand vorbereiteten Stoffes sich auch vorfindet. Und weiter bietet uns Herr Günther in vielen Capiteln, vorzüglich im I., VII. und X., auch eigene neue Untersuchungen, denen es an Freunden nicht fehlen wird. Wir wünschen und erhoffen dem entsprechend dem Werke den besten Erfolg. Sollte es zu einer zweiten Auflage gelangen, so bitten wir den Verfasser nur um Eines: der deutschen Sprache da ihr Recht angedeihen zu lassen, wo die Anwendung eines Fremdwortes entbehrlich, für manchen Leser störend ist. Wir wenigstens empfinden ein regelmässiges Missbehagen, wenn wir in einem deutschen Texte Wörtern begegnen wie: adaptiren, comipariren, concis, conversibel, Distanz, Énoncé, evident, Paradigma, Rekurs, significant, stringent, vindiciren u. s. w.

Cantor.

Ueber Wärmeleitung und die Methoden, das Wärmeleitungsvermögen der Körper zu bestimmen, von Dr. J. ROSNER. (Abhandlung im 15. Jahresbericht der Landesoberrealschule Wiener-Neustadt. Selbstverlag.) 1880.

Der Verfasser stellt die über Wärmeleitung aufgestellten Formeln zusammen und bespricht dann die Methoden der experimentellen Bestimmung der Wärmeleitungsconstanten. Die Zusammenstellung lässt Vieles zu wünschen übrig. Nicht einmal äussere und innere Leitung ist ordentlich definirt. Es ist von einer Wärmemenge die Rede, welche die Flächeneinheit in der Zeiteinheit verlässt, oder um die ein Querschnitt während der Zeit dt zunimmt! Innere Leitungsfähigkeit der Körper soll diejenige Wärmemenge sein, welche in der Zeiteinheit durch die Gewichtseinheit eines Körpers geht. Bei der absoluten Bestimmung der Leitungsconstante nach Neumann sollen die Pariser Linie, die Kubiklinie und die Minute die Einheiten sein! Auch werden S. 36 mit einem Kathetometer die Zeiten gemessen. Bei solcher Incorrectheit des Ausdrucks ist nicht zu verwundern, dass man eine Uebersicht über das Geleistete in keiner Weise bekommt. Auch der Druck ist mangelhaft.

P. ZECH.

Physikalische Begriffe und absolute Maasse, von Dr. H. HERWIG, Prof. an der technischen Hochschule Darmstadt. Leipzig, Teubner. 1880.

Es ist erfreulich, über dieses kleine, nur 100 Seiten starke Schriftchen berichten zu können; das Einzige, was zu wünschen übrig bleibt, ist vielleicht weitere Ausdehnung in einzelnen Dingen. Die absoluten Maasse gewinnen in der Physik mehr und mehr Bedeutung. Kohlrausch in seiner praktischen Physik, Mousson in seinem Lehrbuche der Physik geben Darstellungen der verschiedenen Maasssysteme. Eine vollständige Zusammenstellung ist in dem vorliegenden Werke gegeben, mit einer Klarheit und Uebersichtlichkeit, die Nichts zu wünschen übrig lässt.

Die Auseinandersetzungen über Kraft, Erhaltung der Kraft, Gravitation und Schwerkraft sind bei aller Kürze vollständig und correct. Auch über die neueren Bestrebungen, den Aether als Vermittler der Gravitation darzustellen, spricht sich der Verfasser aus, indem er es als nothwendig erkennt, dass die Einwirkung zweier getrennter Massen auf einander durch eine zwischenliegende Masse vermittelt werde. Es wird dann der Unterschied der potentiellen und actuellen Energie unnöthig, da die erste nichts Anderes, als die Energie der vermittelnden Masse ist. Doch weiss er keine der neueren Hypothesen als annehmbar zu bezeichnen.

Sehr instructiv ist für Denjenigen, der zum ersten Male die absoluten Maasse studirt, die Darstellung des conventionellen Maasssystems, bei dem unter Gewichten Schwerkräfte statt Massen verstanden werden.

Nicht viel weniger als die Hälfte des Ganzen nimmt die Darstellung des elektrostatischen, elektromagnetischen und elektrodynamischen Maasssystems und ihre gegenseitige Vergleichung ein. Es wird insbesondere im Einzelnen gezeigt, wie die Dimensionen der magnetischen und elektrischen Begriffe sich nur durch Potenzen einer Geschwindigkeit unterscheiden.

Es wäre zu wünschen, dass jeder angehende Lehrer der Physik den Inhalt des Schriftchens sich zu eigen mache, damit das absolute Maasssystem in der Physik und den physikalischen Arbeiten mehr und mehr Boden fasse.

P. ZECH.

Die Theorie vom Massendruck aus der Ferne, von AUREL ANDERSSOHN. Breslau, Trewendt. 1880.

Einer der Versuche, die Wirkung zweier Körper auf einander aus der Ferne zu erklären. Die von einem Himmelskörper ausgehende Strahlung, durch den Aether fortgepflanzt, übt auf den getroffenen Körper einen Druck aus; werden zwei Körper getroffen, von denen der eine im Schatten des andern liegt, so ist auf ihn der Druck geringer, also nähern sich die zwei Körper. Alle Gravitationserscheinungen erklären sich aus dem Gesammtdruck aller Weltensonnen auf jeden Körper mit Rücksicht auf die eintretende Beschattung. Der Verfasser steht auf gespanntem Fusse mit der Physik. Er will die Trägheit beseitigen, Moment, Energie und Bewegungsgrösse sind ihm ein und dasselbe. Es ist also nicht zu erwarten, dass ausser dem allgemeinen Wort Massendruck im Besondern Nachweisung über die Möglichkeit dieses Drucks und die Grösse desselben gegeben werde.

P. ZECH.

Beitrag zur Theorie der Stabilität schwimmender Körper, von H. SCHUNKE. Kiel, Toeche. 1880.

Es wird in dieser kleinen Schrift darauf aufmerksam gemacht, dass bei bewegten Körpern der Satz, es werde stets das gleiche Volumen Wasser verdrängt, nicht als giltig angesehen werden könne. Macht man die Voraussetzung, so lässt sich die augenblickliche Drehaxe im schwimmenden Körper, wenn er sich neigt, theoretisch bestimmen. Würde man diese Axe praktisch finden, so ergäbe der Unterschied ein Maass für die Aenderung des verdrängten Volumens und es könnte damit eine ver-

besserte Theorie der Stabilität verbunden werden, die für den Schiffbau von Interesse wäre.

P. ZECH.

Die Aenderung der Dampfdichten bei variablem Druck und variabler Temperatur, von PAUL SCHOOP. Zürich, 1880.

Das Schriftchen ist eine Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde in der naturwissenschaftlichen Facultät Tübingen. Nach der Beschreibung des benützten Apparats wird seine Genauigkeit aus einigen Bestimmungen des Ausdehnungscoefficienten der Luft abgeleitet und dann die Resultate der Dampfdichtebestimmung der Ester und des Benzols mitgetheilt. Die Versuche führen zu der Erkenntniss, dass die Dämpfe und Gase sich bei Aenderung ihrer Dichten analog den dissociirenden Körpern verhalten. Bei Erhöhung der lebendigen Kraft der Molekeln durch Wärmezufuhr kann die lebendige Kraft der Doppelmolekeln allmälig die Cohäsionskraft übersteigen, so dass ein Auseinanderfahren der verbundenen Molekel stattfindet.

P. ZECH.

Hilfstafeln für Messungen elektrischer Leitungswiderstände, von Dr. E. OBACH. München, 1879.

Der Verfasser hat in den Werkstätten von Siemens in Woolwich vielfach Materialien auf ihre elektrische Leitungsfähigkeit zu untersuchen. Die Kirchhoff-Wheatstone'sche Drahtcombination zu Widerstandsbestimmungen giebt eine Zahl a, deren Verhältniss zu $(1000-a)$ zu bestimmen ist. Die Werthe dieses Verhältnisses für die ganzen Zahlen von 0 bis 1000 als Werthe von a giebt die Tafel in fünfstelligen Logarithmen und fünfstelligen Zahlen, nebst ausgedehnten Nebentafeln für die Proportionaltheile. Eine doppelte Berechnung und die Controle der ersten Hälfte der Tafel durch die zweite garantiren ihre Richtigkeit. Jedem, der öfter mit solchen Widerstandsbestimmungen zu thun hat, wird die Tafel willkommen sein. Druck und Eintheilung der Zahlen (auf jeder Seite 25) sind schön und zweckmässig.

P. ZECH.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. März 1881.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Abth. II. 82. Bd. 3.—5. Heft. Wien, Gerold. 10 Mk. 40 Pf.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 9. Jahrg. 1. Heft. Berlin, Mittler & S. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Beobachtungen, magnetische und meteorologische, der königl. Sternwarte bei München. Jahrg. 1880. München, Franz. 1 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. WIEDEMANN. Jahrg. 1881 (12 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. 31 Mk.

——, Beiblätter. Jahrg. 1881 (12 Hefte). 1. Heft. Ebendas. pro compl. 16 Mk.

Annalen des kaiserl. russ. physikalischen Centralobservatoriums. Jahrg. 1879, Thl. 1 u. 2, herausgeg. v. H. WILD. Leipzig, Voss. 32 Mk.

Observations de Pulkowa, Vol. 11, red. p. O. STRUVE. Ebendas. 36 Mk.

Geschichte der Mathematik.

HAAS, A., Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmaasses. (Dissert.) Tübingen, Fues. 3 Mk.

Reine Mathematik.

JACOBI's, C. G. J., Gesammelte Werke. 1. Bd., herausgegeben von C. W. BORCHARDT. Berlin, G. Reimer. 18 Mk.

STEINER's, J., Gesammelte Werke. 1. Bd., herausgegeben v. K. WEIERSTRASS. Berlin, G. Reimer. 16 Mk.

HELMLING, P., Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $y' + y^2 = X$. Leipzig, Koch's Verl. 1 Mk. 60 Pf.

IGEL, B., Zur Theorie der Determinanten. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

SCHLÖMILCH, O., Compendium der höheren Analysis. 1. Bd. 5. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 9 Mk.

KÜHL, H., Grundriss der Arithmetik und Algebra. 2. Thl. Hamburg, Kriebel. 2 Mk. 25 Pf.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. 2. Aufl., bearb. v. Natani. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Schilling, C., Die Minimalflächen 5. Classe mit dem Stereoskopbild eines Modells derselben. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Heger, R., Die Construction einer Fläche II. Ordnung aus 9 gegebenen Punkten und verwandte Constructionen. Leipzig, Fues. 1 Mk 60 Pf.

Lauermann, C., Ueber die Normalen der Ellipse. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

Pelz, C., Ueber die Focalcurven von Quetelet. Ebendas. 80 Pf.

Röllner, F., Ueber Reflexe von Punkten auf Kreisen oder die Umkehrung des Normalenproblems. Ebendas. 25 Pf.

Weyr, E., Die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte. Ebendas. 20 Pf.

Vaneček, S., Raum-Epicycloiden. Ebendas. 40 Pf.

Gallenkamp, W., Synthetische Geometrie. 1. u. 2. Abthlg. Iserlohn, Bädeker. 2 Mk. 60 Pf.

Milinowski, A., Die Geometrie f. Gymnasien u. Realschulen. 1. Thl.: Planimetrie. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Helmes, J., Elementar-Mathematik. 3. Bd.: Ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 2 Mk. 40 Pf.

Steck, X., Sammlung von stereometrischen Aufgaben. Kempten, Kösel. 1 Mk. 70 Pf.

Angewandte Mathematik.

Reusch, E., Die stereographische Projection. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 50 Pf.

Weiler, A., Leitfaden der mathematischen Geographie. Ebendas. 1 Mk. 50 Pf.

Wittenbauer, F., Theorie der Beschleunigungscurven. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

Kobold, H., Allgemeine Methode zur Berechnung absoluter Störungen. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Küstner, F., Bestimmung des Monddurchmessers aus 9 Plejadenbedeckungen mit gleichzeitiger Ermittelung der Oerter des Mondes. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Hartwig, E., Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen am Strassburger Heliometer. Karlsruhe, Braun. 3 Mk. 50 Pf.

Oerter, mittlere und scheinbare, für das Jahr 1881 von 539 Sternen des Fundamentalkatalogs für die astronom. Gesellsch. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Röllinger, G., Leitfaden für den Unterricht in der Mechanik fester Körper. Augsburg, Kranzfelder. 70 Pf.

Volkmann, P., Ueber den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität. Königsberg, Lauden. 2 Mk.

Lamezan, G. v., Die Flächen kleinsten Widerstands und grössten Antriebs; berechnet und verwerthet für Vordertheil und Hintertheil von Schiffen. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 20 Pf.

Rolle, H., Ein Rotationsellipsoid soll so mit Masse belegt werden, dass die Wirkung auf innere Punkte nach Richtung und Stärke constant ist. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Schaper, W., Untersuchungen über die äcquipotentiale Vertheilung der magnetischen Fluida cylindrischer Stahlstäbe. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

Physik und Meteorologie.

Weinhold, A. F., Physikalische Demonstrationen. Anleit. z. Exper. 2. Lief. Leipzig, Quandt & Händel. 6 Mk. 50 Pf.

Grimm, Atlas der Astrophysik. 1. Lief. 13 Mondansichten in Lichtdruck nach photogr. Aufn. Lahr, Schauenburg. 12 Mk.

Puschl, C., Ueber die latente Wärme der Dämpfe. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie der elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction. II. (Akad.) Ebendas. 25 Pf.

Schuhmeister, J., Bestimmungen magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen. Ebendas. 40 Pf.

Berichtigung.

Im 2. Hefte dieses Jahrganges, und zwar in Nr. XIII der kleineren Mittheilungen, S. 136—143, ist durchgehends statt: „A. Voigt“ zu lesen: „H. Vogt“.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1880.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Déterminer une courbe telle, qui si l'on forme une de ses transformées par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné, les rayons de courbure en deux points correspondants soient dans un rapport donné. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 521. — Catalan ibid. 523.
2. Théorèmes sur les bissectrices d'un triangle et les plans bissecteurs d'un tétraèdre. Van Aubel N. corresp. math. VI, 83.
3. Trouver l'enveloppe de la circonférence circonscrite à un triangle variable qui reste semblable à lui même, et dont les côtés passent par trois points fixes. Neuberg N. corresp. math. VI, 65.
4. Sur une courbe du troisième degré. Van Aubel. N. corresp. math. VI, 56.
5. Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado. Geiser. Annali mat. Ser. 2, IX, 35.
6. Sur une courbe du quatrième degré. Lambiotte. N. corresp. math. VI, 91. — Fauquembergue ibid. 121
7. Courbe dont l'équation en coordonnées polaires est $\varrho = a(2 - \cos 2\Theta)\cos\Theta$. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 267.
8. Sur une famille de courbes cycloïdales. Dubois. N. corresp. math. VI, 158. — Ribaucour ibid. 224.
9. Die Polkreispaare einer Cycloide. Vietor. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 263.
10. Des courbes dont l'équation différentielle est $-\frac{x}{y} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}$. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 185.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Kugel 123. Parabel. Spirale.

Analytische Geometrie des Raumes.

11. Du trièdre trirectangle formé dans chaque point d'une courbe à double courbure par la tangente, la normale principale et la binormale. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 186.
12. Die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 95.
13. Application du théorème de Rolle à la théorie de l'osculation. Saltel. N. corresp. math. VI, 24.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2. Complanation. Crystallographie. Kugel. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

14. Propriétés des dénominateurs des nombres de Bernoulli. Radicke. N. corresp. math. VI, 68. — Hermite ibid. 121.
15. Sur les nombres de Bernoulli. Hermite. N. corresp. math. VI, 121.
16. Démonstration du théorème de Staudt et de Clausen. Radicke. N. corresp. math. VI, 503.
17. Démonstration d'un théorème de Stern. Radicke. N. corresp. math. VI, 507.

Bestimmte Integrale.

18. Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals $\int_0^1 (u)_n\,du$. E. Schroeder. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 106. — Schlömilch ibid. 117.

19. D'une identité tirée de l'intégration par parties de $\int_1^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x-1}}$. Mangon. N. corresp. math. VI, 420.

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi^{2n} + \cos\Theta^2 . \cos\varphi^{2n-2} + \ldots + \cos\Theta^{2n})\, d\Theta . d\varphi = \frac{\pi^2}{4}$. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 275.

Vergl. Complanation. Differentialquotient 43. Functionen 61, 62. Gammafunctionen. Quadratur. Rectification. Ultraelliptische Transcendenten.

Binomialcoefficienten.

21. Ueber die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhängen. E. Schröder. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 196.
22. $\binom{2n+1}{p-1} + \binom{2n+1}{2p-2} + \binom{2n+1}{3p-3} + \ldots \equiv 0 \pmod p$, p étant un nombre premier impair. Catalan. N. corresp. math. VI, 320.

Vergl. Determinanten 31.

C.

Complanation.

23. Aire de la partie d'un paraboloïde de rotation comprise dans l'intérieur d'un cylindre elliptique droit, dont la base se trouve sur le plan XY. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 137.

Crystallographie.

24. Ueber die Wahl der Projectionsaxen in einer Normalenprojection für triklinische Krystalle. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1879, 124.
25. Ueber Krystallberechnung im triklinischen System. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1879, 339.

Vergl. Oberflächen 144.

Cylinderfunctionen.

26. Ueber Schwingungen einer Saite, deren Spannung eine stetige Function der Zeit ist. Niemöller. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 44.
27. Zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrals der Bessel'schen Differentialgleichung. Niemöller. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 65.

D.

Determinanten.

28. Sur quelques propriétés des déterminants. Le Paige. N. corresp. math. VI, 490.
29. Sur une propriété des déterminants hémisymétriques d'ordre pair. Le Paige. N. corresp. math. VI, 155.
30. Valeur d'un déterminant persymétrique. Colart. N. corresp. math. VI, 231.
31. Valeur d'un déterminant dont les éléments sont des coefficients binomiaux. Colart. N. corresp. math. VI, 79.
32. Évaluation de certains déterminants. Le Paige. N. corresp. math. VI, 382.
33. Sur un déterminant somme des carrés de quatre déterminants. Jamet. N. corresp. math. VI, 92.

Differentialgleichungen.

34. Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali. Casorati. Annali mat. Ser. 2, IX, 41, 106.
35. Sur les équations différentielles du second ordre. Pepin. Annali mat. Ser. 2, IX, 1.
36. Ueber eine Classe von Differentialgleichungen, welche durch Abel'sche oder elliptische Functionen integrirbar sind. Fuchs. Annali mat. Ser. 2, IX, 25.
37. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, IX, 11.
38. Sur l'équation de Lamé. Hermite. Annali mat. Ser. 2, IX, 21.

39. Trouver l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2(y-y^3)=0$. Jamet. N. corresp. math. VI, 381. — Brocard ibid. 416. — Mansion ibid. 457. — Catalan ibid. 459.

40. Intégrer l'équation différentielle $a.\frac{ds}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}=1$. Catalan. N. corresp. math. VI, 139.

Differentialquotient.

41. Démonstration de l'équation $\frac{d^2u}{dx.dy}=\frac{d^2u}{dy.dx}$. Mansion. N. corresp. math. VI, 369.

42. Ueber algebraische Differentiale. Harnack. Annali mat. Ser. 2, IX, 302.

43. Soit $F(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ et $y=\frac{e^x-F(x)}{x^{n+1}}$, trouver $\frac{d^p y}{dx^p}$. Radicke. N. corresp. math. VI, 370.

Vergl. Functionen 54.

E.

Elektrodynamik.

44. Ueber die Einwirkung ruhender und rotirender Kugelflächen unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes. E. Lehmann. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 171, 244.

45. Deformation eines elastischen geknickten Stromleiters nnter Einwirkung des Erdmagnetismus. Niemöller. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 147.

46. Ueber elektrische Grenzschichten. Helmholtz. Berl. Akad.-Ber. 1879, 198.

47. Ueber eine Methode, die Intensität des horizontalen Theiles des Erdmagnetismus in absolutem Maasse nur mittels Schwingungsbeobachtungen zu bestimmen. Pfannstiel. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 271.

Ellipse.

48. Propriétés de l'ellipse. Neuberg. N. corresp. math. VI, 105.

49. Théorèmes sur les rayons vecteurs de l'ellipse. De Longchamps. N. corresp. math. VI, 222.

50. Sur les normales à l'ellipse. Neuberg. N. corresp. math. VI, 241, 289.

51. Sur une construction du centre de courbure de l'ellipse. Leinekugel. N. corresp. math. VI, 331, 332.

52. Problèmes sur l'ellipse qui roule, sans glisser, sur une horizontale fixe. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 325, 329.

Vergl. Maxima und Minima 128.

Ellipsoid.

Vergl. Hydrodynamik 103, 104. Maxima und Minima 128.

Elliptische Transcendenten.

Vergl. Differentialgleichungen 36. Gleichungen 93. Modulargleichung. Rectification.

Euler'sche Zahlen.

53. Théorème sur les nombres d'Euler. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 415, 448.

F.

Functionen.

54. Dérivées des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. Mansion. N. corresp. math. VI, 358, 385, 456. — Catalan ibid. 393.

55. Sur l'expression $\sum_{h_1}^{n}(x_h+y_h\sqrt{-1})^p$. Mangon. N. corresp. math. VI, 84.

56. Zur Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen. N. Herz. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 125.

57. Sopra un teorema della teorica dei funzioni. Tonelli. Annali mat. Ser. 2, IX, 173.

58. Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1879, 430.

59. $\frac{\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)^{4m\pm1}+\left(\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\right)^{4m\pm1}\mp2}{x\mp2}$ est le carré d'un polynôme entier. Jamet. N. corresp. math. VI, 421. — Piuma ibid. 469.

60. Sur le nombre des variations de signe dans la suite 1, $\cos x$, $\cos 2x$, ... $\cos(n-1)x$. Radicke. N. corresp. math. VI, 82.
61. Trouver la limite de $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 278. — Fauquembergue ibid. 280.
62. Démonstration de la formule de Stirling. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 354.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Binomialcoefficienten. Cylinderfunctionen. Determinanten. Euler'sche Zahlen. Gammafunctionen. Geschichte der Mathematik 88. Imaginäres. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunctionen.

63. Ueber den reciproken Werth der Gammafunction. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 103.
64. Ueber eine Verwandte der Gammafunction. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 335.
65. Ueber den Quotienten zweier Gammafunctionen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 351.

Vergl. Functionen 61, 62.

Geometrie (höhere).

66. Geometrische Untersuchungen. S. Kantor. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 54.
67. Ueber die Bestimmung der schiefen Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel in der Ebene. Consentius. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 122.
68. Théorèmes de géométrie projective. Cauret. N. corresp. math. VI, 181.
69. Théorie géométrique des courbes anallagmatiques. Laquière. N. corresp. math. VI, 351, 402, 433.
70. Ueber die Flächenräume und Bogenlängen, welche bei der Bewegung eines starren Systems von einer Geraden umschrieben werden. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 87.
71. Beziehung zwischen den Krümmungsradien collinearer Curven. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 214. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 70.]
72. Beziehung zwischen den Krümmungsradien reciproker, collinearer und inverser ebener Curven. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 300.
73. Figure inverse d'une développante du cercle. Neuberg. N. corresp. math. VI, 408.
74. Der kubische Kreis. Consentius. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 119.
75. Eine Construction von Curven dritter Ordnung aus conjugirten Punkten. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 100.
76. Sur un système de courbes du sixième ordre. Cremona. N. corresp. math. VI, 554

Geschichte der Mathematik.

77. Das Problema bovinum des Archimedes. Krumbiegel & Amthor. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. 121, 153.
78. Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. 41.
79. Mischnat hamidot herausgegeben und übersetzt von H. Schapira. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 1.
80. Prologus Ocreati in Helceph herausgegeben von C. Henry. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 129.
81. Die Uebersetzung des Euklid aus dem Arabischen durch Adelhard von Bath. Weissenborn. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 141.
82. Fortolfi Rythmimachia herausgegeben von R. Peiper. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 167.
83. Abraham ibn Esra. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 57.
84. Erklärung und Abwehr. Wohlwill. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. 80, 185.
85. Die Entdeckung der endlichen Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer. Wernicke. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. 1.
86. Nella solennità del centenario della nascita di Carlo Federico Gauss. Schering. Annali mat. Ser. 2, IX, 210.

87. Correspondence de Gauss avec Sophie Germain. Mansion. N. corresp. math. VI, 217, 315, 407.
88. Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Sachse. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. Supplem. 229.
89. Alexandre Popoff † 31 Décembre 1878. Wassilieff. N. corresp. math. VI, 169.
90. Bernhard Gugler † 12. März 1880. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XXV, hist.-lit. Abth. 198.

Vergl. Planimetrie 164. Zahlentheorie 213.

Gleichungen.

91. Vereinfachung des Abel'schen Beweises der Unmöglichkeit, Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1879, 205.
92. Ueber die Auflösbarkeit von Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1879, 211.
93. Ueber die Classe der Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1879, 220.
94. Ueber Hermite's Auflösung der Gleichung fünften Grades. Krey. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 129.
95. Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Kiepert. Annali mat. Ser. 2, IX, 119. — Brioschi ibid. 124.
96. On a problem in algebra. Malet. Annali mat. Ser. 2, IX, 306.
97. Sur un système d'équations linéaires. Catalan. N. corresp. math. VI, 30.
98. Extension du théorème de Descartes. E. Lucas. N. corresp. math. VI, 250.
99. De l'insuffisance de la méthode de Newton pour trouver le nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine d'une équation numérique. De Longchamps. N. corresp. math. VI, 38. — Lévy ibid. 173. — Letrait ibid. 174.

H.

Hydrodynamik.

100. Ueber Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten. Graetz. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 1.
101. Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren. Graetz. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 316, 375.
102. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. Kirchhoff. Berl. Akad. Ber. 1879, 395.
103. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der Satelliten der Erde und des Jupiter. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 72.
104. Ueber die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren und die Umdrehungsgeschwindigkeit einer homogenen flüssigen Masse bei gegebener Energie. Stier. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 405.

Hyperbel.

105. L'angle de deux hyperboles équilatères, concentriques, est double de l'angle de leurs asymptotes. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 286.
106. Hyperbole équilatère décrit par le centre de gravité d'une figure mobile. Maugon. N. corresp. math. VI, 86.
107. Hyperbole équilatère dont le centre est centre de gravité d'une figure donnée. Jamet. N. corresp. math. VI, 89.

I.

Imaginäres.

108. Sur le calcul avec des grandeurs imaginaires. Laisant. N. corresp. math. VI, 119.

Vergl. Functionen.

Integration (unbestimmte).

109. Sur l'intégrale $\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$. Catalan. N. corresp. math. VI, 151.

K.

Kegelschnitte.

110. Ueber eine eigenthümliche Deformation der Kegelschnitte. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 25.

111. Des coniques satisfaisant à quatre conditions. Catalan. N. corresp. math. VI, 201.
112. Trouver les axes d'une conique inscrite (circonscrite) à un triangle donné et ayant son pôle en un point donné. Neuberg. N. corresp. math. VI, 51.
113. Ueber das Pascal'sche Sechseck. Gräfe. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 215.
114. Propriété des coniques domnant lieu à l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}=\frac{y(2x-\delta)}{2x(x-\delta)}$. Leinekugel. N. corresp. math. VI, 233. — Jamet ibid. 269.
115. Conique enveloppe de coniques ayant un foyer commun, un point commun et un axe focal de grandeur constante. Jamet. N. corresp. math. VI, 133.
116. Conique enveloppée par la droite qui joint les extremités de deux rayons de circonférences données, ces rayons faisant entre eux un angle donné. Neuberg. N. corresp. math. VI, 463, 514.
117. Propriétés des circonférences passant par deux points donnés d'une conique. Jamet. N. corresp. math. VI, 48. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 110.]
118. Théorèmes sur les coniques. Carnoy. N. corresp. math. VI, 448.

Vergl. Ellipse. Geschichte der Mathematik 78. Hyperbel. Kreis. Maxima und Minima 129. Mechanik 138. Parabel.

Kreis.

119. Des sommets d'un triangle donné comme centre on décrit 3 circonférences, qui se touchent deux à deux, extérieurement; on demande les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières. Lemoine. N. corresp. math. VI, 513. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 525.]
120. Sur un polygone fermé inscrit dans un cercle. Leinekugel. N. corresp. math. VI, 236.
121. Propriété du triangle inscrit. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 524.
122. Rayon de cercles mutuellement tangents et remplissants à des lacunes près un cercle donné. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 134.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 3. Kegelschnitte 116, 117.

Krümmung.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 1. Ellipse 51. Geometrie (höhere) 71, 72.

Kugel.

123. Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères. Ribaucour. N. corresp. math. VI, 1. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 115, 125.]
124. Sur le nombre des sphères qui touchent quatre plans donnés. Neuberg. N. corresp. math. VI, 8.
125. Ueber die Aehnlichkeitspunkte einer Dupin'schen Kugelschaar. Kröber. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 279.

Vergl. Maxima und Minima 127.

M.

Maxima und Minima.

126. Une question de maximum traitée par Poncelet. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 548.
127. Ein sphärisches Dreieck grössten Inhalts zu finden, dessen Grundlinie gegeben ist, und dessen Spitze sich auf einem gleichfalls gegebenen grössten Kugelkreise befinden soll. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 41.
128. Die einem Dreieck umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts und das einem Tetraeder umschriebene Ellipsoid kleinsten Volumens. Börsch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 59.
129. Segment de conique d'aire minimum. Catalan. N. corresp. math. VI, 464.
130. Sur les formes approchées des solides d'égale résistance. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 502.

Vergl. Geometrie (höhere) 70. Oberflächen 145.

Mechanik.

131. Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 217.
132. Du déplacement d'un quadrilatère articulé. Dubois. N. corresp. math. VI, 124, 125, 128. — Laquière ibid. 372, 378, 496, 543.
133. Correcturformel für das logarithmische Decrement. W. Braun. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 342.

134. Das Kreuzpendel und das Pendelkreuz, Apparate zur graphischen Darstellung der Schwingungscurven. Schönemann. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 410.
135. Ueber die unendlich kleinen Schwingungen, welche ein Faden, der an dem einen Endpunkte befestigt und an dem andern durch ein Gewicht belastet ist, unter dem Einflusse der Schwere und einer anfänglichen Gleichgewichtsstörung ausführt. Henneberg. Annali mat. Ser. 2, IX, 58.
136. Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äusseren Kräften. Henneberg. Annali mat. Ser. 2, IX, 193.
137. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1879, 815.
138. Deux poids sont fixés à un même fil passant par les foyers d'une conique. Un point du fil parcourt la conique. Déterminer les positions d'équilibre du système. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 79.

Vergl. Cylinderfunctionen 26. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Hyperbel 106, 107. Maxima und Minima 130. Molecularphysik. Optik. Schwerpunkt.

Modulargleichungen.

139. Sopra una classe di equazioni modulari. Brioschi. Annali mat. Ser 2, IX, 167.

Molecularphysik.

140. Grundzüge der mathematischen Chemie. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 353.

O.

Oberflächen.

141. Sur les surfaces à génératrice circulaire. Desmartres. N. corresp. math. VI, 193, 300, 337.
142. Sur la cyclide. Catalan. N. corresp. math. VI, 439.
143. Ueber einige Eigenschaften des Cylindroids. Goebel. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 281.
144. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 207, 346. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 148.]
145. Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen. Henneberg. Annali mat. Ser. 2, IX, 54.
146. Sur les lignes singulières des surfaces algébriques. Halphen. Annali mat. Ser. 2, IX, 68.
147. Des lignes géodésiques d'une surface de révolution. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 556. — Catalan ibid. 558.
148. Lieu géométrique du point jouissant de la propriété que des trois perpendiculaires menées à partir de lui sur les côtés d'un triangle donné il y en ait toujours une moyenne proportionelle entre les deux autres. Dubois. N. corresp. math. VI, 176.

Oberflächen zweiter Ordnung.

149. Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 98.
150. Die Malfatti'sche Aufgabe auf der Oberfläche zweiten Grades. Mertens. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 156.
151. Sur une propriété des surfaces du second degré. Catalan. N. corresp. math. VI, 489.
152. Ueber die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiten Grades, welche ein windschiefes Vierseit gemein haben. Schur. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 414.

Vergl. Kugel.

Optik.

153. Système de 3 prismes rendant nulle la déviation d'un rayon passant par tous les trois. Postula. N. corresp. math. VI, 229.
154. Theorie der absorbirenden anisotropen Mittel. Ketteler. Berl. Akad.-Ber. 1879, 879.
155. Sur le théorème des faisceaux. Dubois. N. corresp. math. VI, 114.

Vergl. Geschichte der Mathematik 85.

P.

Parabel.

156. Problème sur une parabole qui roule, sans glisser, sur une droite fixe. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 327.
157. Parabole qui rencontre une droite donnée dans un point donné et sous des angles donnés. Leinekugel. N. corresp. math. VI, 234.

Paraboloid.

Vergl. Complanation.

Planimetrie.

158. De la géométrie de la règle. De Coatpont. N. corresp. math. VI, 34. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 168.]
159. Exercices de mathématiques élémentaires. Neuberg. N. corresp. math. VI, 165, 215, 364. — Lemoine ibid. 509.
160. Théorème de planimétrie. Neuberg. N. corresp. math. VI, 35.
161. Propriétés du triangle. Brocard. N. corresp. math. VI, 19, 97. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 159.]
162. Propriété d'une série de triangles. Brocard. N. corresp. math. VI, 145.
163. Dans tout triangle le produit des rapports de chaque côté à la somme des deux autres ne surpasse pas $\frac{1}{8}$. Fauquembergue. N. corresp. math. VI, 140.
164. Si un triangle inscrit à un triangle fixe se meut en restant semblable à lui même, un point quelconque de son plan décrit une droite. Neuberg. N. corresp. math. VI, 72, 219. — Catalan ibid. 172. — Laquière ibid. 321.
165. Triangles équivalents inscrit à un triangle donné. Neuberg. N. corresp. math. VI, 472. — Jamet ibid. 518.
166. Théorème sur deux triangles à côtés parallèles. Barzin. N. corresp. math. VI, 277.
167. Aire du triangle formé par les pieds des trois bissectrices d'un triangle. Jacquillot. N. corresp. math. VI, 186.
168. Théorème sur le quadrilatère. Lemoine. N. corresp. math. VI, 562.
169. Relation entre l'aire d'un quadrilatère, les 4 côtés et la droite qui joint les milieux des diagonales. Neuberg. N. corresp. math. VI, 52. — Gelin ibid. 228.

Q.

Quadratur.

170. Sur la quadrature des courbes paraboliques. Catalan. N. corresp. math. VI, 396.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 6. Maxima und Minima 128, 129.

R.

Rectification.

171. Ueber eine Art Curven, deren Bogen durch ein elliptisches oder hyperelliptisches Integral erster Gattung ausgedrückt wird. Schwering. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 234.

Reihen.

172. Sur la série harmonique. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 312.
173. Sur la série de Lambert. Catalan. N. corresp. math. VI, 253.
174. De la série de Lamé. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 423.
175. Sur l'identité $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$. Laisant. N. corresp. math. VI, 109. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 232.]
176. Somme de la série
$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2+1^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2}-\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2}-\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2}+\ldots$$
Mangon. N. corresp. math. VI, 418.
177. Théorème sur la somme des puissances p des n premiers nombres. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 82.

178. Formule dans laquelle entrent les sommes des puissances des n premiers nombres. Catalan. N. corresp. math. VI, 474.
179. Sur deux sommes égales de carrés consécutifs. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 232.
180. Signe du $n^{ième}$ terme dans le développement du produit $(1-a)(1-b)(1-c)\ldots$ E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 276.
181. Coefficient de α^p dans le développement de $\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$. Radicke. N. corresp. math. VI, 281. — Leinekugel ibid. 283. — Catalan ibid. 285.
182. Quelques formules. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 450.
183. Sur quelques développements de $\cos mx$ et de $\sin mx$. Catalan. N. corresp. math. VI, 100. — Baehr ibid. 225.
Vergl. Geschichte der Mathematik 88. Taylor's Reihe.

S.

Schwerpunkt.

184. Le centre de gravité des points finaux de forces en équilibre coïncide avec celui des points d'application. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 236.
Vergl. Hyperbel 106, 147.

Spiralen.

185. Trajectoires orthogonales de spirales logarithmiques menées à partir d'un point fixe et ayant toutes même pôle. Jamet. N. corresp. math. VI, 130. — Fauquembergue ibid. 131.
186. Trois arcs de spirales logarithmiques se coupant en un même point. G. & E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 87.

Stereometrie.

187. Sur l'existence de certains polyèdres. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 118.
Vergl. Tetraeder.

T.

Taylor's Reihe.

188. Ueber den verallgemeinerten Taylor'schen Satz. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 48.

Tetraeder.

189. Des 48 cubes inscrits et exinscrits dans un tétraèdre ayant toutes ses arêtes inégales. Dubois. N. corresp. math. VI, 122.
190. Théorème sur les plans bissecteurs d'un tétraèdre. Jamet. N. corresp. math. VI, 90.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2.

Thetafunctionen.

191. Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen. H. Weber. Annali mat. Ser. 2, IX, 126.
192. Convergenz der Thetareihen. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 43.

Trigonometrie.

193. Valeurs des angles x et y qui satisfont aux relations $(2+\cos 2x+\sin 2x)\sin 2y+(\cos x+\sin x)\cos 2y=0$ et $2(\cos 2x-\sin 2x)\sin y+(\cos x-\sin x)\cos y=0$. Catalan. N. corresp. math. VI, 561.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

194. Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung. Christoffel. Annali mat. Ser. 2, IX, 240.
Vergl. Differentialgleichungen 36. Rectification.

Unendlich.

Vergl. Bestimmte Integrale 18.

W.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

195. Sur quelques difficultés de la théorie des erreurs. De Tilly. N. corresp. math. VI, 413.
196. Problèmes de probabilité géométrique. E. Cesaro. N corresp. math. VI, 74.

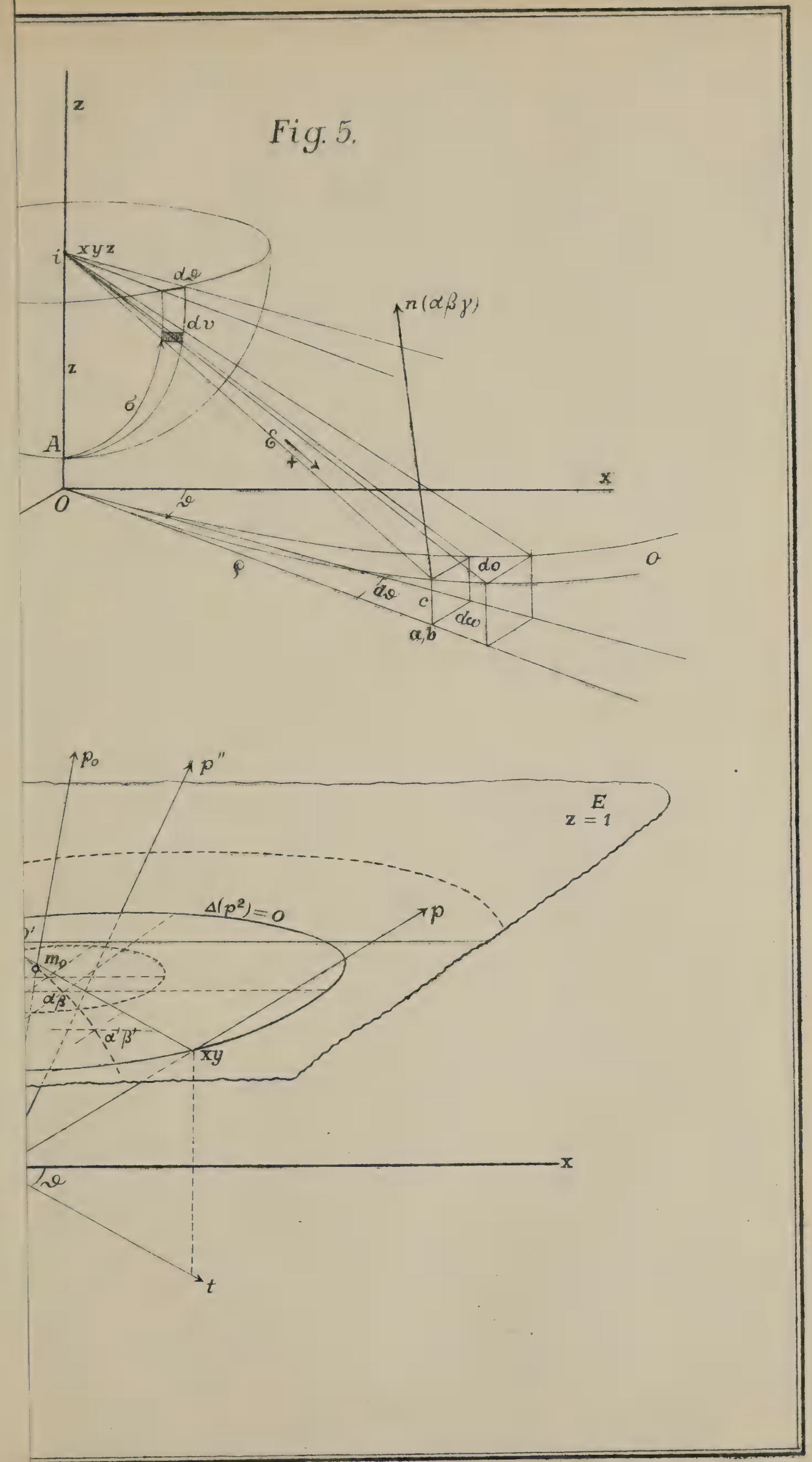
197. Zur mathematischen Statistik. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 11.
198. Théorème relativ à la règle des moindres carrés. De Tilly. N. corresp. math. VI, 410.

Z.

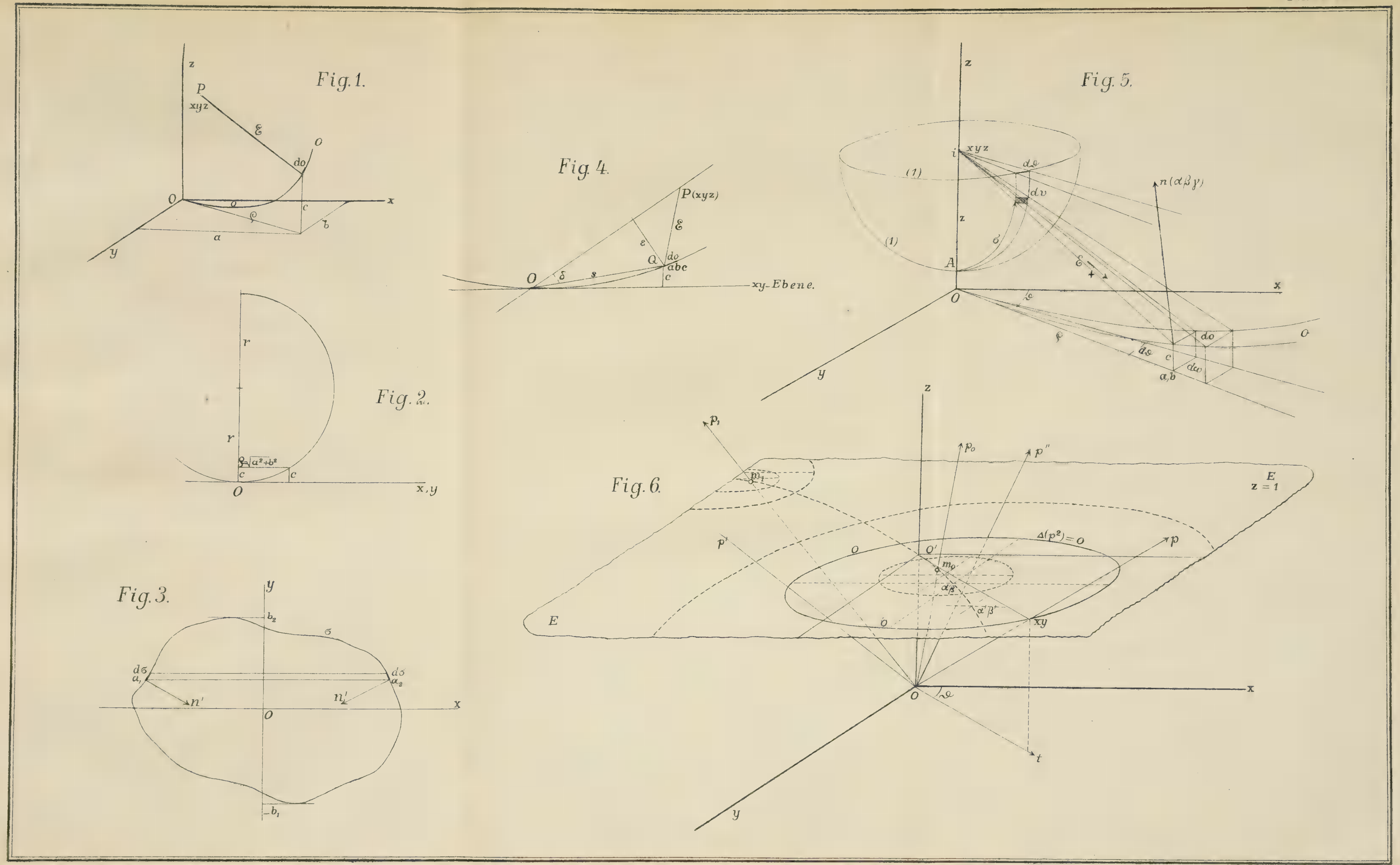
Zahlentheorie.

199. Sur les nombres premiers. Le Lasseur. N. corresp. math. VI, 36, 121, 367. — Brocard ibid. 170, 366, 415.
200. Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers. Brocard. N. corresp. math. VI, 255, 481, 529.
201. $1.2.3\ldots(n-2)\equiv 0 \pmod n$ toutes les fois que n est un nombre non premier >4. Catalan. N. corresp. math. VI, 555.
202. Décomposition de $2^{64}+1$ et d'autres nombres. Landry. N. corresp. math. VI, 417. — Le Lasseur ibid. 417.
203. Des fonctions numériques $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. Radicke. N. corresp. math. VI, 267.
204. Sur la somme des diviseurs de n. Radicke. N. corresp. math. VI, 280.
205. Théorèmes sur les diviseurs des nombres comptés en moyenne. Berger. N. corresp. math. VI, 551.
206. Des nombres défaillants et abondants. Le Lasseur. N. corresp. math. VI, 175.
207. Sur la disposition en triangle équilatéral des 9 premiers nombres. P. S. N. corresp. math. VI, 317. — E. Cesaro ibid. 415. [Vergl. Bd. XXIV, Nr. 215.]
208. Ueber gewisse periodische Decimalbrüche. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXV, 416.
209. Étant donnés les n derniers chiffres d'un nombre carré parfait, trouver les n derniers chiffres de la racine. Gelin. N. corresp. math. VI, 43.
210. Chiffre final du nombre qui exprime la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances de 10 nombres entiers consécutifs. Jamet. N. corresp. math. VI, 519.
211. Si S_n est égal à la somme des restes du nombre entier n, divisé par chacun des nombres naturels qui le précèdent on a $S_{2k-1}=S_{2k}$. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 77.
212. Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell. Realis. N. corresp. math. VI, 306, 342.
213. Sur quelques équations indéterminées du second degré. Genocchi. N. corresp. math. VI, 39.
214. Sur l'équation $y^2-ax^2=bz$. Realis. N. corresp. math. VI, 111.
215. De l'équation $x^2+y^2-nz^2=1$ dans laquelle n est de la forme p^2+1. Realis. N. corresp. math. VI, 446.
216. De l'équation $v^2-v(x+y+z)+yz+zx+xy=2s^2$. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 273.
217. Entre $10^{n-2}-1$ et 10^n-1 il y a une ou deux valeurs de x, qui rendent $4.10^n.x+1$ carré parfait. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 44.
218. Le quotient $\dfrac{1^5-3^5+5^5-7^5-\ldots-(4x-1)^5}{1-3+5-7+\ldots-(4x-1)}$ est toujours un carré parfait, mais n'est jamais un bicarré. E. Cesaro. N. corresp. math. VI, 467. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 243.]
219. Sur l'équation $X^4+Y^4=Z^4+T^4$. Desboves. N. corresp. math. VI, 32. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 249.]
220. Théorème empirique sur la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres. Catalan. N. corresp. math. VI, 552.

Vergl. Geschichte der Mathematik 77, 87, Reihen.



Fliegel & Sandmann, Dresden.



Fliegel & Sandmann, Dresden.

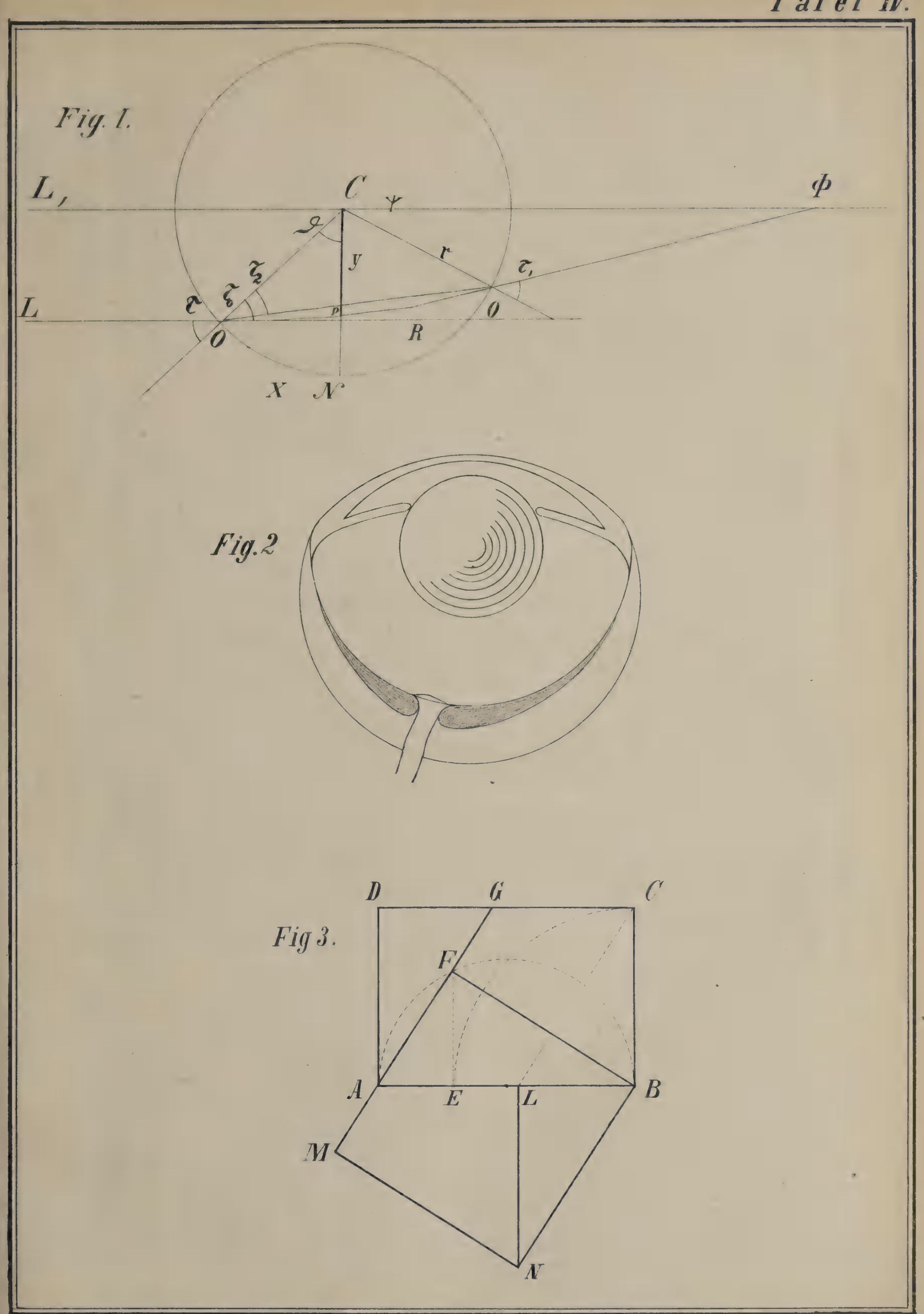
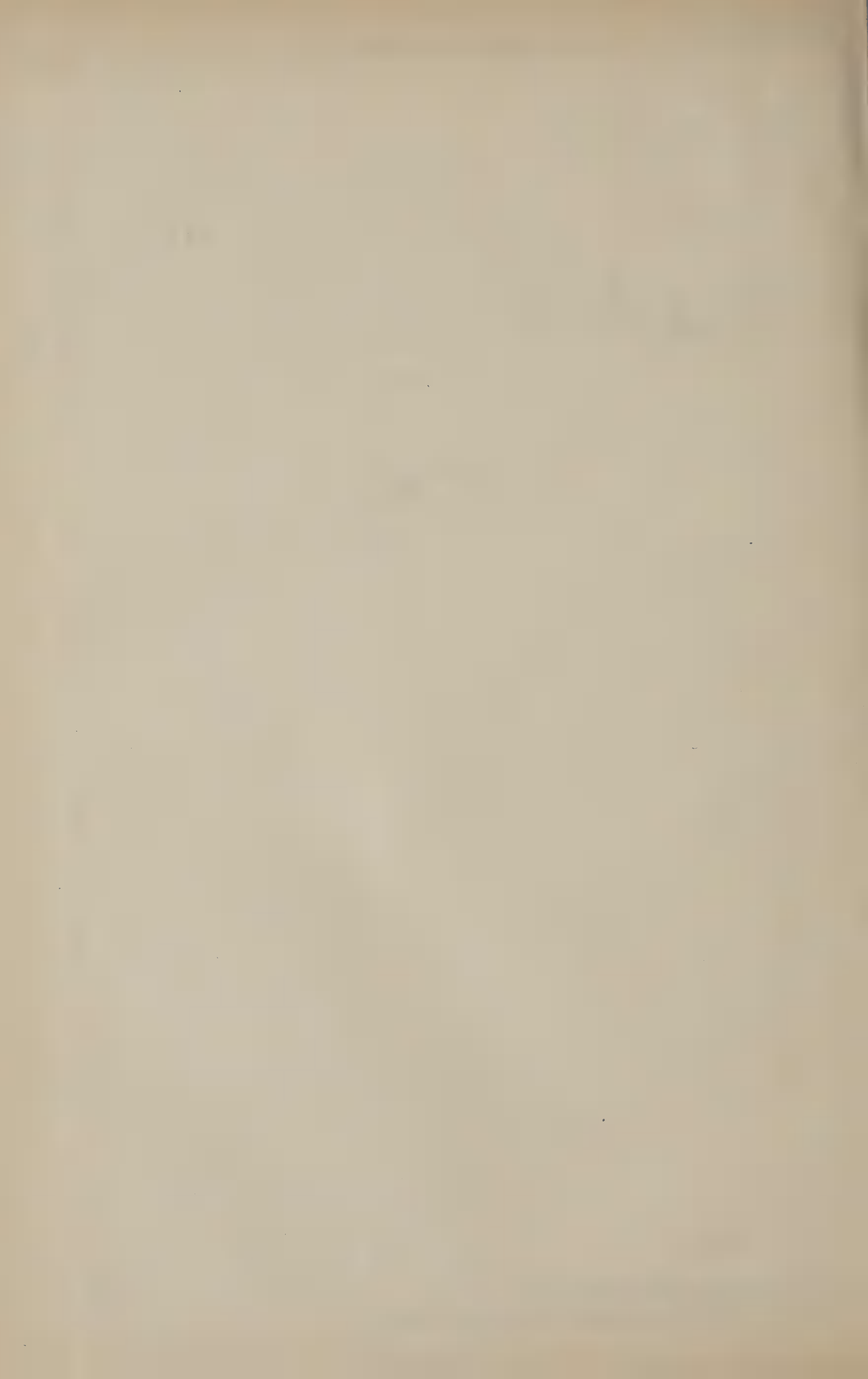


Fig. 1.
L,
C
Ψ
Φ
y
r
L
O
R
X
N
Fig. 2
Fig 3.
D
G
C
F
A
E
L
B
M
N



Historisch-literarische Abtheilung.

Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln.

Von

HEILERMANN

in Essen.

In der jüngst erschienenen Geschichte der Mathematik von Cantor wird auf S. 369 der Zusammenhang angedeutet, welcher zwischen den von Archimed berechneten Näherungswerthen für irrationale Quadratwurzeln und einem von Theon von Smyrna überlieferten Satze über Seiten- und Durchmesserzahlen besteht. Den zahlreichen Lesern jenes wichtigen Werkes werden hoffentlich die folgenden Bemerkungen willkommen sein.

Theon bildet die erste Seitenzahl, indem er zwei Einheiten summirt, und die erste Durchmesserzahl, indem er die eine verdoppelt und dann zur andern addirt. Aus den so entstandenen Zahlen werden dann nach derselben Regel die folgenden Seiten- und Durchmesserzahlen abgeleitet. Wählen wir statt der Einheiten die beliebigen Grössen S und D, statt des Factors 2 das allgemeine Zeichen a, welches wir Grundfactor der entstehenden Zahlen nennen wollen, so erhalten wir nach Theon's Vorschrift folgende doppelte Kette von Werthen:

$$\begin{aligned} S_1 &= S + D, & D_1 &= aS + D, \\ S_2 &= S_1 + D_1, & D_2 &= aS_1 + D_1, \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ S_n &= S_{n-1} + D_{n-1}, & D_n &= aS_{n-1} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Hiernach ist

$$\begin{aligned} aS^2_n &= a\,S^2_{n-1} + 2aS_{n-1}D_{n-1} + aD^2_{n-1}, \\ D^2_n &= a^2S^2_{n-1} + 2aS_{n-1}D_{n-1} + D^2_{n-1}; \end{aligned}$$

daraus folgt zunächst

$$1)\qquad D^2_n - aS^2_n = (1-a)(D^2_{n-1} - aS^2_{n-1}),$$

und die wiederholte Anwendung dieser Gleichung lehrt, dass allgemein

$$2)\qquad D^2_n - aS^2_n = (1-a)^n \cdot (D^2 - aS^2).$$

Wenn insbesondere $D=1$, $S=1$ gewählt wird, so ist

2*) $$D^2_n - a S^2_n = (1-a)^{n+1},$$

d. h.: das a-fache Quadrat einer Seitenzahl, welche aus zwei Einheiten gebildet ist, unterscheidet sich von dem Quadrate der zugehörigen Durchmesserzahl nur um eine Potenz des um 1 verminderten Grundfactors.

Setzt man hier noch $a=2$, so ergiebt sich als einzelner Fall der von Theon überlieferte Satz:

$$D^2_n - 2 S^2_n = (-1)^{n+1}.$$

Nesselmann (Algebra der Griechen) hat gezeigt, dass der Satz selbst in dieser Beschränkung für zahlentheoretische Untersuchungen Bedeutung hat. Ob er von den griechischen Mathematikern in ähnlicher Weise wie oben hergeleitet ward, muss wohl unentschieden bleiben, da Theon ihn ohne Beweis anführt.

Wenn man die Gleichung 2) durch S^2_n dividirt, so entsteht

3) $$\frac{D^2_n}{S^2_n} = a + (1-a)^n \cdot \frac{D^2 - a S^2}{S^2_n}$$

und für den Fall, dass $D = S = 1$ gesetzt wird,

3*) $$\frac{D^2_n}{S^2_n} = a + \frac{(1-a)^{n+1}}{S^2_n}.$$

Wenn hier die Zahlen a, D, S kleine Werthe haben, so wird das zweite Glied rechts mit wachsendem Zeiger n wegen des zunehmenden Divisors S^2_n immer kleiner. Daher wird durch diese Gleichung die beliebige Zahl a annähernd in das Quadrat $\frac{D^2_n}{S^2_n}$ verwandelt oder $\frac{D_n}{S_n}$ als Näherungswerth von $\sqrt{a}$ gefunden. Wenn dazu $a > 1$ ist, so haben diese Werthe auch noch die wichtige Eigenschaft, dass sie abwechselnd zu gross und zu klein sind, also die gesuchte Grösse $\sqrt{a}$ in immer engere Grenzen einschliessen.

§ 2. Setzt man insbesondere $a=2$, $D=1$, $S=1$, so erhält man aus 3) für $\sqrt{2}$ die Näherungswerthe

$$\tfrac{3}{2},\ \tfrac{7}{5},\ \tfrac{17}{12},\ \tfrac{41}{29},\ \tfrac{99}{70},\ \tfrac{239}{169} \text{ u. s. w.}$$

Von diesen war $\frac{7}{5}$ schon seit Platon gebräuchlich.

Wählt man dagegen $a=3$, $D=2$, $S=1$, so entstehen für $\sqrt{3}$ die Näherungswerthe

$$\tfrac{5}{3},\ \tfrac{7}{4},\ \tfrac{19}{11},\ \tfrac{26}{15},\ \tfrac{71}{41},\ \tfrac{97}{56},\ \tfrac{265}{153},\ \tfrac{362}{209},\ \tfrac{989}{571},\ \tfrac{1351}{780} \text{ u. s. w.}$$

Archimed führt von diesen $\frac{265}{153}$ und $\frac{1351}{780}$ an, während bei Theon von Alexandrien und den Späteren besonders $\frac{26}{15}$ gebräuchlich ist.

Archimed setzt nämlich

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

während man nach dem Vorstehenden erwarten sollte

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{989}{571};$$

und daraus glaube ich schliessen zu dürfen, dass die Archimedischen Näherungswerthe nicht wie vorstehend berechnet worden sind. Wählt man aber $a = \frac{27}{25}$, $S = 1$, $D = 1$, so erhält man für $\sqrt{a} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$ die Näherungswerthe

$$\frac{26}{25}, \quad \frac{53}{51}, \quad \frac{1351}{1300},$$

also für $\sqrt{3}$ die Werthe $\frac{26}{15}$, $\frac{265}{153}$, $\frac{1351}{780}$; und das sind gerade diejenigen, welche bei Archimed und Heron vorkommen.

Bei Gerbert (s. Cantor, Geschichte, S. 745) findet sich auffälliger Weise ausser dem Näherungswerthe $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ auch noch $\frac{12}{7}$, und dieser fehlt unter den oben berechneten. Setzt man aber nach Obigem $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$, so ist $\frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{7}{12}$ oder $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$.

§ 3. Schon bei der angenäherten Berechnung von $\sqrt{3}$ haben wir gefunden, dass es zweckmässig ist, in die obigen Entwickelungen nicht unmittelbar $a = 3$ zu setzen. Dieselben Gründe walten in noch stärkerem Grade ob, wenn die Quadratwurzel aus einer grössern Zahl angenähert berechnet werden soll. Setzt man aber

$$a = \frac{b^2 + c}{b^2}$$

und wählt hier b so, dass

$$b^2 + c < (b+1)^2,$$

so ist

$$a = \frac{b^2 + c}{b^2} < \frac{(b+1)^2}{b^2},$$

also $a - 1$ eine kleine positive Zahl, und daher liefert die Gleichung 3) für $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b^2 + c}}{b}$, also auch für $\sqrt{b^2 + c}$ rasch convergirende Näherungswerthe. Setzt man dazu in obigen Gleichungen $S = 1$, $D = 1$, $a = \frac{b^2 + c}{b^2}$, so erhält man

$$S_1 = 2, \qquad D_1 = 2 + \frac{c}{b^2},$$

$$S_2 = 4 + \frac{c}{b^2}, \quad D_2 = 4 + \frac{3c}{b^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Daraus entstehen für $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c}$ die Näherungswerthe

$$\frac{bD_1}{S_1} = b + \frac{c}{2b}, \quad \frac{bD_2}{S_2} = b + \frac{2bc}{4b^2 + c} \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen hiernach die Quadratwurzeln berechnen, welche bei Archimed vorkommen. Setzt man $a = \frac{349450}{591^2}$, $b = 591$, $c = 169$, so erhält man

$$\frac{bD_1}{S_1} = 591\tfrac{169}{1182} > \sqrt{349450}, \quad \frac{bD_2}{S_2} = 591\tfrac{199758}{1397293} < \sqrt{349450};$$

und hiermit stimmt der Archimedische Werth überein, nur steht statt der unteren Grenze $591\frac{1}{8}$, obwohl sie etwas grösser als $591\frac{1}{7}$ ist. Eine ähnliche Abweichung von der Genauigkeit, welche diese Rechnung zulässt, ist bei den Wurzelwerthen

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} > 1172\tfrac{1}{7}, \quad \sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} > 2339\tfrac{1}{2},$$

für welche Archimed als untere Grenze $1172\frac{1}{8}$ und $2339\frac{1}{4}$ angiebt, nachgewiesen worden. Wenn man jedoch, um die Rechnung zu erleichtern, statt der untern Grenze

$$\frac{b\,D_2}{S_2} = b + \frac{2bc}{4b^2+c} = b + \frac{2bc}{4(b^2+c)-3c}$$

die etwas kleinere

$$\frac{b\,D'_2}{S_2} = b + \frac{bc}{2(b+c)}$$

wählt, so wird, wie bei Archimed, $591\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$ gefunden, und es bleibt nur der abweichende Werth $1172\frac{1}{7}$ bestehen.

§ 4. Für $\sqrt{b^2+c}$ erhielten wir oben den Näherungswerth

$$\frac{b\,D_2}{S_2} = b + \frac{2bc}{4b^2+c} = b + \frac{c}{2b+\frac{c}{2b}}.$$

Im 13. Jahrhundert unterschied Ibn Albanna bei der Berechnung von $\sqrt{b^2+c}$ zwei Fälle, je nachdem $c \leqq b$ oder $c > b$ gegeben war, und setzte im ersten Falle

$$\sqrt{b^2+c} = b + \frac{c}{2b},$$

im letzteren

$$\sqrt{b^2+c} = b + \frac{c}{2b+1}.$$

Durch diese Beobachtung wird man zu der Ansicht genöthigt, dass dieser Unterscheidung der obige Näherungswerth zu Grunde liegt und die Kenntniss, dass der zweite Theilnenner ($2b$) vergrössert werden müsste, um den genauen Wurzelwerth zu geben.

In dem Commentar zu dem Werke des Ibn Albanna, welcher im im 15. Jahrhundert von Alkalsadi verfasst ward, sind dieselben Fälle unterschieden: im ersten Falle, wenn $c \leqq b$ ist, setzt auch er

$$\sqrt{b^2+c} = b + \frac{c}{2b},$$

im andern, wenn $c > b$, wählt er dagegen

$$\sqrt{b^2+c} = b + \frac{c+1}{2b+2}.$$

Zu diesem Werthe gelangt man, wenn für

$$\sqrt{b^2+c} = \sqrt{(b+1)^2-(2b+1-c)}$$

nach dem Obigen die erste Annäherung

$$b+1-\frac{2b+1-c}{2(b+1)}=b+\frac{c+1}{2b+2}$$

gesetzt wird.

Ausserdem sagt Alkalsadi, es könne in beiden Fällen die Wurzel nach der Gleichung

$$\sqrt{b^2+c}=b+\frac{c}{2b}-\frac{\left(\frac{c}{2b}\right)^2}{2\left(b+\frac{c}{2b}\right)},$$

und das ist wieder der erste Näherungswerth, wenn man die Gleichung

$$\sqrt{b^2+c}=\sqrt{\left(b+\frac{c}{2b}\right)^2-\left(\frac{c}{2b}\right)^2}$$

zu Grunde legt.

§ 5. Die Eigenschaften, welche die obigen Werthe auszeichnen, machen es für sich allein fast zur Gewissheit, dass sie auch durch Kettenbrüche dargestellt werden können. In der That ist

$$\frac{D_n}{S_n}=\frac{a S_{n-1}+D_{n-1}}{S_{n-1}+D_{n-1}}=1+\frac{(a-1)S_{n-1}}{S_{n-1}+D_{n-1}},$$

also

$$\frac{D_n}{S_n}=1+\frac{a-1}{1+\frac{D_{n-1}}{S_{n-1}}};$$

und durch die wiederholte Anwendung dieser Gleichung entsteht der Kettenbruch aus $(n+1)$ Theilbrüchen

$$\text{4)}\qquad \frac{D_n}{S_n}=1+\cfrac{a-1}{2+\cfrac{a-1}{2+\cfrac{a-1}{2+\ddots+\cfrac{a-1}{1+\frac{D}{S}}}}}.$$

Setzt man noch $a=\frac{b^2+c}{b^2}$, so erhält man den bekannten Kettenbruch für $\sqrt{b^2+c}$ oder vielmehr den n^{ten} Näherungswerth

$$\frac{bD_n}{S_n}=b+\cfrac{c}{2b+\cfrac{c}{2b+\ddots+\cfrac{c}{b+\frac{bD}{S}}}}.$$

§ 6. Durch diese Entwickelung gewinnt die Ansicht*, dass die Alten sich eines rechnerischen Verfahrens bedienten, dessen Eigenthümlichkeiten

* Günther, Antike Näherungswerthe. Prag 1878.

mit denen der Kettenbruchentwickelung übereinstimmten, sehr an Wahrscheinlichkeit. Zu Gunsten derselben Ansicht möchte ich noch Folgendes anfügen.

Wenn das Dreieck ABC gleichschenklig und bei C rechtwinklig ist, so ist

$$AB - BC = \frac{BC^2}{2BC + (AB - BC)}.$$

Lässt man hier, um die linke Seite annähernd zu bestimmen, das zweite Glied des Nenners ausser Acht, so erhält man als ersten Näherungswerth von $AB - BC$ die Grösse $\frac{1}{2}BC$; setzt man diesen in den Nenner statt der eben vernachlässigten Differenz, so ergiebt sich $\frac{2}{5}BC$ als zweiter Näherungswerth von $AB - BC$. Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet man $\frac{5}{12}BC$, $\frac{12}{29}BC$ u. s. w. Wird dann noch BC addirt, so entstehen die obigen Werthe für $\sqrt{2}$ oder für $AB = BC\sqrt{2}$.

Wenn zweitens das Dreieck ABC bei C rechtwinklig und $AB^2 = 3BC^2$, also $CA^2 = 2BC^2$ ist, so ist die Hypotenuse desselben wenig grösser, als die des im Alterthum so viel gebrauchten rechtwinkligen Dreiecks A_1BC, dessen Seiten BC, CA_1, A_1B in dem Verhältnisse $3:4:5$ stehen. Daher liegt es nahe, die Hypotenuse AB mit $\frac{5}{3}BC$ zu vergleichen. Nun ist

$$AB^2 = 3BC^2,$$

also

$$AB^2 - \frac{25}{9}BC^2 = \frac{2}{9}BC^2,$$

und daher

$$AB - \frac{5}{3}BC = \frac{\frac{2}{9}BC^2}{\frac{10}{3}BC + (AB - \frac{5}{3}BC)}.$$

Wenn man hier zuerst im Nenner rechts die eingeklammerte Differenz vernachlässigt, so entsteht für $AB - \frac{5}{3}BC$ der erste Näherungswerth $\frac{1}{15}BC$; setzt man aber diesen statt des eben vernachlässigten Gliedes, so erhält man $\frac{10}{153}BC$, und wenn dieser in den Nenner an die Stelle von $AB - \frac{5}{3}BC$ gesetzt wird, so ergiebt sich $\frac{17}{260}BC$. Wird dann noch $\frac{5}{3}BC$ addirt, so erhält man für $AB = BC\sqrt{3}$ die bekannten Werthe $\frac{26}{15}BC$, $\frac{265}{153}BC$ und $\frac{1351}{780}BC$.

Ebenso entstehen aus der allgemeinen Gleichung

$$x^2 = b^2 + c \quad \text{oder} \quad x - b = \frac{c}{2b + (x - b)}$$

die obigen Werthe und mit diesen der Kettenbruch für $\sqrt{b^2 + c}$.

Essen, den 2. Februar 1881.

Recensionen.

Neuere Apparate für naturwissenschaftliche Schule und Forschung von M. Th. Edelmann. Stuttgart, Meyer & Zeller's Verlag. 1879.

Die mit 10 lithographischen Tafeln ausgestattete vorliegende erste Lieferung beschreibt eine Anzahl von Apparaten, wie sie aus dem physikalisch-mechanischen Institut von M. Th. Edelmann in München hervorgehen. Diese Apparate beruhen meist auf Principien, die abweichend sind von denen, auf welche die zu ähnlichen Beobachtungen und Messungen gebrauchten früheren Instrumente gegründet waren. Es sind zwar den Beschreibungen dieser Apparate Beispiele über Handhabung, Beobachtung und Messung beigefügt, ein entschiedenes Urtheil über die Leistungsfähigkeit wird aber immer nur Der gewinnen können, der mit diesen Apparaten selbst arbeiten kann; wir beschränken uns deswegen hier auf ein einfaches Referat.

Es sind zuerst eine Reihe von Scalen- und Ablesefernröhren beschrieben, die, auf einem festen Zinkdreifuss montirt, ausser der genauen Einstellung des Fernrohres noch die horizontale und vertikale Stellung der Scala dadurch gestatten, dass man eine Säule, welche, rechtwinklig zu ihr und an ihr mittels Klemmvorrichtung verschiebbar, die Scala aufnimmt, theils vertikal, theils horizontal in den Dreifuss einschrauben kann.

Die einfachen Fernröhre mit einer Objectivöffnung von 18 mm bis 74,4 mm werden geliefert zum Preise von 90 Mk. bis 380 Mk. Zu den grösseren dieser Fernröhre werden noch Oculare mit Schraubenmikrometer zum Preise von 100—150 Mark angefertigt. Weiter werden binoculare Fernröhre angefertigt, indem die durch das Objectiv gegangenen Strahlen durch einen mikrometrisch zu stellenden Spiegel auf zwei auseinanderliegende Ocularrohre vertheilt werden. (Objectivöffnung: 10,6 mm bis 74,4 mm, Preis 235 Mk. bis 450 Mk.)

Es werden ferner Collimatorfernröhre beschrieben, bei denen die Scala der vorigen Fernröhre ersetzt ist durch eine Glasscala im Ocularrohr. In dem Ocularrohr befindet sich zugleich ein Faden, der durch Tageslicht beleuchtet wird, das durch ein total reflectirendes Glasprisma längs der Fernrohraxe verläuft, durch das Objectiv parallel gemacht und so vom Spiegel reflectirt den Faden auf der Glasscala erblicken lässt,

wenn das Fernrohr auf unendliche Entfernung eingestellt wird. (Objectivöffnung 31,6 mm bis 67,7 mm, Preis 240 Mk. bis 400 Mk.)

Den Instrumenten werden endlich noch Aufsätze beigegeben, die theils gestatten, dass eine Person mehrere Instrumente zu gleicher Zeit durch dasselbe Rohr beobachten kann oder dass mehrere Instrumente durch verschiedene an demselben Fundamente angebrachte Fernrohre beobachtet werden können.

Ferner werden gebaut „Magnetometer mit constanten Ablesungswinkeln“ (in Reisekistchen 45 × 14 × 17 cm zu 250 Mk.), namentlich um bei erdmagnetischen Intensitätsbestimmungen das Verhältniss zwischen Stab- und Erdmagnetismus zu bestimmen. Ein sorgfältig cylindrisch gearbeiteter kleiner Magnet wird genau messbar so weit von der beweglichen Magnetnadel mit Spiegel entfernt, bis diese einen bestimmten Winkel mit dem magnetischen Meridian bildet. Dieser Winkel ist von vornherein fixirt durch fest mit dem Instrument verbundene Spiegel, denen der Spiegel der Magnetnadel sich parallel zu stellen hat, was durch Zusammenfallen der Spiegelbilder scharf beurtheilt werden kann.

Neues Hygrometer (Preis 30 Mk.). Das Instrument gründet sich darauf, dass die Spannung wasserdampfhaltiger Luft grösser ist, als die wasserfreier; wird also der Luft, die in einem abgeschlossenen Raume enthalten ist, durch concentrirte Schwefelsäure der Wassergehalt entzogen, so muss die Spannung der Luft um eine messbare Grösse geringer werden, und diese kann dazu benutzt werden, um den Gehalt der Luft an Wasserdampf zu bestimmen.

Absolutes Galvanometer (Preis 560—1500 Mk.). Das Instrument beruht darauf, dass der zu messende galvanische Strom (g) zwei Kreisscheiben von bekanntem Halbmesser (r) und in bekannter symmetrischer Entfernung (e) von der ringförmig gestalteten Magnetnadel (λ halber mittlerer Radius) umläuft und dadurch diese Nadel um einen zu messenden Winkel φ ablenkt, mit Hilfe dessen und der ebenfalls durch das Instrument bestimmbaren absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus (T) alsdann die absolute Stromintensität gemessen werden kann mit Hilfe der Formel

$$g = \frac{T\, tng\, \varphi}{4\pi r^2}(r^2+e^2)^{3/2}\left(1+\tfrac{3}{4}\frac{\lambda^2(4e^2-r^2)}{(r^2+e^2)^2}(1-5\sin^2\varphi)\right).$$

Beetz's Vibrations-Chronoskop (Preis 100—800 Mk.). Eine tönende Stimmgabel, die entweder durch einen anfänglichen Anstoss oder durch einen galvanischen Strom in Schwingung versetzt wird, schreibt mit einer Spitze eine Sinuslinie auf ein unter ihr hinweggezogenes Blech. Dieses Blech ist mit Schellackfirniss und Fuchsin roth gefärbtes und dann berusstes Weissblech. Anfang und Ende eines Ereignisses werden durch aus der Schreibspitze auf das Blech überschlagende elektrische Funkenspuren bezeichnet, die glänzend weiss sind, während die von der Spitze

beschriebene Sinuslinie roth ist. Die Anzahl der Bögen der Sinuslinie zwischen zwei solchen Funkenspuren geben, wenn die Schwingungszahl der Stimmgabel bekannt ist, das Mittel zur Zeitmessung.

Apparat zur Zeitbestimmung des freien Falles (Preis 110 Mk.). Eine Kugel, die von den Enden eines Elektromagneten gehalten wird, bildet zugleich ein Stück des Schliessungsbogens des den Magnet erregenden elektrischen Stromes. Wird der Strom unterbrochen, so fällt die Kugel um eine messbare Strecke und öffnet durch ihren Aufschlag am Ende des Falles einen zweiten Strom. Am Anfang und Ende des Falles erzeugen sich durch die geöffneten elektrischen Ströme in einem Rühmkorff'schen Apparate elektrische Entladungen, deren Funkenspuren die Anzahl Schwingungen begrenzen, die die tönende Stimmgabel des vorigen Apparates während des Falles der Kugel gemacht hat.

Transportables Magnetometer (Preis 210—1000 Mk.). Das mit ringförmigem Stahlmagnet nebst Spiegel, Fadensuspension und Ablenkungsmagnet ausgestattete Instrument soll vornehmlich zu folgenden Messungen dienen:

1. die Bestimmung der absoluten Declination und die Fixirung der Meridianzeichen;
2. Messung der horizontalen erdmagnetischen Intensität in absolutem Maasse;
3. die Bestimmung des Temperaturcoefficienten vom Ablenkungsmagneten;
4. Beobachtung des Ganges der Declination oder der horizontalen Intensität.

Weber's Bifilargalvanometer (Preis 400—1000 Mk.). Das Instrument zeichnet sich vornehmlich dadurch vor denen älterer Construction aus, dass die beiden Suspensionsdrähte in derselben vertikalen Geraden liegen. Hierdurch sind eine Reihe Abänderungen gegenüber den alten Instrumenten nothwendig geworden, die hier nicht weiter erwähnt werden können.

Apparat zur Objectivdarstellung der Metallspectren (Preis 160 Mk.). Eine Doppelröhre, durch die aussen Leuchtgas, innen Sauerstoffgas zuströmt, trägt oben einen Hohlkegel aus Bunsen'scher Kohle, der innen mit einem Gemisch aus pikrinsaurem Ammoniak und dem Metallsalze ausgekleidet ist, dessen Spectrum gezeigt werden soll. Das Spectrum soll sehr lichtstark, frei von weissem Licht und in grosser Ausdehnung (70 × 30 cm) auf einem Gypsschirm hergestellt werden können.

Der Volta'sche Fundamentalversuch in der Vorlesung, v. Beetz' Bifilarelektroskop und Nebenapparate. Eine Doppelöse trägt an zwei langen Fäden gleicher Länge einen Aluminiumdrahthaken, der in horizontaler Lage ein Schellackstäbchen aufnehmen soll, dessen eines Ende mit einer Hollundermarkkugel versehen ist; in der Ablenkung dieser elektrisch gemachten Kugel durch einen genäherten gleichnamig elektri-

schen Körper besteht die auch für ein grosses Auditorium sehr leicht sichtbare Angabe des Elektroskops. Die Condensatorvorrichtung wird dabei vertreten durch eine mit isolirender Handhabe versehene Metallscheibe, die vermittelst dreier kleiner Schellacktröpfchen auf einer Tischplatte aufruht. Die Tischplatte selbst vertritt gleich die andere Condensatorplatte.

Apparat zur Untersuchung von Tiefwassern (Preis 70 Mk.). Eine schwere eiserne Flasche von $\frac{1}{4}$ Liter Inhalt ist oben und unten durch solide Verschraubung luftdicht verschlossen, die obere Verschraubung trägt eine Oese zum Anknüpfen der Leine, die untere Verschraubung nimmt eine leicht zerbrechliche, seitlich abgebogene und am freien Ende zugeschmolzene Glasröhre auf, die sich nach innen bis nahe an die entgegengesetzte Flaschenseite als Metallröhre fortsetzt. Lässt man an der Leine den Apparat in die Tiefe, so bricht leicht die Glasröhre entzwei und der Wasserdruck von aussen treibt die zur weiteren Untersuchung bestimmten Bestandtheile des Bodens in die Flasche, während sich beim Heraufziehen des Apparates die Luft in der Flasche oben sammelt und bei abnehmendem Wasserdruck durch das Metallrohr nach aussen entweichen kann.

v. Beetz' Vorlesungsgalvanometer und einige galvanische Vorlesungsversuche (Preis 80—140 Mk.). Ein seitlich geschlitzter Glockenmagnet wird aperiodisch durch ein daneben stehendes, vom galvanischen Strom durchflossenes Drahtgewinde abgelenkt. Die Ablenkung wird weithin sichtbar gemacht durch einen Zeiger, der sich an der am Gehäuse angebrachten Scala hinbewegt.

Neues Instrument zur Bestimmung des Inclinationswinkels (Preis 250 Mk.). Ein weicher Eisenstab ist in der Ebene des magnetischen Meridians drehbar um einen Punkt, der nahe seinem einen Ende liegt. In horizontaler und vertikaler Lage wird derselbe der Wirkung des Erdmagnetismus ausgesetzt und der inducirte Magnetismus wirkt nun ablenkend auf eine benachbarte, in einem Glasgehäuse befindliche Magnetnadel. Aus den Ablenkungen der Magnetnadel lässt sich dann der Inclinationswinkel berechnen.

Compensations-Galvanometer. Im Innern einer Drahtrolle schwingt frei eine Magnetnadel, die abgelenkt wird, wenn durch die Drahtrolle der zu messende Strom hindurchgeht. Diese Ablenkung der Magnetnadel wird compensirt durch einen permanenten Magnetstab, dessen Axe senkrecht zur Ebene des magnetischen Meridians liegt und der sich um die durch den Mittelpunkt der Magnetnadel in der Richtung des magnetischen Meridians gelegene horizontale Gerade als Axe drehen kann. Die compensirende Wirkung des permanenten Magnets hängt alsdann ab von seiner Projection auf den Horizont. Dreht man also den Magnetstab so weit um einen gewissen Winkel α, bis die Ablenkung der Magnetnadel

wieder compensirt ist, so kann der Winkel α zur Messung der absoluten Stromintensität dienen. —

In einer zweiten Lieferung, S. 97—162, desselben Verlages sind folgende Instrumente beschrieben:

Nachdem zuerst noch, S. 97—102, Mechanik und Gebrauch des Compensationsgalvanometers mitgetheilt ist, folgt S. 103—112:

Erdmagnetische Variationsapparate nach Lamont, bestehend aus

1. Variationsdeclinatorium. Auf einer Marmorplatte als Fundament ist das cylindrische Gehäuse für eine aperiodisch bewegliche Hufeisenmagnetnadel aufgebaut, deren Stand mit Spiegelablesung beobachtet wird; ihr magnetisches Moment überwiegt so bedeutend das Torsionsmoment des Aufhängefadens, dass man letzteres vernachlässigen kann. Um sich von der freien Beweglichkeit der Nadel überzeugen zu können, ist das Instrument noch mit einer kleinen Drahtrolle versehen, durch die ein thermoelektrischer Strom die Nadel zur Ablenkung bringt, wenn sie frei beweglich ist. Preis 150 Mk;

2. Variationsinstrument für die Horizontalintensität. Aehnlich eingerichtet, wie das vorige; nur ist noch eine Messingschiene angebracht zur Anbringung zweier horizontaler Ablenkungsmagnete, die bei den neueren Instrumenten durch Wasserkühlung auf bestimmte Temperatur erhalten werden. Preis 190 Mk.;

3. Variationsinstrument für Inclination, ganz ähnlich dem vorigen Instrumente, nur mit vertikalen Ablenkungseisenstäben. Preis 190 Mk.

Weber's Erdinductor. Eine Drahtrolle kann um eine Axe genau um 180° gedreht werden und bewirkt, wenn diese Axe vertikal steht, dadurch einen Erdinductionsstrom, herkommend von der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, wenn diese Axe horizontal, senkrecht zum magnetischen Meridian liegt, herkommend von der vertikalen Componente. Es sind Vorrichtungen angebracht, um alle nothwendigen Bewegungen mit Genauigkeit auszuführen. Preis 750—1200 Mk.

Luftpumpe mit Reservoirsteuerhahn. Eine compendiöse einfache Luftpumpe, die sich besonders dadurch auszeichnet, dass durch eine eigenthümliche Bohrung des Steuerhahnes die Wirkung des schädlichen Raumes fast ganz vermieden ist. Preis 300—340 Mk.

Ausdehnungsapparat. Ein Apparat zur Bestimmung des Wärmeausdehnungscoefficienten fester Körper, die in Stab- oder Drahtform gegeben sind. Der Versuchskörper wird im Wasserbade erwärmt und überträgt seine Ausdehnung auf einen Fühlhebel, dessen Ablenkung durch Spiegelung mit Fernrohr und Scala gemessen wird. Preis 130 Mk.

Apparat zur Bestimmung der Elasticitätsmoduli durch Ausdehnung und Torsionschwingungen. Die Versuchsgegenstände, Drähte bis 1 mm Durchmesser und von 1 m Länge, befinden sich eingelöthet zwischen cylindrischen Fassungen. Sowohl ihre Verlängerungen durch angehängte

Gewichte, als auch die Zeit ihrer Torsionsschwingungen wird durch Spiegelablesung gemessen.

Pneumatometer. Ein sehr empfindlicher Apparat, der mit Hilfe einer grossen manometrischen Büchse, wie solche in den Aneroidbarometern angewendet werden, auch noch die kleinsten Druckänderungen der untersuchten Gase beobachten lässt. Preis 250 Mk.

Cylinderquadranten-Elektrometer, eine Modification des Thomson-schen Quadrantenelektrometers. Das Instrument ist sehr empfindlich, indem noch die freie Spannung eines erwärmten Neusilber-Eisenelements messbar ist. Die eigenthümliche Gestalt der Aluminiumnadel und die sorgfältige Gestaltung der Sectoren, zwischen denen sie schwingt, bewirkt eine weitgehende Proportionalität zwischen elektrischer Spannung und Ausschlag der Nadel. Preis 250 Mk.

Die Wiedemann'schen Galvanometer. Die wesentlichsten Neuerungen gegenüber den älteren Constructionen bestehen in der Art der Dämpfung, indem für aperiodische Dämpfung die Nadel ein Siemens-scher Glockenmagnet ist, der innerhalb einer dickwandigen Kupferkugel schwingt, oder für verstellbare Dämpfung eine ringförmige Magnetnadel zwischen zwei in ihrer Entfernung verstellbaren Kupferscheiben.

Endlich sind noch einfache und bequeme Constructionen für die astasirenden Magnete von Haug und Du Bois-Reymond mitgetheilt.

Freiberg i. S., den 30. April 1880. TH. KÖTTERITZSCH.

Théorie des systèmes élastiques avec applications par A. CASTIGLIANO, Ingénieur. Turin 1880, Negro éditeur. 420 pag. et Atlas.

Der Verfasser hat in diesem Werke die Ergebnisse seiner sämmtlichen Studien über die Theorie der elastischen Systeme vereinigt. Da dessen Name ausländischen Gelehrten wohl weniger bekannt sein dürfte, so möge Einiges über Castigliano's Arbeiten hier mitgetheilt werden. Man besitzt von ihm eine Abhandlung „Intorno ai sistemi elastici" (Turin 1873), worin eine neue Methode zur Lösung der auf elastische Systeme bezüglichen Probleme angegeben wird. Der Verfasser betrachtet hier die Veränderungen der Coordinaten der Systemeckpunkte als unbekannt; als Grundlage seines Verfahrens betrachtet er das Princip der kleinsten Arbeit, von welchem er auch einen Beweis giebt. In den Sitzungsberichten der Turiner Akademie von 1874 und 1875 findet man aus der Feder unseres Verfassers zwei kleinere Aufsätze „Intorno alla resistenza dei tubi alle pressioni continue ed ai colpi d'ariete" und „Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici", welch' letztere das erwähnte Theorem von der kleinsten Arbeit in ein helleres Licht setzen.

Eine wichtigere Arbeit des Herrn Castigliano erschien im Jahre 1875; sie führt den Titel „Nuova Teoria intorno all'equilibrio dei sistemi

elastici". Hierin entwirft er eine vollständige Theorie der elastischen Systeme und stellt insbesondere zwei neue Lehrsätze auf, welche er „Teoremi delle derivate del lavoro di deformazione" nennt. Dieselben enthalten als Corollar jenes Princip der kleinsten Arbeit, von welchem Herr Castigliano von Anfang an ausgegangen war. Dasselbe lässt sich folgendermassen formuliren:

„Den Punkten A, A', A'', ... irgend eines elastischen Systems sollen die Biegungsmomente M, M', M'', ... entsprechen, und zugleich sollen in ihnen resp. die Kräfte P, P', P'', ... wirken. Ist dann L die als „Deformationsarbeit" bezeichnete, für das System charakteristische Grösse, so ist

$\frac{\partial L}{\partial P}$ gleich der Verrückung des Punktes A in der Richtung der Kraft P,

$\frac{\partial L}{\partial M}$ gleich der Drehung des Querschnittes in demselben Punkte."

Um also die bezüglichen Aufgaben zu lösen, hat man nur die verschiedenen Bedingungen, welchen das System unterworfen ist, durch ebensoviele Gleichungen auszudrücken; die Bestimmung der Werthe der unbekannten Kräfte und Momente hängt von der Auflösung dieser Gleichungen ab.

Man sieht, dass der Verfasser die Begriffe mehr und mehr verallgemeinert und seine Studien stets weiter ausgedehnt hat; so ist es ihm gelungen, die Theorie der elastischen Systeme von einem neuen Standpunkte aus zu betrachten und ihrer Behandlung eine neue streng wissenschaftliche Form zu verleihen. Später hat er auch einige Anwendungen seiner Methode auf Fälle der Praxis bekannt gemacht; vergl. seine „Applicazioni pratiche della Teoria dei sistemi elastici" (Milano 1878). Hier finden wir den Festigkeitscalcul durchgeführt für zwei berühmte gemauerte Brücken, nämlich für die sogenannte Mosca-Brücke über die Dora bei Turin und über die Oglio-Brücke auf der Eisenbahnlinie Treviglio-Rovato (Oberitalien), welche beide nur einen einzigen Bogen von 45 m Spannweite haben. Andere Anwendungen auf Fragen des Brückenbaues enthalten die zwei Schriften „Del Ponte di castelvecchio a Verona appunti di G. B. Biadego" (Milano 1880) und „Il Ponte in ferro in una sola arcata di m. 83 di luce, costrutto sul Torrente Cellina a Montereale (Friuli). Memoria degli ingegneri cav. L. Richard e G. B. Biadego" (Milano 1880). Die gemauerte Brücke von Castelvecchio in Verona hat drei Oeffnungen, deren breiteste im Lichten 48,7 m misst.

Alle diese Druckschriften Castigliano's konnte das Publicum ihrer Seltenheit wegen nur schwer sich verschaffen. Das nunmehr erschienene selbstständige Werk hat den Zweck, die Kenntniss der neuen Verfahrungsweisen auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Da die Schrift nicht rein theoretisch gehalten ist, sondern den Bedürfnissen des Prak-

tikers durchaus entgegenkommt, so ist dieselbe nicht blos für Ingenieure, sondern überhaupt für jeden gebildeten Techniker von höchstem Interesse.

Arona (Lago Maggiore). BIADEGO.

La teoria delle ombre e del chiaro-scuro, ad uso della università, delle scuole d'applicazione per gli ingegneri etc., dell' Ing. DOMENICO TESSARI. Torino 1880. Fascicolo II ed ultimo.

Im XXIII. Bande dieser Zeitschrift, S. 180 flgg., hat der Unterzeichnete die erste Lieferung des angegebenen Werkes besprochen und dabei bemerkt, dass die benutzten Sätze der darstellenden Geometrie nochmals auseinandergesetzt sind, dass dies aber bei einem Docenten begreiflich ist, der nur die Anwendungen dieser Wissenschaft zu lehren hat. Der Verfasser knüpft in dem der zweiten Lieferung vorgesetzten Vorworte an diese Bemerkung an und klagt, dass es ihm nicht gestattet sei, seine Zuhörer durch einen Curs über darstellende Geometrie selbst für die Anwendungen vorzubereiten. Ich finde, dass bei der in Deutschland gebräuchlichen Einrichtung, bei welcher der Unterricht der darstellenden Geometrie und der Beleuchtungslehre in derselben Hand liegt, eine bedeutende Zeitersparniss erzielt wird, mag die Beleuchtungslehre in einem besondern Vortrage behandelt oder in denjenigen über die darstellende Geometrie eingeflochten werden.

Anschliessend an die erste Lieferung, fährt die zweite mit der Bestimmung der Eigenschattengrenze der Ringfläche fort, wobei ihre Tangente vermittelst conjugirter Durchmesser der Indicatrix, und im innern Flächentheile die Grenzpunkte ermittelt werden, das sind die Punkte, in denen der nützliche und der parasitische Theil der Eigenschatten- und die Schlagschattengrenze aneinander stossen. Darauf wird die Grenze des Schlagschattens dieser Fläche auf eine zur Umdrehungsaxe senkrechte Ebene sowohl als Parallellinie einer Ellipse bestimmt, wie als Einhüllende einer beweglichen, mit der soeben genannten congruent und parallel bleibenden Ellipse bezeichnet. Bei der dann folgenden Construction der Schatten an Umdrehungsflächen, deren Meridiane aus verschiedenen, berührend in einander übergehenden Kreisbogen gebildet sind (wie die runde Hohlkehle und die Archivolte), stellt sich das für die ästhetische Wirkung wichtige bekannte Ergebniss heraus, dass eine in der Meridianlinie herrschende Unstetigkeit zweiter Ordnung (im Krümmungshalbmesser) in der Eigenschattengrenze eine Unstetigkeit erster Ordnung (in der Tangente) zur Folge hat.

Es wird dann die Eigenschattengrenze einer Schraubenfläche mittelst der entlang einer Schraubenlinie berührenden abwickelbaren Fläche und ihres Richtkegels bestimmt, sodann aber auch mittelst

des Normalschnittes unter Anwendung der wichtigen Sätze von Burmester, welche auch zur Verzeichnung des Schlagschattens auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene einfache Mittel bieten. Die Verfahren werden angewendet auf die Fläche, deren Meridian eine Sinuslinie und auf die, deren Normalcurve ein Kreis ist (wobei die erstere gewundene Säule genannt wird, während Schreiber, Tilscher und Burmester die letztere so nennen), auf die axiale schiefe und normale Schraubenregelfläche.

Sodann wird die Eigenschattengrenze auf einer windschiefen Fläche durch die Bestimmung des Berührungspunktes der durch eine Erzeugende gelegten Lichtstrahlenebene bestimmt und zwar zuerst bei den Flächen zweiter Ordnung und dann bei anderen Flächen vermittelst einer anschliessenden Fläche zweiter Ordnung.

Der zweite Theil handelt vom Hell-Dunkel oder den Lichtabstufungen. Es werden hier die verschiedenen Oberflächen der Körper als spiegelnd, matt, theilweise spiegelnd und durchsichtig unterschieden. Bei einer spiegelnden Fläche kann man von einer ihr eigenthümlichen Helligkeit nicht sprechen; man sieht in ihr nur die Spiegelbilder der umgebenden Gegenstände, insbesondere die durch Lichter hervorgebrachten Glanzpunkte, während bei matten Flächen bei Parallelbeleuchtung die Helligkeit an irgend einer Stelle mit dem Cosinus des Winkels des Lichtstrahles mit der Flächennormalen im betrachteten Punkte in Verhältniss steht. Die Linien gleicher Beleuchtung fallen bei ihnen mit denen gleicher Helligkeit zusammen und sind diejenigen, bei welchen jener Winkel unveränderlich ist; gleichmässige Abstufungen werden durch gleiche Unterschiede jener Cosinus hervorgebracht. Der Verfasser nimmt die Flächen theilweise spiegelnd an, indem er die Linien gleicher Helligkeit wie bei matten bestimmt und dann im Glanzpunkte noch einen Lichtfleck aufsetzt.

Ueber diese Frage herrscht bekanntlich Meinungsverschiedenheit. In der ersten Arbeit über Linien gleicher Helligkeit, welche von Schülern Monge's in dem I. Cahier des „Journal de l'école polytechnique", an III (1796), für eine Kugel bestimmt wurden, war die Annahme gemacht, dass die Helligkeit sowohl mit dem Cosinus des Winkels des Lichtstrahls, wie des Sehstrahls mit der Flächennormalen in Verhältniss stehe, während die späteren einzelnen Abhandlungen, insbesondere aber die Festschrift von Egle über das Schattiren von Oberflächen regelmässiger Körper, Stuttgart 1855, welche die Umdrehungsflächen und die Wendelfläche auf Grundlage der Kugelfläche behandelt, und das erste umfassende Werk von Tilscher über die „Lehre der geometrischen Beleuchtungsconstructionen", Wien 1862, die Linien gleicher Beleuchtung darstellen, bei welchen der Einfallswinkel der Lichtstrahlen unveränderlich ist. Burmester dagegen in seiner bedeutenden Schrift „Theorie und Darstellung

der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen", Leipzig 1871, unterscheidet die Linien von gleicher wahrer Beleuchtung, Isophoten, bei welchen der Einfallswinkel des Lichtstrahls unveränderlich ist, von den Linien von gleicher scheinbarer Beleuchtung, Isophengen, bei welchen das Product der Cosinus der Winkel, welche der Lichtstrahl und der Sehstrahl mit der Flächennormalen bilden, unveränderlich bleibt. Fasst man die physikalischen Untersuchungen von Lambert und Bouguer und Beobachtungen, die man leicht anstellen kann, zusammen, so findet man, dass die Isophoten die bei den verschiedenen Körpern wechselnden Erscheinungen wahrheitsgetreuer wiedergeben, als die Isophengen, und dass die auch von Tessari zugefügten Reflexe die Wirkung noch erhöhen.

Auch darin stimme ich dem Verfasser bei, dass er die Linien gleicher Beleuchtung in Eigenschaften, welche wie für einen gerade umgekehrten Lichtstrahl construirt werden, nicht zur Abstufung des Eigenschattens benutzt, da dessen Beleuchtung durch die Atmosphäre nicht wie durch einen umgekehrten Lichtstrahl geschieht, indem der der Sonne gerade gegenüberstehende Theil des Himmels durchaus nicht der hellste ist, und da die Beleuchtung durch andere das Licht zurückwerfende Körper in einer von ihrer Stellung abhängigen, also wechselnden Weise stattfindet; nicht aber stimme ich ihm darin bei, dass er die Helligkeit des Schlagschattens an einer Stelle um so kleiner annimmt, je stärker an derselben die Beleuchtung sein würde, wenn der beschattende Körper entfernt wäre; denn der Contrast, durch welchen diese Annahme begründet wird, wirkt nur an der Licht- und Schattengrenze, und an den übrigen Stellen hängt auch im Schlagschatten die Helligkeit nur von den Reflexen ab.

Nachdem weiter 20 Abstufungen der Töne festgestellt sind, 10 (+) im Licht, 10 (—) im Schatten, werden mit Hilfe des Kegels von gleichförmiger Beleuchtung die Linien gleicher Beleuchtung auf den abwickelbaren Flächen (hauptsächlich dem Cylinder und Kegel), auf der Kugel, dann mit deren Hilfe auf den Umdrehungsflächen (dem Cylinder, Kegel, einschaligen Hyperboloid, Ellipsoid, Ring, Hohlkehle), auf den Schraubenflächen (der gewundenen Säule, der axialen schiefen und geraden Regelschraubenfläche, und zwar, wie bei der Schattengrenze, mit Hilfe der einhüllenden abwickelbaren Fläche, deren Richtkegel ein Umdrehungskegel ist) und auf den windschiefen Flächen (wesentlich denen zweiter Ordnung) bestimmt, und zum Schluss werden noch die Glanzpunkte für eine Fläche im Allgemeinen mit einer Anwendung auf die Umdrehungsflächen ausgeführt.

Wie in der ersten Lieferung, so wirkt auch in dieser die klare Darstellung und das zweckmässige Hervorheben der entwickelten Sätze wohlthätig auf den Leser, die Herleitung ist, wie bei Tilscher, eine geometrische und es werden auch, wie bei diesem, die Hilfskegel, welche

der Verfasser die von gleichförmiger Beleuchtung nennt, wesentlich benutzt. Während aber Tilscher den Leser die verschiedenen von ihm durchlaufenen Wege und die allmäligen Vereinfachungen mit durchschreiten lässt, wie es beim Auffinden neuer Wege so leicht geschieht, führt ihn der Verfasser in förderlicherer Weise sogleich zu der zweckmässigsten Anschauung. Dagegen hat er die Einfachheit der Constructionen nicht erreicht, welche Fiedler in seiner darstellenden Geometrie (1871) bei den geometrisch abgeleiteten Constructionen für Umdrehungsflächen, und Burmester bei der geometrischen Darstellung seiner analytisch gewonnenen Ergebnisse besitzen, was besonders bei der öfteren Wiederholung derselben Construction für verschiedene Elemente der behandelten Fläche fühlbar wird.

Wir können in dem vorliegenden Werke eine Arbeit begrüssen, welche sich um die Schatten- und Beleuchtungslehre, insbesondere durch ihre geometrische Begründung, wesentliche Verdienste erworben hat.

Karlsruhe, im Januar 1881. CHR. WIENER.

Mathematische Modelle. 5. Serie der Verlagshandlung L. Brill, Darmstadt: Gypsabgüsse nach den im math. Institut der k. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen; neue (dritte) Folge, ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. BRILL. Modelle XII bis XVIII. — 6. Serie: Gypsmodelle, XIX, ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. KLEIN, und Modelle 1) bis 5).

Die reiche Modellsammlung, deren Werth ich beim Erscheinen der drei ersten Serien besprochen habe, ist jetzt durch drei neue Serien vermehrt worden, nachdem inzwischen noch eine vierte Serie erschienen war, welche die früher herausgegebenen Carton- und Gypsmodelle von Flächen zweiter Ordnung durch bewegliche Fadenmodelle der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung in glücklicher Weise ergänzt. In der vierten und in den vorliegenden Serien ist die Verlagshandlung auf einen in einer früheren Besprechung geäusserten Wunsch eingegangen, die einzelnen Modelle der Serie auch apart abzugeben, eine Einrichtung, welche verschiedenartigen Interessen bequem entgegenkommt. Um so nöthiger erscheint es, die Modelle im Einzelnen zu besprechen, statt nochmals die allgemeinen Vorzüge, die dieser Sammlung eignen, zu wiederholen.

Die fünfte Serie bewegt sich ganz auf wissenschaftlichem Gebiete und hat zu XII, XIV, XV und XVIII erklärende Noten. Sie besteht aus:

XII. Darstellung der elliptischen Function $\varphi = am(u, \varkappa)$ durch eine Fläche. Von den Studd. math. TH. KUEN und CHR. WOLFF.

Unter Betrachtung von $\varkappa$, u, φ als rechtwinklige Coordinaten im Raume wird die Fläche $\varphi = am(u, \varkappa)$ für jeden reellen Werth von $\varkappa$ construirt. Für $\varkappa < 1$ existirte schon ein kaum mehr käufliches Modell, das sogenannte Podoid von Heis. Die Fläche ist hier aus den den verschiedenen $\varkappa$ zugehörigen Curven, welligen Linien, construirt; diese Wellen werden um so zahlreicher und flacher, je grösser $\varkappa$ ist, und die Axe der Wellen bleibt für $\varkappa \geqq 1$ immer parallel der U-Axe, während sie für $\varkappa > 1$ in einem von $\varkappa$ abhängigen Winkel gegen die U-Axe geneigt ist, so dass für $\varkappa = 1$ eine Discontinuität eintritt.

XIII. Rotationsflächen von constantem positivem Krümmungsmaass mit geodätischen Linien; drei Typen mit gleichem Krümmungsmaas: *a)* die Kugel, *b)* die Meridiancurve der Umdrehungsfläche trifft die Axe, *c)* dieselbe trifft die Axe nicht. Nach den Zeichnungen von Bour (J. de l'Éc. Polytechn. t. 22) modellirt und mit geodätischen Linien versehen von Assistent Dr. P. Vogel.

XIV. Schraubenfläche von constantem positivem Krümmungsmaass. Von Th. Kuen.

XV. Schraubenfläche von constantem negativem Krümmungsmaass. Von Dr. P. Vogel.

Diese Modelle reihen sich an die früher erschienenen von Rotationsflächen constanter negativer Krümmung an. XIII ist zunächst nach Zeichnungen construirt, die Bour sehr einfach durch Construction gewisser Parallelcurven erhielt; XIV nach ganz selbstständigen Rechnungen mit Hilfe der Θ-Functionen, auf welche die Aufgabe in der beiliegenden kleinen Abhandlung reducirt ist. Man kann diese Fläche etwa dadurch erhalten, dass man aus einer Kugel eine Zone herausschneidet, dieselbe längs eines Meridians aufschneidet und die Schnittränder gegen einander verschiebt, wovon man sich mittelst eines Stanniol- oder besser Guttaperchastreifens, wie er auch später den Modellen passend hinzugefügt werden soll, überzeugen mag. Die Modelle XIII und XIV haben gleiches Krümmungsmaass, ebenso hat XV, dessen Meridiancurve die Tractrix ist und das nach Dini's Angabe, Comptes rendus 1865, verfertigt ist, dieselbe Krümmung, wie die früheren Modelle mit negativem Krümmungsmaass.

XVI. Vier Formen der Dupin'schen Cyklide, von Dr. P. Vogel; *a)* Ringcyklide, *b)* Horncyklide, *c)* Spindelcyklide, *d)* Parabolische Cyklide.

Die Zusammenstellung dieser verschiedenen Formen der vieluntersuchten Cykliden, hier nach der Realität ihrer Knotenpunkte und nach der Lage der beiden Mäntel zur Fläche, ist von besonderem Interesse. Bei der Herstellung ist eine Arbeit von Maxwell, Quart. Journ. Bd. 9, benutzt.

XVII. Die Kettenlinie auf der Kugel, nach einer Abhandlg. von Clebsch in Borch. J. Bd. 57.

Zwei einfache Fälle aus dieser Abhandlung sind dargestellt.

XVIII. Die Enveloppen der von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid. Von Dr. A. v. Braunmühl.

Die auf einem früheren Modell des Herrn v. Braunmühl, mit geodätischen Linien, noch vermissten Enveloppen werden nun hier, nach einer inzwischen erschienenen Abhandlung desselben, Math. Ann. XIV, dargeboten und ihre Construction, die wieder auf Θ-Functionen führt, erklärt. Durch Spannen eines Fadens von einem Punkte aus überzeugt man sich von der Genauigkeit der Construction dieses lehrreichen Modells.

Die Serie 6 enthält:

XIX. Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung, von Stud. math. E. Lange; *a)* die cubische Ellipse, *b)* die cubische Hyperbel, *c)* die cubische Parabel, *d)* die cubische hyperbolische Parabel. Mit einer Abhandlung.

Die Curven sind hier als Durchschnitte von Cylindern mit Cylindern oder mit Kegeln construirt und zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Gestalten, indem sie nicht zu rasch asymptotisch verlaufen, möglichst gut zur Erscheinung kommen. Dies ist durch eine der Construction vorhergehende Deformation des schneidenden Kegels in ein Ebenenpaar erreicht worden. So passend diese Gypsmodelle zu den übrigen sind, so halte ich doch Drahtmodelle von Curven, etwa der Art, wie sie Wiener für Singularitäten gegeben hat, für noch instructiver.

Hierzu kommt noch eine Reihe von Modellen, nach denen in der That ein praktisches Bedürfniss bestand, da die Veranschaulichung der betreffenden Objecte nöthig ist und durch die bisher vorhandenen rohen Modelle nur unbefriedigend geleistet wird:

1. Die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle: *a)* der äussere Mantel mit Ausschnitten, die den innern Mantel zeigen, *b)* der innere Mantel;
2. das zugehörige Ellipsoid;
3. die Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle;
4. die Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten, mit den sphärischen und ellipsoidischen Linien auf beiden Mänteln und acht Nabelpunkten.

Das letzte Modell ist nach Angabe des Herrn Rector Dr. Böklen in Reutlingen (vergl. diese Zeitschrift XXIV und XXV) verfertigt und die Construction ist in einer beigelegten Note auseinandergesetzt.

5. Ein Kreiskegel mit Ellipsen-, Hyperbel- und Parabelschnitt; die einzelnen Stücke sind beweglich.

Ein durch Grösse und Befestigungsart, insofern vermöge vorhandener Ränder die Stücke fest aufeinander liegen, zu Demonstrationszwecken geeignetes Modell.

Erlangen. M. Noether.

Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln, von Dr. Friedrich Schottky, Privatdocent an der Universität zu Breslau. Leipzig, Teubner. 1880. 162 S.

Auf die Lösung des Problems, welche der Verfasser des vorliegenden Buches, von Herrn Weierstrass hierzu angeregt, unternimmt, hat offenbar der Gang der Wissenschaft hingedrängt. Der Weg, welcher von der Theorie der ϑ-Functionen ausgehend zu den Differentialgleichungen des Umkehrproblems in der Theorie der Abel'schen Functionen führt, anstatt von der algebraischen Function ausgehend durch Einführung der ϑ-Functionen zur Lösung des Umkehrproblems zu gelangen, ist schon in verschiedenen Fällen mit vollem Erfolg eingeschlagen worden. Ausser den elliptischen Functionen in einer Jacobi'schen Vorlesung sind von Rosenhain die hyperelliptischen Functionen für $p=2$ in dessen Preisschrift so behandelt; und endlich ist nach den Weierstrass'schen Ausführungen über die allgemeinen hyperelliptischen Functionen auch für diese jener Weg klar vorgezeichnet und verhältnissmässig einfach, wegen der einfachen Ausdrücke der ϑ-Quotienten bei unabhängigen Argumenten durch die symmetrischen Functionen der oberen Grenzen der Integrale, so dass in der That auf diese Weise der Fall $p=4$ von Pringsheim, Math. Ann. XII, ausgeführt worden ist.

Für den allgemeinen Fall $p=3$ existirte nun das wesentliche Material für jenen Weg ebenfalls; man findet die ϑ-Relationen im ersten Theile von Weber's Arbeit über „Die Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3“ in unabhängiger Entwickelung dargestellt. Da ausserdem wegen der übereinstimmenden Anzahl der Moduln diese ϑ-Functionen allgemein auf die algebraischen Functionen führen, was für $p>3$ nicht mehr der Fall ist, so stellte sich hier der Lösung keine principielle Schwierigkeit entgegen. Es ist aber das grosse Verdienst des Verfassers, das Problem, dessen algebraische Schwierigkeiten von vornherein nicht klar lagen, in Angriff genommen und mit bedeutendem Geschick gelöst zu haben.

Ich skizzire den Gang des Verfassers, um seine Entwickelungen näher verfolgen zu können.

Derselbe greift in einem ersten, auch schon 1878 als Habilitationsschrift erschienenen Theile zunächst weiter aus, indem er vorerst die Grundeigenschaft der ϑ-Functionen von p Argumenten nach Weierstrass entwickelt, dass zwischen je r^p+1 solchen Functionen, r^{ter} Ordnung

und gleicher Charakteristik, eine homogene lineare Relation existirt; dabei ist die in § 3 gegebene Reduction der Formeln für gerade oder ungerade ϑ-Functionen hervorzuheben. Er geht dann zu den Systemen von unabhängigen Charakteristiken über, aus welchen man alle 2^{2p} Charakteristiken der geraden und ungeraden Theta mit Angabe ihres Charakters zusammensetzen kann. Hierbei ist nun der Standpunkt des Verfassers zwar für die vorliegenden Rechnungen genügend, aber immerhin ein beschränkter. Es ist zunächst ein Fortschritt, dass er dabei nicht, wie Weierstrass und Riemann, von den hyperelliptischen Integralen ausgeht, sondern, wie Weber für drei Variable, combinatorisch verfährt. Aber er liefert nur ein specielles System, ohne die ein solches System von $2p+1$ Charakteristiken überhaupt kennzeichnenden Eigenschaften zu entwickeln, welche die Bildung und Einführung jedes andern in der Theorie gleichberechtigten Systems erlauben würden; mit anderen Worten: die Eigenschaften, welche bei der zu den Charakteristikengleichungen gehörigen Transformationsgruppe invariant sind. Hierdurch bleiben schon die einfachsten Eigenschaften, die sich auf Gruppirung beziehen, von Anfang an im Dunkeln, wie die Unterschiede einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Charakteristiken, von denen die einen in zwei Classen von $2^{2p}-1$ und 1, die anderen in zwei Classen von $2^p(2^{p-1}-1)$ und $2^p(2^{p-1}+1)$ zerfallen etc. Wenn dieser fundamentale Unterschied, welcher in den Entwickelungen des Recensenten (Mathem. Ann. XIV und XVI) besonders betont ist, erkannt und von Anfang an hervorgehoben worden wäre, so würde manche Erscheinung, wie besonders in Bezug auf die Grade der algebraischen Functionen und die Anzahl der Factoren in den auftretenden ϑ-Producten, sich von vornherein als nothwendig gezeigt haben, und es würde in vielen Fällen klar geworden sein, was an der Darstellungsweise des Verfassers, was in der Natur der Sache liegt.

In § 6 beginnt die eigentliche Arbeit, in welcher das auch von Weber gegebene Material der ϑ-Relationen für $p=3$ weiter ausgenutzt wird. Den Systemen von sieben ungeraden Charakteristiken entsprechen die Systeme von sieben ungeraden Theta, und diesen wieder sollen in der zugehörigen algebraischen Function (geometrisch zu reden) die Aronhold'schen Systeme von sieben Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung entsprechen. Die Coefficienten in der Gleichung einer solchen Doppeltangente sind die partiellen Differentialquotienten der entsprechenden ϑ-Function für die Nullwerthe der Argumente. Die Verhältnisse dieser Coefficienten, und zwar der eines Aronhold'schen Siebensystems, durch welche alle übrigen Doppeltangenten, wie die Curve, eindeutig bestimmt sind, sind also als die algebraischen Moduln zu betrachten, die nach einer linearen Transformation sechs unabhängige Grössen vorstellen. Der Verfasser löst nun direct die Aufgabe, die Differentialquotienten

aller ungeraden ϑ und die geraden ϑ für die Argumente Null durch die obigen algebraischen Moduln auszudrücken, was bei Weber noch mit Hilfe der algebraischen Darstellungen geleistet war.

Im zweiten Theile behandelt der Verfasser mittelst der Beziehungen zwischen den $\vartheta_\alpha(u)$ oder, wie der Verfasser schreibt, $\sigma_\alpha(u)$ $(=\sigma_\alpha)$, was bis auf gewisse constante Factoren mit den $\vartheta_\alpha(u)$ übereinstimmt, und ihren Differentialquotienten die Aufgabe: den Quotienten je zweier σ-Functionen bei unbeschränkter Variabilität der drei Argumente darzustellen als Quadratwurzel aus einer rationalen Function von vier unabhängigen Werthsystemen $(x y z)$, $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, deren jedes ein und derselben homogenen Gleichung $L(x, y, z) = 0$ vom Geschlecht (Rang) 3 genügt. Dabei sollen die Argumente u_i die Werthe erhalten

$$u_i = \sum_{k=0}^{k=3} \int_{c_k}^{(x_k y_k z_k)} d J_i\,,$$

wo die J_i die Integrale erster Gattung für $L=0$, c_k die vier Schnittpunkte von $L=0$ mit einer „Curve φ“ von $L=0$ sind. Man hat also dann rückwärts das gewöhnliche Umkehrproblem erhalten, und zwar in derselben einfachen Umformung, von welcher auch Weber in § 24 seiner Schrift ausgeht.

Hier ist vor Allem interessant, nachzusehen, wie der Verfasser auf die algebraischen Functionen kommt.

Bezeichnet man die sieben zu Grunde gelegten ungeraden Charakteristiken mit 1, 2, ..., 7, die 21 übrigen durch deren Combinationen zu zweien, so bestehen zwischen den 21 Grössen

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \sigma_\varkappa \sigma_\lambda \sigma_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 7)$$

lineare Gleichungen, vermöge welcher sich alle durch sechs unter ihnen ausdrücken lassen, und zwar, wie der Verfasser zeigt, in der Form

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \sum_1^3{}_{hi}\, L_{hi}\, \xi_h^{(\varkappa\lambda)}\, \xi_i^{(\varkappa\lambda)},$$

wo $L_{hi} = L_{ih}$ und die $\xi_h^{(\varkappa\lambda)}$ sehr einfache Constanten werden. Ferner werden gewisse Producte von sechs und von neun σ-Functionen, insbesondere $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_7\, \sigma^2_m$, wo m eine beliebige ungerade Charakteristik, als quadratische, bez. cubische Functionen der sechs neuen Parameter L_{hi} ausgedrückt; und ähnlich σ-Quotienten.

Nun bestehen dann weitere homogene Gleichungen sechster Ordnung zwischen den Grössen L_{hi}, von denen, da die Argumente der σ-Functionen von einander unabhängig sind, nur zwei Gleichungen von einander unabhängig sein können. — An dieser Stelle setzt nun der neue Gedanke ein, der alle ferneren Entwickelungen des Buches beherrscht. Der Verfasser nimmt eine zunächst noch willkürliche Relation zwischen

den Grössen L_{hi} (also eine gewisse Relation zwischen den Argumenten u) hinzu, durch welche die obigen Relationen zwischen den L_{hi} in einfacher Gestalt erscheinen. Er setzt

$$\Delta = \Sigma \pm L_{11} L_{22} L_{33} = 0,$$

wonach also die $\varphi_{\varkappa\lambda}$ in Producte zerfallen

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \sum_1^3{}^h \xi_h^{(\varkappa\lambda)} x_h \cdot \sum_1^3{}^h \xi_h^{(\varkappa\lambda)} x'_h,$$

und ebenso die oben betrachteten σ-Producte. Die Gleichungen sechster Ordnung zwischen den L_{hi} aber gehen jetzt in die Gleichungen

$$L(x, y, z) = 0, \quad L(x', y', z') = 0$$

über; und dabei wird $L = 0$ eine Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten vom Geschlecht 3 (und zwar, wenn C_1, C_2, C_3 drei Curven dritter Ordnung durch die sieben Punkte, die Functionaldeterminante von C_1, C_2, C_3). Man erhält so die Verhältnisse der Quadrate der σ-Functionen, auch für gerade Charakteristiken, ausgedrückt durch rationale Functionen von (xyz), wo immer $L(x, y, z) = 0$.

Hierbei ist immer vorausgesetzt, dass die durch $\Delta = 0$ angezeigte Beschränkung der drei Argumente u angenommen wird, so dass die σ nur Functionen der beiden Werthsysteme (xyz), $(x'y'z')$ werden. Die hiernach aufgestellten Differentialrelationen zeigen endlich die Bedeutung dieser Beschränkung. Man erhält für die u_i je ein Normalintegral erster Gattung in Bezug auf $L = 0$, jedes zwischen denselben, aber beliebigen Werthsystemen (xyz), $(x'y'z')$ von $L = 0$ erstreckt.

Das Weitere für allgemeine Argumente der ϑ-Functionen wird nun mit Hilfe des bekannten Satzes über die algebraisch darstellbaren ϑ-Quotienten geleistet, der mit Hilfe des Additionstheorems bewiesen wird und dessen Umkehrung das Abel'sche Theorem liefert. Setzt man für die u die Summen von Integralen ein, so ergeben sich Quotienten von ϑ-Producten als algebraische Functionen der einzelnen Werthsysteme, welche die Grenzen der Integrale bilden. — Die Darstellung geschieht dann für die Summen von vier Integralen, wobei hinsichtlich der speciellen Constantenbestimmung auf Weber verwiesen ist. Die auftretenden algebraischen Functionen, nämlich die Systeme von $L = 0$ überall in der ersten Ordnung berührenden Curven, werden in verschiedenen Formen explicite aufgestellt, indessen mit einer gewissen Unübersichtlichkeit und auch Weitläufigkeit, eine Folge der eingangs dieser Recension erwähnten Unklarheit in Bezug auf die Gruppirungen und auch theilweise eine Folge des Zurücktretens der geometrischen Auffassung.

Werfen wir nochmals einen Rückblick auf die Entwickelungen des zweiten Theils, so erkennen wir, dass sie der bei dem vorliegenden Problem wesentlichen Forderung eines lückenlosen und naturgemässen Fort-

schreitens im Ganzen genügen, bis höchstens auf den bei der Einführung von $\Delta = 0$ gemachten Sprung, der durch eine eingehendere Motivirung dieser Annahme wohl hätte vermieden werden können. Die Lösung des Verfassers, welche ohne verwickelte algebraische Untersuchungen die Zuordnungen der transcendenten und algebraischen Functionen leistet, kann als eine vollständige angesehen werden.

Noch bleibt der Anhang zu erwähnen, welcher den Fall $\vartheta(0) = 0$, also den hyperelliptischen Fall $p = 3$ behandelt. Hier führen die zwischen den ϑ-Functionen entstehenden Beziehungen den Verfasser unmittelbar dazu, die passenden Moduln und drei lineare Functionen der ϑ-Quadrate als neue Parameter einzuführen, so dass mit wenigen Strichen und in übersichtlichster Form direct das gewöhnliche Umkehrproblem (in der Weierstrass'schen Darstellung) resultirt. Dass dieser Behandlung auch für höhere p keine Schwierigkeit entgegensteht, zeigt schon die obenerwähnte Pringsheim'sche Arbeit für $p = 4$, in der der Formelapparat noch nicht in die conciseste Form gebracht ist.

Erlangen, Januar 1881. M. Noether.

Das Grössengebiet der vier Rechnungsarten. Erkenntnisstheoretischer Versuch von A. Fick. Leipzig, F. C. W. Vogel. 1880. 40 S.

Die vorliegende Schrift des bekannten Physiologen Herrn Fick, von dem wir auch bemerkenswerthe Betrachtungen über die Grundlagen der Physik und Mechanik besitzen, beweist, dass die an die Untersuchungen der Mathematiker über die Grundbegriffe der Arithmetik und Geometrie anschliessende Bewegung immer weitere und mächtigere Kreise zieht. Hier wird im zweiten Theile eine neue Idee und in rein mathematischer Form dargeboten, freilich nicht so, dass wir nicht erhebliche Einwände dagegen geltend machen müssten, während wir mit dem ersten Theile, der die Grundlage und das Gebiet der gewöhnlichen Zahlen zum Gegenstande hat, noch theilweise übereinstimmen können.

Der Verfasser erläutert zunächst, dass die Zahlbegriffe eine Bedeutung erst dadurch erlangen, dass sie anschaulich dargestellt werden können. Hiernach ist also z. B. ein Bruch als Verhältniss zwischen ganzen Zahlen noch nicht zum Rechnen genügend definirt, sondern erst durch die Theilung, also auch die Einführung beliebig theilbarer, stetiger Grössen; oder eine negative Grösse wird nicht durch die Subtraction genügend definirt, sondern erst durch Zählen von Relationen zwischen je zwei Gegenständen, da jene erst eine Umkehrung zulassen (nach Gauss). Es wird also durch Einführung neuer Zahlen zu gleicher Zeit fortwährend das zu berechnende Gebiet eingeschränkt und die ursprünglichen Begriffe der Operationen erweitert.

Mit dem einen Theile dieser Darlegung wird jeder Mathematiker heutzutage einverstanden sein. Einfach $\frac{a}{b}$ oder $a-b$ als neue Zahlgrösse einführen, weil sie unter den positiven ganzen Zahlen nicht enthalten ist, wie es Herr Fick am Ende der S. 3 von Mathematikern behauptet, darf freilich nie geschehen. Aber von hier aus annehmen, dass diese Zahlgrössen nur auf dem Boden der Anschauung definirt werden können, ist offenbar ein Sprung. Man wird vielmehr das Verhältniss $\frac{a}{b}$ als Grösse aus dem Grunde auffassen dürfen, weil man Regeln geben kann, welche diese logischen Beziehungen zulassen und welche die $\frac{a}{b}$ zugleich in eine bestimmte Ordnung zu bringen erlauben. Gerade das statistische Beispiel des Verfassers zeigt, dass man mit Verhältnissen rechnen darf. Diesem logischen Standpunkte ordnen sich ebenso die negativen und die irrationalen Zahlen unter; und dabei sei in Bezug auf die letzteren Zahlen bemerkt, dass in der That ein Sprung vom Begriffe der arithmetischen Stetigkeit zur Vorstellung der geometrischen Stetigkeit stattfindet, ohne dass man aber den ersteren Begriff zurückweisen könnte; beide verhalten sich eben genau zu einander, wie die oben erwähnte Definition von $\frac{a}{b}$ zu ihrer Anwendung auf die anschauliche „Theilung".

Auch die von dem Verfasser angeführte Thatsache, dass $\sqrt{-1}$ so lange als werthlose Form betrachtet worden ist, bis sich eine Veranschaulichung derselben gefunden, beweist nur, dass die Begriffe erst allmälig sich ausbilden und Sicherheit erlangen; also sicherlich nicht gegen, eher für die logische Auffassung des Zahlbegriffs seiten der heutigen Mathematik. Wenn der Verfasser überall statt „Rechnung" „Anwendung" sagte, wie es auch Gauss an der von ihm citirten Stelle thut, so würde man ihm völlig beistimmen können.

Der zweite, mathematisch gehaltene Theil der Schrift beschäftigt sich mit dem Beweise, dass das Gebiet der gewöhnlichen Rechenoperationen mit zwei Dimensionen einen Abschluss findet. Der Verfasser macht für das zu betrachtende Grössengebiet die Voraussetzungen: 1. dass sich die Operationen der Addition und Subtraction darin unbeschränkt ausführen lassen, 2. dass auch die Multiplication und Division den gewöhnlichen Regeln folge (S. 14) und das Resultat derselben wiederum als Grösse des Gebiets darstellbar sei, 3. und zwar als erste Voraussetzung, die aber offenbar auch als Theil von 1. betrachtet werden kann: dass jede Grösse des Gebiets ein numerisches (reelles) Vielfaches einer Einheit des Gebiets sein müsse; endlich giebt er die Definition für die Einheit, die man so aussprechen kann, dass das Product zweier Grössen, deren absolute

Werthe $=1$ sind, selbst den absoluten Werth 1 haben soll. Aus dieser Annahme allein soll folgen, dass das betrachtete Grössengebiet nothwendig das der gewöhnlichen complexen Zahlen sei. Der Beweis selbst soll sich von dem in Hankel's „Complexe Zahlen" enthaltenen Beweise dadurch unterscheiden, dass dieser alle Grössen des Gebiets aus einer beschränkten Zahl von Einheiten zusammensetzt, jener aber statt dessen die Voraussetzung 3. macht.

Es erheben sich aber sogleich schwere Bedenken. Der Verfasser lässt die Operationen 1. zu, so dass er ebenfalls auf ganz naturgemässe Weise seine complexen Zahlen aus einer Anzahl Einheiten linear zusammenstellen könnte. Er müsste also höchstens den Nachdruck auf die beschränkte Zahl der Einheiten bei Hankel legen wollen, während er in seinem Gebiete zunächst noch unendlich viele Dimensionen zulässt. Aber dann ist nach unseren bisherigen Begriffen der zu beweisende Satz gar nicht richtig! Man braucht nur das Product irgendwelcher Einheiten des Gebiets als immer neue und neue Einheiten zu definiren und hat ein Gebiet, in welchem auch die gewöhnlichen Regeln der Multiplication und Division unbeschränkt auszuführen sind (vergl. Hankel, § 31; nach Grassmann). Entweder also ist diese bisherige Annahme falsch, oder der Beweis des Herrn Verfassers hat eine Lücke. Ich denke das Letztere zeigen zu können.

Der Verfasser schaltet zwischen 1 und einer Grösse X des Gebiets stetig aufeinanderfolgende Zwischengrössen $X_1, X_2, \ldots X_n$ ein und betrachtet, indem er n gegen ∞ gehen lässt, das unendliche Product

$$X = \lim_{n=\infty} \frac{X}{X_n} \cdot \frac{X_n}{X_{n-1}} \cdots \frac{X_1}{1},$$

bei dessen Entwickelung er auch auf ein unendliches Product der Art (S. 27)

$$\lim_{n=\infty} . \prod_{r=0}^{r=n} \{1 + \delta x_r . f(x_r)\}, \quad \text{wo} \quad x_n = x,$$

kommt. Da dieses Product in der Grenze $n=\infty$ immer denselben Werth erhalten muss, welche Intervalle δx_r man auch für diese einsetzt, wenn nur die Summe der δx_r dieselbe bleibt, so schliesst der Verfasser, dass nothwendig alle $f(x_r)$, d. h. dort die Einheiten $\frac{J_\varphi}{J_a}$ einander gleich sein müssen. Aus demselben Grunde könnte man aber bei jedem Integral

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{r=0}^{r=n} \{f(x_r)\,\delta x_r\}$$

schliessen, dass die Function $f(x)$ zwischen $x = x_0$ und $x = x$ sich nicht ändert. Der Verfasser lässt hierbei Grössen zweiter Ordnung in unendlicher Zahl ohne Begründung weg.

Hiernach wird bis zu etwaiger Umformung des Beweises des Herrn Verfassers die gewöhnliche Voraussetzung über die Einheiten des Gebiets ihre Geltung behalten. Immerhin ist die Schrift als anregende zu empfehlen.

Erlangen. M. NOETHER.

Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Von J. THOMAE. Halle, Nebert. 1880. 4⁰. VIII u. 132 S.

Bekanntlich lässt sich die allgemeine Theorie der Functionen einer complexen Variabeln auf zwei Arten behandeln. Entweder kann man nämlich, wie es Cauchy und Riemann thaten, von einem allgemeinen Functionsbegriffe ausgehen und diesen durch die Forderung beschränken, dass der Differentialquotient nicht von der Richtung abhängig sein solle; oder aber man kann dem Vorgange von Weierstrass folgen, der, seit seinen ersten Arbeiten, den Gesichtspunkt der Entwickelbarkeit einer Function in eine Potenzreihe in den Vordergrund stellte. Der von Cauchy und Riemann befolgte Gang legt allgemeinere Voraussetzungen zu Grunde, braucht dafür aber auch das so zu sagen transcendente Hilfsmittel des Integrales und gelangt durch dessen Hilfe zu dem Satze, dass die betrachteten Functionen im Allgemeinen sich durch Potenzreihen darstellen lassen. Weierstrass dagegen beschäftigt sich in seiner Functionentheorie nur mit Functionen, die eine Darstellung durch Potenzreihen zulassen, und erkennt dann durch elementare Schlüsse und mit geringen Hilfsmitteln die Eigenschaften der Functionen. Während die Cauchy-Riemann'sche Theorie, ausser von ihren Begründern, noch von einer Reihe von Autoren behandelt wurde, hat Weierstrass von der seinigen nicht viel publicirt und eine allgemein zugängliche Darstellung des Ganzen existirte bis jetzt gar nicht. Man muss dem Verfasser des oben angeführten Werkes daher sehr dankbar sein, dass er es unternommen hat, von dem zuletzt erwähnten Gesichtspunkte aus eine zusammenhängende Darstellung der wichtigsten Sätze zu geben, die in der Theorie der Functionen einer Variabeln auftreten.

Nach einem mehr einleitenden Capitel über die Zahlen, in dem die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen und die Operationen mit ihnen nach den in der neuesten Zeit entwickelten Ansichten besprochen werden, folgen zunächst Betrachtungen über die Convergenz von unendlichen Reihen und unendlichen Producten mit Angabe der einfachsten Convergenzregeln.

Nach Aufstellung des Begriffes einer Function werden dann für Functionen von einer und zwei reellen und, darauf gestützt, für die einer

complexen Variabeln die Stetigkeit und die damit zusammenhängenden Begriffe erörtert. Die Untersuchung der ganzen Potenz und der ganzen Function bereitet auf die Betrachtung der Potenzreihen vor, bei welchen das Convergenzgebiet, die Stetigkeit der Summe, die Transformation in eine Reihe um einen andern Punkt und endlich die Fortsetzung zur Sprache kommen. Die erste Anwendung geschieht auf die Exponentialfunction und die trigonometrischen Functionen, deren Eigenschaften sämmtlich auf rein analytischem Wege entwickelt werden. Die Umkehrung der Exponentialfunction bietet Gelegenheit, die Riemann'sche Fläche zu besprechen, von der in dem folgenden Abschnitte über die allgemeine Potenz und die Wurzel ein weiteres Beispiel auftritt. Die Betrachtung der rationalen Functionen leitet dann zu der Partialbruchzerlegung von $tg\,z$, zur Betrachtung der Facultät und der Productentwickelung von *sin* und *cos* über. Hiermit werden die einwerthigen Functionen verlassen und wird zur Untersuchung der mehrwerthigen geschritten, wie sie durch die algebraischen und die cyklometrischen Functionen geboten werden. Nachdem dann schärfere Convergenzkriterien entwickelt sind, werden die elliptischen Thetafunctionen eingeführt und einige der wichtigsten Eigenschaften abgeleitet, die bei der nun folgenden Aufstellung der elliptischen Functionen Verwendung finden. Zum Schlusse wird noch der Weierstrass'sche Satz bewiesen, der lehrt, wann das Convergenzgebiet einer Reihe erweitert werden kann.

Diese kurze Uebersicht des Inhalts zeigt schon, wie reichhaltig das Werk ist. Dabei ist die Darstellung durchweg klar und elementar, so dass das Studium des Buches auch einem Studirenden in den ersten Semestern keine grossen Schwierigkeiten bieten wird. Hinsichtlich der Auswahl des Stoffes hätte Referent gewünscht, dass der Herr Verfasser auch die Potenzreihen von mehr als einer Variabeln in den Kreis seiner Darstellung gezogen und die wichtigen Sätze bewiesen hätte, die Weierstrass über die Auflösung von Gleichungssystemen und Integration von Systemen von Differentialgleichungen schon vor längeren Jahren gegeben hat. Dafür hätte vielleicht die Betrachtung der Theta- und der elliptischen Functionen wegbleiben dürfen, die ja doch bei der gebotenen Beschränkung keine gründliche sein kann.

In Bezug auf die von Thomae sogenannten Gradzahlen mit ihren unendlich vielen Einheiten muss Referent bekennen, dass er immer noch nicht überzeugt ist, dass sie eine Mannichfaltigkeit von nur einer Dimension bilden.

Diese Punkte können jedoch den günstigen Eindruck nicht trüben, den Referent bei der Lecture des Buches gewonnen hat, das sicher den guten Erfolg haben wird, den wir ihm wünschen.

J. Lüroth.

Beiträge zur Theorie der Riemann'schen Fläche, von J. H. Graf. Bern 1878. 46 S. 8°.

Der Verfasser führt in der angezeigten Abhandlung an dem Beispiel einer sechsblätterigen Fläche mit 20 Verzweigungspunkten diejenigen Operationen durch, welche Clebsch und Gordan in ihren „Abelschen Functionen" zur Auffindung der Periodicitätsmoduln der zu der Fläche gehörigen Integrale angegeben haben. Er zeigt dann, wie man die vom Referenten und von Clebsch aufgefundenen Methoden zur Umordnung der Verzweigungspunkte, resp. der zu ihnen führenden Schleifen anzuwenden hat, um eine übersichtlich angeordnete Verzweigung herzustellen, welche sofort erlaubt, die canonischen Querschnitte zu ziehen. Endlich wird noch die sechsblätterige Fläche durch stetige Umwandelung in die Oberfläche eines Körpers übergeführt, der sechs Löcher oder Durchbohrungen hat, und dadurch ohne Schwierigkeit für die Ordnung des Zusammenhangs die Zahl 11 gefunden. Wenngleich der Verfasser die Untersuchung nicht bis zur Aufstellung der canonischen Querschnitte bei gegebener Lage der Verzweigungspunkte durchführt, so ist doch das Schriftchen ganz lesenswerth, weil es das zweite grössere Beispiel für die zur Aufsuchung der Periodicitätsmoduln nöthigen Operationen und dazu noch in zwei verschiedenen Behandlungsweisen giebt.

J. Lüroth.

Éléments de calcul approximativ par Charles Ruchonnet (de Lausanne). 3e édition revue. Paris, Lausanne, Zürich 1880. 64 S.

Der Titel allein genügt nicht, um den allgemeinen Inhalt der werthvollen kleinen Arbeit, über welche wir in Kürze berichten, zu erkennen. Anfangsgründe annähernder Rechnungsverfahren können doppelter Art sein. Es kann die Absicht darin bestehen, für Praktiker, sofern dieselben sich nicht fertig gestellter Rechenknechte oder graphischer und mechanischer Methoden bedienen wollen, Rechnungskunstgriffe zu lehren, mittels deren gewisse Ergebnisse zwar nicht vollständig genau, aber um so rascher erhalten werden. Die Absicht kann zweitens dahin gehen, Kunstgriffe, wie sie freilich der Praktiker ab und zu gebrauchen kann, dem Theoretiker dadurch zum würdigen Gegenstande seiner Betrachtung zu erheben, dass der Grad der Genauigkeit der Ergebnisse geprüft wird. Nur dieser letzteren Absicht hat der Verfasser sich befleissigt, und dass er damit einen glücklichen Wurf gethan, zeigt die Thatsache, dass die Abhandlung bereits in 3. Auflage erscheint, während es in französischer Sprache mehrere Schriften giebt, welche die gleiche Aufgabe behandeln. In deutscher Sprache fehlt unseres Wissens eine solche Monographie und nur in einzelnen Capiteln wissenschaftlich gehaltener Arithmetiken ist Aehnliches, aber naturgemäss nicht ebenso erschöpfend geboten. Als

eine der Grundlagen, auf welche die ganze Untersuchung sich stützt, nennen wir die Unterscheidung absoluter und relativer Fehler. Ist R der wahre, A der angenäherte Werth irgend einer Grösse, so heisst $\pm(R-A)$ der absolute, $\pm\frac{R-A}{R}$ der relative Fehler, und insbesondere die Grösse des letzteren kommt in Betracht. Der Verfasser hat vorzugsweise auf angenäherte Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung und Radicirung sein Augenmerk gerichtet und in letzterer Beziehung insbesondere die Aufgabe gelöst: Auf wieviele Ziffern genau muss man eine Zahl kennen, um im Stande zu sein, deren n^{te} Wurzel auf m Ziffern genau zu berechnen?

Cantor.

Bibliographie

vom 1. April bis 15. Mai 1881.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Classe. 1880, II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle, herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. 91. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. 18. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1876. 32. Jahrg., red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 16 Mk. 50 Pf.

Repertorium für Meteorologie, redig. v. H. Wild. Bd. 7, Heft 1. Leipzig, Voss. 10 Mk. 30 Pf.

Annales de l'observatoire de Moscou, publ. p. Th. Bredichin. Vol. VII, livr. 1. Leipzig, Voss. 8 Mk.

Bulletin de l'académie imp. des sciences de St. Petersbourg. T. XXVII, Nr. 1. Leipzig, Voss. pro compl. 9 Mk.

Mémoires de l'académie imp. d. sc. de St. Petersbourg. T. XXVIII, Nr. 3, 4. Leipzig, Voss. 3 Mk. 30 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Spiess, E., Erhard Weigel, weil. Professor der Mathematik und Astronomie zu Jena, der Lehrer von Leibnitz und Pufendorf. Ein Lebensbild. Leipzig, Klinkhardt. 2 Mk.

Reine Mathematik.

Fuchs, L., Ueber die Functionen zweier Variabelen, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebenen Functionen entstehen. Göttingen, Dieterich. 2 Mk.

Schering, E., Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen. Ebendas. 3 Mk.

Scherrer, F. R., Ueber ternäre biquadratische Formen. Frauenfeld, Huber. 1 Mk. 60 Pf.

Unverzagt, W., Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen. Wiesbaden, Kreidel. 1 Mk. 20 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber Determinanten höheren Ranges. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Ahlborn, A., Ueber die Berechnung von Summen von grössten Ganzen auf geometrischem Wege nach Eisenstein's Methode. Hamburg, Nolte. 2 Mk. 50 Pf.

Enneper, A., Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien. 2. Abh. Göttingen, Dieterich. 5 Mk. 60 Pf.

Weinmeister, J. Ph., Die Flächen zweiten Grades, nach elementarsynthetischer Methode bearb. Leipzig, Hinrich's Verl.-Conto. 1 Mk.

Weyr, E., Ueber biquadratische Involutionen erster Stufe. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Vogt, H., Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt. Breslau, Maruschke & Berendt. 1 Mk.

Bussler, F., Elemente der ebenen u. sphärischen Trigonometrie. Berlin, Enslin. 1 Mk. 60 Pf.

Spitz, C., Lehrbuch der ebenen Polygonometrie. 2. Aufl. Leipzig, Winter. 1 Mk. 80 Pf.

Hoffmann, J. C. V., Vorschule der Geometrie. 2. Lief. (Schluss.) Halle, Nebert. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Jackwitz, E., Die unendlich kleinen Schwingungen eines aus zwei Massenpunkten bestehenden Pendels. Posen, Jolowicz. 1 Mk.

Finger, J., Ueber die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Israel, C., Zur analytischen Behandlung scheinbarer Finsternisse. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Niessl, G. v., Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Israel, C., Reduction einer beobachteten Monddistanz auf den Mittelpunkt der Erde, Parallaxe und Transformation der astronomischen Coordinaten. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

Müller, J., Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8. Aufl., herausgegeben von L. Pfaundler. 3. Bd. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 6 Mk.

Krebs, G., Leitfaden der Elementarphysik für Gymnasien etc. Wiesbaden, Bergmann. 4 Mk. 60 Pf.

Engel, G., Das mathematische Harmonium; ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung der reinen Tonverhältnisse. Berlin, Habel. 1 Mk. 50 Pf.

Wassmuth, A., Ueber die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Wild, H., Die Temperaturverhältnisse des russischen Reichs. 2. Hälfte. Leipzig, Voss. 30 Mk.

Bredichin, Th., Recherches sur les queues des comètes. Ebendas. 4 Mk.

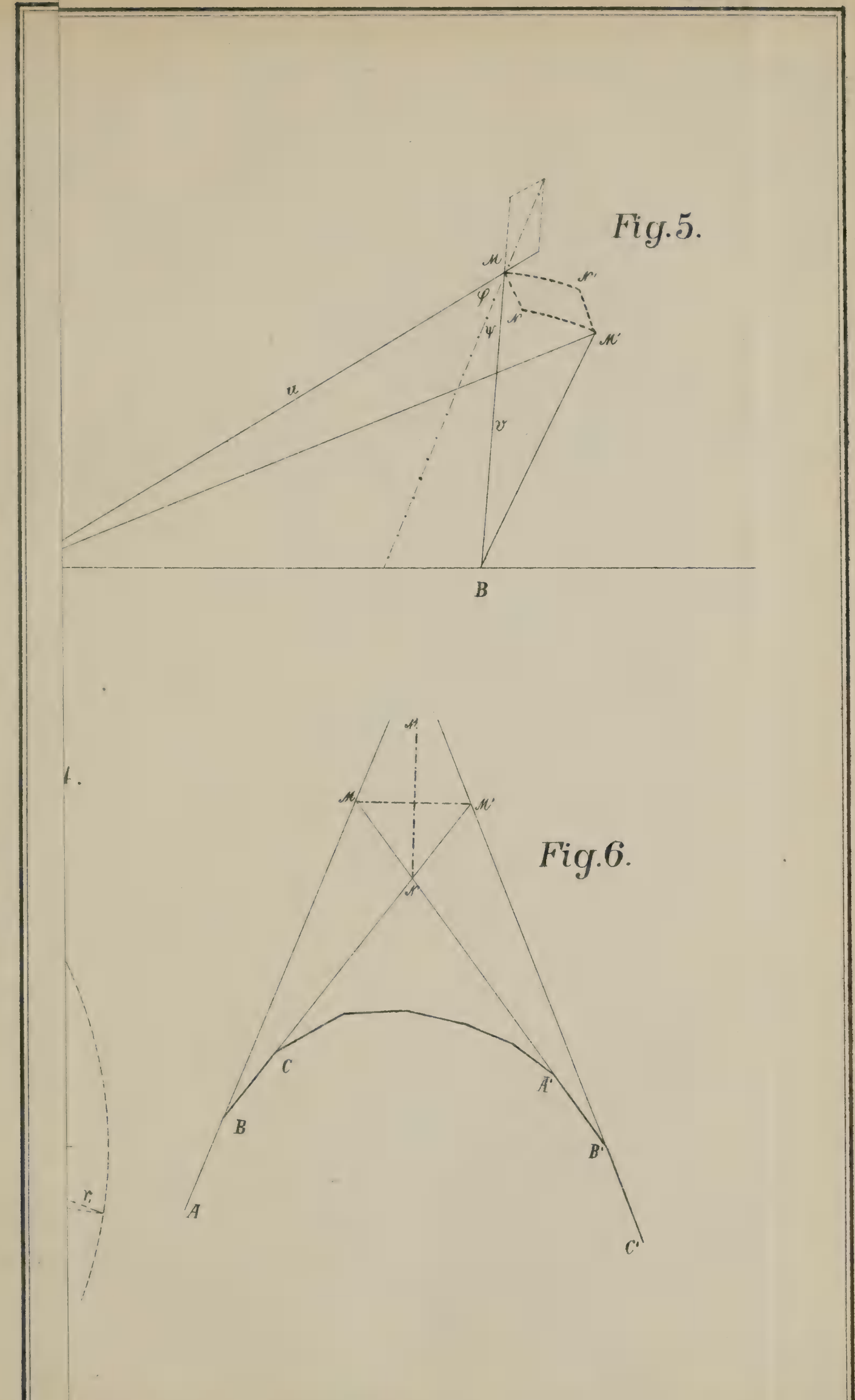
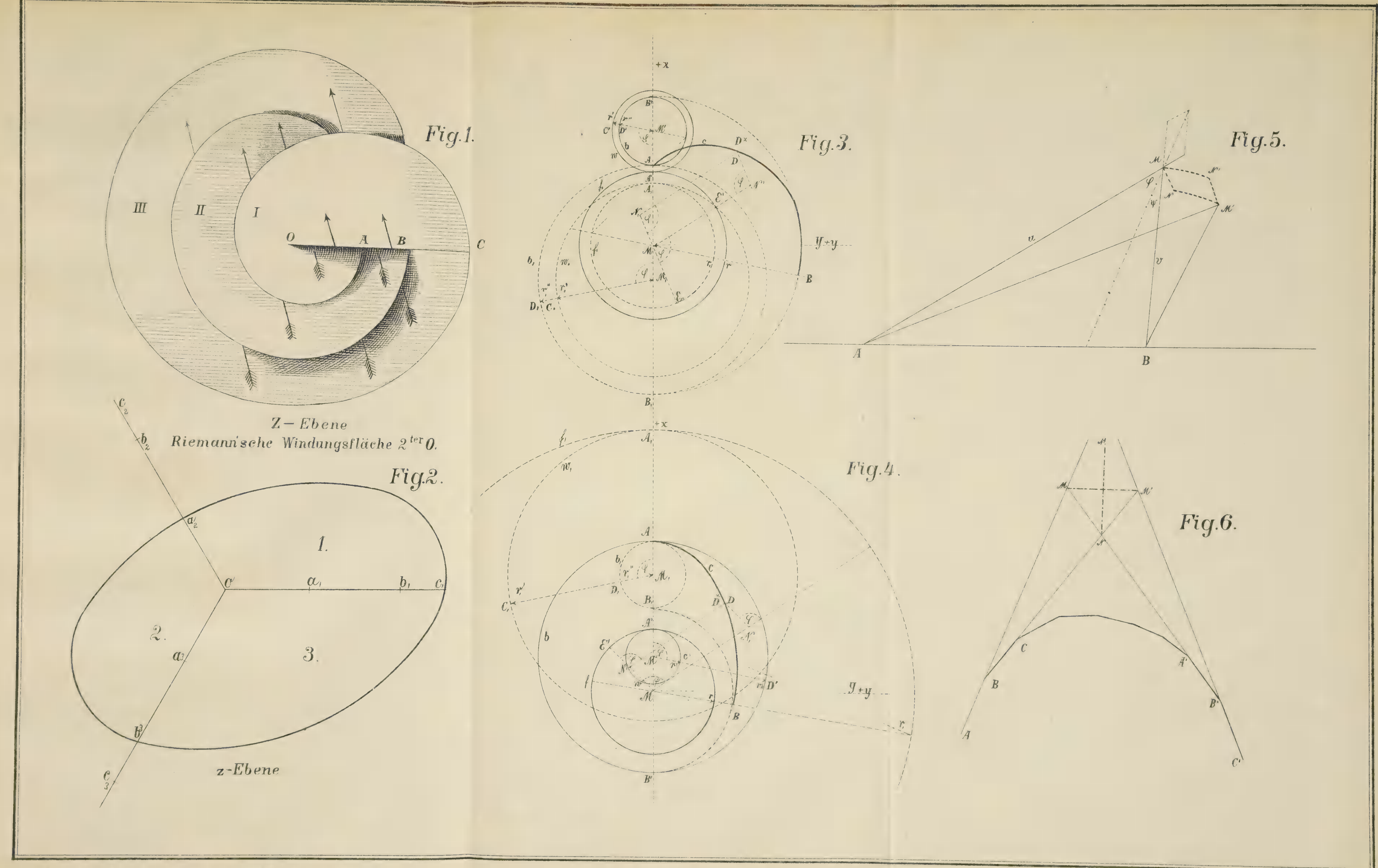


Fig. 5.
M
N'
φ
N
ψ
M'
u
v
B
Fig. 6.
M
M
M'
N
C
B
A
A'
B'
C'


Fig. 1.
III
II
I
O
A
B
C
Z – Ebene
Riemann'sche Windungsfläche 2ter O.
Fig. 2.
1.
2.
3.
z-Ebene
Fig. 3.
+x
Fig. 4.
Fig. 5.
A
B
Fig. 6.

Historisch-literarische Abtheilung.

Justus Bellavitis.

Eine Skizze seines Lebens und wissenschaftlichen Wirkens

von

Dr. Anton Favaro,

Professor an der Universität Padua.

Graf Justus Bellavitis ward am 22. November 1803 in Bassano, einer kleinen venetianischen Provinzialstadt, geboren. Seine Familie, ehemals wohlhabend, wo nicht reich, war von Generation zu Generation in ihren Vermögensverhältnissen herabgekommen, so dass der Vater unseres Justus, Ernst, nicht mehr im Stande war, seinem Sohne eine vollständige Erziehung angedeihen zu lassen. Um für sich und seine kleine Familie, die aus der Gattin Johanna Navarini und dem einzigen Sohne Justus bestand, den Lebensunterhalt erschwingen zu können, sah er sich in die Nothwendigkeit versetzt, in seiner Heimath das bescheidene Amt eines städtischen Rechners anzunehmen. Doch hinter diesem Rechner steckte immerhin ein Mathematiker, dessen Kenntnisse zwar keinen grossen Umfang hatten, der aber doch in den Elementen der Algebra und Geometrie Bescheid wusste; dieselben hatte er sich aus eigener Kraft, lediglich mit Hilfe eines zufällig aufgetriebenen alten Lehrbuches, zu eigen gemacht. Diese Anfangsgründe bildeten aber auch zugleich die Grundlage für den einzigen mathematischen Unterricht, welchen Justus Bellavitis, eben durch seinen Vater, erhielt, wie derselbe ausdrücklich hervorhob, als er dem Gedächtniss des Vaters seine im Jahre 1862 veröffentlichten „Elementi di geometria“ widmete.

Wir finden uns hier somit dem glänzenden Muster eines Autodidakten gegenüber, der noch dazu die ersten Jahre nicht allein auf seine eigene Bildung, sondern auch auf den Unterricht Anderer verwendete. In der That vergalt er die Unterweisung, welche ihm in der Schule seitens eines alten Priesters in der Grammatik zu Theil wurde, damit, dass er seinen Mitschülern arithmetische Kenntnisse beibrachte. Ueber die ersten Elementarclassen hinaus gedieh dieser Unterricht jedoch nicht, weil es der Familie an den nöthigen Mitteln gebrach, und nun begann wirklich jenes

strenge Selbstlernen, welches Bellavitis sich auferlegte; er studirte die alten und neuen Sprachen an der Hand von Grammatiken und Wörterbüchern, welche er, mittellos wie er war, sich erst zusammenleihen musste. Gleicherweise schrieb er sich für seine Zwecke Paoli's Algebra und Euklid's Geometrie ab, die ersten mathematischen Werke, die ihm der Zufall in die Hand spielte und die er in gewohnter Weise ohne fremde Beihilfe studirte. Von früher Jugend an gewöhnte er sich solchergestalt, Alles niederzuschreiben, und zwar fühlte er sich hierzu um so mehr genöthigt, als ihm die Natur ein gutes Gedächtniss versagt hatte; allein auch später begann er, wenn er sich mit irgend einem neuen Gegenstande gründlich vertraut machen wollte, stets damit, eine ausführliche Abhandlung darüber abzufassen, und im Verlaufe dieser Untersuchung sah er sich dann endlich an den Punkt geführt, wo er mit neuen Gedanken einsetzen durfte: so konnte man ihn häufig sagen hören, dass, wenn er nach irgend einem Buche Verlangen trug, er selbst nicht umhin konnte, eines zu schreiben.

Als Bellavitis heranwuchs, dachte er nur daran, die Nahrungssorgen seiner Familie erleichtern zu helfen, und trat deshalb, noch sehr jung, mit karger Besoldung in den Dienst des nämlichen städtischen Gemeinwesens von Bassano, welchem bereits sein Vater diente. In dieser mehr denn bescheidenen Stellung verblieb er bis zu seinem 38. Lebensjahre.

Gleichwohl liess er nicht ab vom Studium der Mathematik, für welches er eine stets lebhaftere Neigung fühlte, und jedes beliebige Buch, welches er sich verschaffen konnte, verhalf ihm zu weiterer Ausdehnung seines Wissens. Bei einem Freunde fand er das „Bulletin" von Férussac und gelangte bald dahin, in dieser damals hochgeschätzten Zeitschrift die Fragen durchdringen zu können, welche die Mathematiker jener Zeit beschäftigten. Bald darauf begannen ihm auch die eigenen Ideen zuzufliessen, er dachte mehr oder minder kühne Neuerungen aus und ganz ähnliche Gedanken, wie er ihnen viele Jahre später Gestalt und Oeffentlichkeit verlieh, finden sich in ihren Keimen bereits in seinen ältesten Manuscripten vor, die er mit grösster Sorgfalt aufbewahrte. Sie reichen zurück bis zum Jahre 1820, wo ihr Verfasser doch erst ein Alter von 17 Jahren erreicht hatte.

Justus Bellavitis war ohne allen Zweifel der geborene Mathematiker. Seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten behandeln bereits in seinen Grundzügen den neuen Wissenszweig, welchen mit so durchschlagendem Erfolge zu bearbeiten er sich berufen fühlte. Er erkannte deutlich die im Begriffe des Negativen liegenden Schwierigkeiten und suchte derselben Herr zu werden; weit grössere Hindernisse bereiteten ihm die imaginären Grössen und gegen sie kämpfte er schon in seinen frühesten Publicationen an; es wollte ihm scheinen, als vermöchten dieselben nicht

Gegenstand der Erforschung für eine mit dem Charakter vollster Strenge ausgestattete Wissenschaft zu sein, und so beschloss er, jene Gebilde vollständig aus der Algebra zu verweisen. Diese letztere betrachtete er als die Wissenschaft des Quantitativen und zeigte so, dass ihr aus der Verbannung jenes Begriffes kein Nachtheil erwüchse. Damals sah er noch nicht voraus, dass die Raumlehre sich der den angeblichen imaginären Grössen entsprechenden geometrischen Gebilde bemächtigen werde, allein auch später hielt er an jenen ältesten Ansichten fest und äusserte oftmals, das Imaginäre liesse sich ohne Schaden, vielmehr mit logischer Berechtigung, völlig aus der Algebra entfernen und der Geometrie, wohin es von Natur gehöre, einverleiben.

Dieser Ideengang war es, welcher Bellavitis unmerkbar zu seiner Methode der Aequipollenzen führte. Er erfand dieselbe im Jahre 1832, im Alter von noch nicht vollen 29 Jahren. Gewiss war es einerseits die geometrische Darstellung der imaginären Grössen von Buée, welche in ihm die Idee zu seinem Verfahren reifen liess, während er auf der andern Seite Bedenken tragen musste, seine Theorie auf die nämlichen complexen Zahlen zu stützen, welche er doch für unwürdig erklärt hatte, als Basis einer exacten Doctrin zu dienen. Den ersten Weg zu der neuen Methode eröffnete ihm die Ueberlegung, dass vier in Einer Ebene gelegene Strecken als in wirklicher geometrischer Proportion stehend aufgefasst werden können, wenn die erste und dritte sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach das gleiche Verhältniss unter sich haben, wie die zweite und vierte. Diesem nach zwei verschiedenen Gesichtspunkten sich gliedernden Verhältnissbegriffe verlieh Bellavitis später den Namen „geometrische Grösse“. Nunmehr erkannte er auch, wie sich der Begriff des Multiplicirens und Dividirens erweitern müsse, wenn man nicht allein der Grösse, sondern auch der Lage Rechnung trägt. Die Definition einer geometrischen Summe war damals allerdings bereits in der Wissenschaft vorhanden, allein Bellavitis wusste Nichts von den Schriften, in welchen dieselbe sich vorfand, und zudem kannte Möbius ebenso wenig die verallgemeinerten Begriffe des geometrischen Productes und Verhältnisses. Indem unser Autor die werthvolle Errungenschaft der geometrischen Summe und des geometrischen Verhältnisses festhielt, bemerkte er unschwer, dass sämmtliche Operationen, welche sich mittels der Auflösung von algebraischen Gleichungen bewerkstelligen liessen, auch auf die neuen Relationen ausgedehnt werden könnten. Diese letzteren bezeichnete er für's Erste als „geometrische Gleichungen“, während er ihnen einige Zeit nachher den Namen der „Aequipollenzen“ gab.

In seiner ersten Schrift über diesen Gegenstand fasste Bellavitis sein Verfahren als ein Mittel auf, die Eigenschaften von Punkten ein und derselben Ebene aus den Eigenschaften von Punkten ein und der-

selben Geraden abzuleiten; er zeigte, dass aus seinem allgemeinsten, diese Ableitung involvirenden Lehrsatze eine Fülle bekannter Theoreme als Corollarien sich ergab. Es war darunter der Pythagoräische Satz vom rechtwinkligen Dreieck, je eine bekannte Eigenschaft vom Sehnenviereck und von jenem Viereck, in welchem zwei Gegenwinkel einen Rechten ausmachen, ferner eine Bestimmung des Punktes, von dem aus gesehen die Seiten eines Dreiecks unter gegebenen Winkeln ($>60^0$) erscheinen, endlich eine Anzahl von Sätzen über harmonische Vierecke und speciell über das harmonische Centrum eines Punktsystems mit Bezug auf einen festen Punkt. Der Verfasser gab hier an, wie die für ein vollständiges Viereck stattfindende positive Involution sich auch auf ein bestimmtes Sechseck übertragen lasse, er verallgemeinerte die Sätze über die Brennpunkte und die conjugirten Durchmesser einer Ellipse und machte auch einige Anwendungen auf räumliche Geometrie. Etwas später folgten weitere Anwendungen auf den Durchschnittspunkt der drei Höhen im Dreieck, auf höhere Curven und dergleichen mehr. Es hat etwas Wunderbares, dass ihm die ganze Tragweite der Aequipollenzenlehre von Anfang an klar vor Augen stand, wie insbesondere seine dritte Arbeit aus dem Jahre 1835 für die ebene Geometrie beweist.

Inzwischen hatte Bellavitis das Möbius'sche Hauptwerk (Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827) kennen gelernt und die Wahrnehmung gemacht, dass die beiderseitigen Methoden zwar von Grundsätzen ausgingen, welche man leicht bis zur völligen Uebereinstimmung bringen konnte, doch aber sowohl nach Inhalt und Tendenz, als auch nach der äusseren Form sich bald völlig von einander entfernten. Er erblickte in Möbius' Werk eine äusserst bedeutende Leistung wegen der Allgemeinheit, in welcher die Behandlung gewisser Aufgaben mit den fruchtbarsten Projectionsmethoden wetteifere, besonders hinsichtlich der Transformation der Figuren, allein gleichzeitig überzeugte er sich auch, dass der Aequipollenzencalcul den barycentrischen als einen Unterfall in sich begreife und eine weit grössere Fruchtbarkeit für alle analytisch-geometrischen Anwendungen besitze: ein hervorragend brauchbares, mit dem barycentrischen Verfahren aber unvereinbares Werkzeug, gewinnt die Methode der Aequipollenzen zumal an dem Producte complanarer Strecken.

Bellavitis erinnerte sich auch, dass Carnot in seiner „Géométrie de position" den grossen Vortheil betont hatte, welcher der Geometrie aus der Einführung eines die Grösse und Lage gleichmässig berücksichtigenden Algorithmus erwachsen müsste, bei dessen Anwendung also die Probleme, ohne Recurs auf specielle geometrische Betrachtungen, lediglich durch einen, auf eine sehr geringe Anzahl allgemeiner Operationsgesetze sich stützenden Calcul aufgelöst werden könnten. Er hielt dafür, dass die Aequipollenzenrechnung diesen Anforderungen Car-

not's Genüge leiste, und viele hervorragende Geometer stimmen ihm hierin bei.

Gleichwohl war die neue Methode weit davon entfernt, eine günstige Aufnahme bei den Gelehrten zu finden; Carl Conti*, der später Bellavitis' intimster Freund wurde, erklärte sich zwar für dieselbe, erfasste jedoch nicht vollständig ihre Tragweite und Verwendbarkeit, und noch lange Zeit bekümmerte sich Niemand um die Aequipollenzen und um ihren Erfinder, den sonach ein gleiches Loos traf, wie Hermann Grassmann und dessen „Ausdehnungslehre".

Der Mathematiker von Bassano liess darum übrigens in seiner Thätigkeit durchaus nicht nach; unermüdlich fuhr er fort zu arbeiten und knüpfte fortwährend neue Beziehungen zu den Mathematikern des lombardisch-venetianischen Königreichs an, bis er endlich 1840 zum wirklichen Mitglied und zum Pensionär des k. k. Venetianischen Instituts ernannt wurde. Dies war der Anfang einer glänzenden Laufbahn, welche sich ihm bald nachher eröffnete. Anno 1841 wurde er Supplent für den Lehrstuhl der Mathematik und Elementarmechanik am Lyceum zu Vicenza, kurz darauf wirklicher Professor, und abermals vier Jahre später erhielt er einen Ruf auf die verwaiste Lehrkanzel der darstellenden Geometrie zu Padua in der Eigenschaft des Ordinarius. Im gleichen Jahre erwarb er sich nach zuvor bestandener Prüfung den philosophischen Lorbeer und endlich 1846 ward ihm unter Entbindung von jedem Examen der Grad eines Doctors der Mathematik ertheilt.

Ueber projectivische Geometrie hatte Bellavitis, noch bevor ihm die Ehre des Rufes an die Hochschule widerfahren war, bereits tiefe Studien angestellt und hochwichtige Abhandlungen auszuarbeiten begonnen. Er schrieb zuerst einen Essay über das grossartige Werk Poncelet's, beschränkte sich jedoch nicht etwa darauf, die darin enthaltenen Grundlehren zu beleuchten, sondern gab verschiedene neue Gesichtspunkte an, unter welchen sich diese Theorien betrachten liessen; auch wies er mehrfache Methoden nach, die imaginären Punkte der Curven graphisch darzustellen, und setzte die Relation seines geometrischen Verfahrens zu den analogen Verfahrungsweisen der Algebra ins Licht. In seinem ersten Aufsatze vom Jahre 1838 that er dar, dass er, der niemals aus seinem armseligen Bassano herausgekommen war, vollständig nicht nur mit den Schriften Poncelet's, sondern auch mit jenen eines Möbius, Plücker, Steiner, Magnus, soweit sie damals bereits in die Oeffentlichkeit ge-

* Conti (1802–1849) war Bellavitis' College in Padua, wo er angewandte Mathematik lehrte. Mit Bezug auf das Obengesagte vergleiche man sein Mémoire „Delle projezioni e delle equipollenze" im 5. Bande (1835) der „Annali del Regno Lombardo-Veneto".

treten waren, sich vertraut gemacht hatte. Als ihm nunmehr die Vorlesung über descriptive Geometrie übertragen worden war, also über eine Disciplin, deren obligatorische Einführung in die höheren Lehranstalten Italiens er bereits früher befürwortet hatte, da übersah er sofort, wie nützlich es für diese Wissenschaft sein müsse, wenn sie mit den Theorien der höheren Geometrie in die engste Verbindung gebracht würde, und dieser Aufgabe unterzog er sich denn auch sowohl in seinen Vorträgen, als auch in zahlreichen nach und nach über diesen Gegenstand abgefassten Druckschriften. Man weiss, dass Monge, der Gründer der darstellenden Geometrie, die Nützlichkeit einer Verschmelzung des Unterrichts dieses Wissenszweiges mit jenem der analytischen Geometrie entschieden betont hat, indem z. B. hieraus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen bemerkenswerthe Hilfsquellen zugeflossen waren.* Bellavitis nun that, indem er seine Behandlung der descriptiven Geometrie an verschiedene Punkte der theoretischen Geometrie anknüpfte, einen erheblichen Schritt zur Einführung der feinsten geometrischen Betrachtungsweisen in die Monge'sche Geometrie. Diese Verbindung zweier Wissenszweige hat dann in allerletzter Zeit, hauptsächlich durch Fiedler's und Schlesinger's Verdienst, eine abgeschlossene Form erhalten, indem jeder dieser beiden Gelehrten ein Compendium der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Methoden abgefasst hat. Obwohl Bellavitis Grund hatte, verstimmt zu sein über den geringen Erfolg seiner Methode der Aequipollenzen und noch mehr über den Umstand, dass einige seiner eigenen Gedanken, nachdem sie von auswärtigen Gelehrten in Umlauf gesetzt waren, im Vaterlande den dem eigentlichen Urheber versagten Anklang fanden, so liess er doch weder in seinen Studien, noch auch in seinen Veröffentlichungen irgend nach. Er wies darauf hin, dass jene Theoreme, aus welchen als Unterfälle die Flächen- und Kubikinhalte von Polygonen und Polyedern unter gewissen Umständen sich ergeben — Theoreme, die acht Jahre später durch v. Staudt** auf's Neue formulirt und von den Fachmännern auf das Beifälligste aufgenommen wurden —, bereits 1834 von ihm gefunden worden seien. Alsdann aber wendete er sich seinen wichtigen Forschungen über die Gleichungen zu und bereitete zugleich eine neue und vollständige Darlegung der Aequipollenzenlehre vor, um abermals derselben Eingang in Gelehrtenkreisen zu verschaffen. Während er hiermit beschäftigt war, erschienen W. E. Hamilton's Quaternionen, durch welche auch die Behandlung dreidimensionaler Gebilde einem bestimmten Algorithmus unterworfen erscheint; mit einer solchen Ausdehnung auf

---

* Vergl. z. B. Chasles, Geschichte der Geometrie, S. 405—413 der deutschen Ausgabe.

** Crelle's Journal, 54. Bd. S. 252 flgg.

den Raum hatte sich auch Bellavitis lange und fruchtlos beschäftigt, so dass er zuletzt den allerdings unrichtigen Schluss zog, seine Methode der Aequipollenzen müsse sich ganz ausschliesslich auf die Ebene beschränken.

Eine streitbare Natur, hatte Bellavitis seine polemische Gewandtheit bereits in seinen ersten Arbeiten an den Tag gelegt, durch welche er den Gebrauch des Imaginären der Algebra zu entreissen gedachte. Schonung kannte er nicht. So begann er literarische Fehden gegen Minich und Turazza, die beide seine Collegen an der Universität und durch enge Freundschaft ihm verbunden waren, so schrieb er überaus scharfe Artikel gegen Fusinieri's phantastische „neue Wissenschaft", gegen Bizio's Lehren betreffs einer neuen italienischen physisch-chemischen Theorie und gegen die übertrieben gepriesenen Entdeckungen von Zantedeschi. Geistreich, wie er war, liebte er es, in der Polemik, wenn die streng wissenschaftlichen Gründe erschöpft waren, die gefährliche Waffe des Spottes zu ergreifen und so seine Gegner zum äussersten Zorne zu reizen. Unter den glänzendsten Gefechtsmomenten dieser Art ragt wiederum am meisten hervor sein Kampf gegen die nichteuklidische Geometrie und gegen die n-fach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten. Er vermochte nicht zu verstehen, wie, wenn die Winkelsumme eines aus drei geodätischen Linien der Kugel gebildeten Dreiecks $> 2R$, dagegen diejenige eines ebensolchen auf der pseudosphärischen Fläche (von constanter negativer Krümmung) gebildeten Dreiecks $< 2R$ ist und abnimmt, je grösser das Dreieck wird, nunmehr die Winkelsumme des ebenen Dreiecks ebenfalls kleiner als 180^0 von irgend Jemand sollte angenommen werden können. An der Richtigkeit einer Behauptung sei trotz eines angeblichen Beweises zu zweifeln erlaubt, da sich ja immer ein Fehler eingeschlichen haben könnte; als eine ganz sichere Bekräftigung müsse man aber die Harmonie und den innern Zusammenhang der Wissenschaft betrachten, und dieses Kennzeichen vermisse man wahrlich in der Geometrie nicht: man dürfe also, schloss Bellavitis, wohl an der Richtigkeit der einen oder andern Demonstration, nicht jedoch an derjenigen eines Fundamentalsatzes zweifeln. Was die Räume von n Dimensionen anbetrifft, so möge es gestattet sein, eine Stelle aus einem seiner, wegen der sarkastischen Einkleidung besonders bemerkenswerthen Gespräche wörtlich anzuführen. „Die Mathematiker der Zukunft," so äusserte er sich, „werden sich nicht mit jener Erweiterung der Geometrie der Alten begnügen, sondern durch ein kühnes Analogiespiel von den Gebilden zweier und dreier Abmessungen zur Betrachtung derjenigen von vier, fünf u. s. w. Dimensionen fortschreiten. Von diesen Gebilden ist Niemand im Stande, sich die geringste Vorstellung zu machen; doch das verschlägt Nichts ... Von den Sonderbarkeiten, welche dabei herauskommen, eine Probe. Wenn ein Insekt Zeit seines Lebens auf einer ebenen

Fläche umherkriecht, so kann es sich nicht denken, dass ausserhalb dieser Ebene noch Etwas vorhanden ist, es wird somit den Raum blos als nach zwei Grundrichtungen ausgedehnt sich vorstellen, während wir doch seine drei Ausdehnungen kennen. Ganz ebenso kennen vielleicht die Engel den Raum von vier, die Erzengel jenen von fünf Dimensionen sammt der zugehörigen Geometrie, und Gott selbst endlich umfasst mit seinem Geiste den Begriff beliebig vieler Dimensionen. Dieser Argumentation lässt sich nicht widersprechen. Nur möchte ich glauben, dass fragliches Insekt, wenn es überhaupt mit einigem Verstande begabt ist, auch damit zufrieden sein wird, die zweidimensionale Geometrie, die einzige seinem Vorstellungsvermögen zugängliche, zu ergründen. Doch lassen wir diese Pangeometrie, durch die uns sonst alle logischen Gedanken umnebelt werden.“ Und auf diesem Schlusse beharrend, welcher nun einmal in seinen letzten Lebensjahren zu Bellavitis' Vorurtheilen gehörte, wollte es ihm nicht einleuchten, dass bedeutende Mathematiker, anstatt sich mit den bereits vorliegenden Fragen zu beschäftigen, neue Probleme zu schaffen vorzogen und sich tiefer, als ihre Geisteskraft zuliess, in diese versenkten, wobei sie weder der Wissenschaft, noch auch nur dem Studium neue Gebiete eröffneten, freilich aber bei ihren Irrgängen in mehr denn dreifach ausgedehnten Räumen nicht Gefahr liefen, durch die Thatsachen rectificirt zu werden.

Das Wenige, was wir in der Lage waren, anzuführen, und noch mehr die vollständige, diesen Aufsatz beschliessende Liste von Bellavitis' sämmtlichen Veröffentlichungen werden einen Begriff von der ausserordentlichen wissenschaftlichen Thätigkeit geben können, welche dieser hervorragende Mann entfaltete. Beauftragt mit dem Vortrag über Physik an der Hochschule, welchen er auch drei Jahre nacheinander hielt, bildete er sich zum Experimentator aus und hinterliess auch auf diesem Felde unzerstörbare Spuren seines Wirkens. Als er vom Lehrstuhl der descriptiven Geometrie weg auf jenen der höheren Algebra* und der analytischen Geometrie versetzt worden war, publicirte er gar bald die aus seinen Vorlesungen gezogenen Lehrbücher, die zum grossen Theil originelle Leistungen sind und auch dem Bedürfnisse des Anfängers entgegenkommen. Die fast unzählbaren Arbeiten, die Bellavitis verfasst hat, beziehen sich auf die nachstehend genannten Fächer: Philosophie, Pädagogik, Gesellschaftswissenschaft, Arithmetik, Algebra, höhere Analysis, Elementargeometrie, darstellende Geometrie, ebene Geometrie, Sphärik, Stereometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mechanik, Hydraulik, Physik im Allgemeinen, Wärmelehre, Optik, Elektricitätstheorie, Astronomie, Chemie, Mineralogie, Pflanzenphysiologie, Zoologie, Mikrobiologie, Meteorologie, praktische Geometrie, Theorie der Kunst, Geographie, Literaturgeschichte und Bibliographie!

* „Algebra complementare.“

Der Mangel einer geordneten und umfassenden wissenschaftlichen Jugendbildung hing Bellavitis durch sein ganzes Leben an und machte sich öfters in unerfreulicher Weise geltend. In einigen autobiographischen Notizen seines Nachlasses kommt er mehrfach auf diese fühlbare Lücke seiner Erziehung zurück und bekennt, dass er infolge derselben immer mit grossen Schwierigkeiten im Ausdruck und in der Darstellung zu kämpfen gehabt habe; darin ist wohl auch der Grund für eine gewisse Dunkelheit zu finden, welche sowohl in seinem Lehrvortrag, als auch in dem grösseren Theile seiner scientifischen Schriften unangenehm sich bemerklich machte.

Jene Seite seiner Thätigkeit jedoch, in welcher er besondere Befriedigung fand und welcher er mit dem Vorrücken der Jahre stets erhöhte Aufmerksamkeit zuwandte, bildete seine „Rivista dei giornali", von welcher es schwer hält, sich eine vollständig zutreffende Vorstellung zu bilden.

Noch während der Zeit, da Bellavitis als subalterner Communalbeamter in Bassano lebte, sparte er keine Mühe, mit den Fortschritten der Mathematik gleichen Schritt zu halten, und wenn er für den Anfang diesem Drange kein Genüge zu thun vermochte, so trug daran allein die Schuld die Dürftigkeit seines Geldbeutels der Anschaffung von Büchern und Zeitschriften gegenüber, sowie auch die Ungunst der Verhältnisse in einer so kleinen Stadt, wie Bassano, in welcher er der einzige Mathematikbeflissene war. Seine Ernennung zum Mitgliede des venetianischen Instituts eröffnete ihm die reichhaltigen Hilfsmittel dieser gelehrten Körperschaft, die mit allen bedeutenden Akademien der Erde im Schriftentausche steht. Bellavitis verstand neben Latein und Sanskrit auf's Beste die französische, deutsche und englische Sprache, leidlich Russisch und Portugiesisch, und nachdem ihm so die bibliographischen Sammlungen des Instituts zu Gebote standen, begann er, seinen Fachgenossen und dem Publicum von den bedeutenderen Arbeiten Bericht zu erstatten, die auf dem Gebiete der Physik und Mathematik ans Licht getreten waren. Diesen seinen Referaten war er schon frühzeitig bedacht, eine systematische Form zu ertheilen; zu Anfang beschränkte er sich auf die wichtigen Artikel in den „Comptes rendus" der Pariser Akademie und in den „Nouvelles Annales de Mathématiques", allein diese engen Grenzen genügten ihm bald nicht mehr und so rückte er sie denn weiter hinaus, alle Bücher und periodischen Schriften ins Bereich seiner Rapporte ziehend, deren er habhaft werden konnte. Allein auch damit war sein fieberhafter Thätigkeitstrieb noch nicht befriedigt; vielmehr verzichtete er jetzt darauf, die Arbeiten Anderer zu schildern, entnahm ihnen lediglich den Gegenstand und behandelte diesen selbst nach immer variirenden Methoden, am liebsten freilich mittels seiner Aequipollenzen. Allerdings erschwert seine abgekürzte Betrachtungsweise, die Einführung neuer Kunstausdrücke, die Wahl neuer Bezeichnungen und neuer Symbole,

sowie der Mangel jedweder Figur gar sehr die Lecture dieser Literaturberichte, zumal der zuletzt erschienenen, allein wer die nöthige Geduld hat, stösst darin auf sehr viele neue und bemerkenswerthe Materialien. An diesen Berichten arbeitete Bellavitis noch während der letzten Tage seines Daseins.

Seit 1866 Senator des Königreichs Italien, mit mehrfachen Orden geschmückt, Mitglied der ansehnlicheren italienischen und einiger auswärtigen Akademien, geliebt von Jedermann, angebetet von seiner Gattin und seinem einzigen Sohne, geachtet auch von seinen Gegnern, führte Bellavitis ein glückliches Dasein, wie er dies auch auf seinem Grabmal bezeugt wissen wollte. Am 6. November 1880 stand er Vormittags noch auf seinem Katheder in Ausführung seiner edlen Berufspflicht des Lehrens, am selben Tage um 9 Uhr des Abends war er bereits verschieden. Gewiss hätte sein Tod ein schmerzlicherer sein können; nahm er ihn wenige Stunden früher fort, so war seine Todesstunde eine von denen, welche zu den schönsten seines Lebens zählten, auf dem Lehrstuhl, die Hand an der Schultafel, wie einen braven Soldaten, der, die Kugel in der Brust, im Angesichte des Feindes niederstürzt!

Verzeichniss
der
im Druck erschienenen Schriften Justus Bellavitis'.

I. Selbstständige Veröffentlichungen.

Risposta alla difesa del Dott. Fusinieri dei suoi principii di meccanica molecolare tratti dall' esperienza. Bassano, tip. Baseggio, 1842.

Obbiezioni ai principii della Meccanica molecolare, ossia della nuova scienza creata dal Dott. Fusinieri. Bassano, tip. Baseggio, 1842.

Lezioni di Geometria Descrittiva con note contenenti i principii della Geometria superiore, ossia di Derivazione, e parecchie regole per la misura delle aree e dei volumi. Padova, tip. del Seminario, 1851. — 2. Auflage. Padova, tip. del Seminario, 1868.

Traduzione della teoria elementare delle macchine del Prof. Burg. Vienna, 1859.

Elementi di Geometria, Trigonometria e Geometria analitica esposti in via facile e spedita per servire di introduzione alla Geometria descrittiva, vi è aggiunta l'esposizione del Calcolo delle Equipollenze. Padova, tip. del Seminario, 1862.

Riassunto di un corso semestrale di Fisica pei farmacisti negli anni 1864, 1865, 1866. Padova. (Lithograph.)

Riassunto delle Lezioni d'Algebra date nell'Università di Padova nel 1867. Padova. (Lithograph.)

Riassunto d'Aritmetica e di Algebra. Padova, 1868. (Lithograph.)

Lezioni di Gnomonica. Padova, tip. del Seminario, 1869.

Riassunto delle Lezioni di Geometria analitica date nell'Università di Padova. Padova. (1870.) (Lithograph.)

Riassunto delle Lezioni di Algebra. Padova, tip. del Seminario, 1875.

II. Giornale sulle scienze e lettere delle Provincie Venete. Treviso.

Cenni sopra alcuni cangiamenti che potrebbero esser fatti nelle Macchine a vapore. VII. Bd. S. 149 (1824).

Sopra due nuovi oligocronometri. X. Bd. S. 80 (1827).

III. Giornale dell' italiana letteratura. Padova.

Annotazioni agli Elementi di meccanica del Prof. Venturoli. LXIV. Bd. S. 286 (1826).

Nota sulle equazioni che ammettono una soluzione della forma cardanica. LXV. Bd. S. 138 (1828).

Sul calcolo sublime e sulle sue applicazioni. *a)* Sulle dimostrazioni dei teoremi fondamentali del calcolo sublime; *b)* Sulla rettificazione delle curve, quadratura delle superficie u. s. w. LXV. Bd. S. 238 (1828).

Sul Trattato di Geometria Descrittiva del Prof. Carlo Sereni. LXVI. Bd. S. 3 (1828).

Nota sopra le classi delle curve considerate dai Sigg. Gergonne e Bobillier. LXVI. Bd. S. 72 (1828).

Osservazioni sull' uso delle quantità immaginarie, specialmente nell' algebra elementare. LXVI. Bd. S. 249 (1828).

IV. Poligrafo. Giornale di scienze, lettere ed arti. Verona.

Dell' uso della quantità immaginarie: osservazioni in risposta alla memoria del Prof. Toblini sulle quantità esponenziali e logaritmiche. V. Bd. S. 15 (1831).

Sopra una memoria del Melandri sulla teoria dei Sali. IX. Bd. S. 19 (1832).

Sulla natura delle forze resistenti dei corpi e quindi spiegazione della singolare rottura dei fili osservata dal Prof. Elice e di altri fenomeni analoghi. XII. Bd. S. 31 (1832).

Sulle quantità immaginarie. Risposta alle osservazioni pubblicate dal Prof. G. Grones in una lettera indiritta al Sig. F. Amalteo. XII. Bd. S. 211 (1832).

Sopra alcune applicazioni di un nuovo metodo di Geometria Analitica. XIII. Bd. S. 53 (1833).

Su alcuni principii fondamentali della teoria delle probabilità. Neue Serie IV. Bd. S. 1 (1836).

Sulla teoria dell' elettro-magnetismo. III. Bd. S. 222 (1840).

V. Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto. Padova.

Dimostrazione sintetica d'un nuovo teorema del Desgranges, di cui la dimostrazione analitica non fu inserita nel Bull. Math. Férussac, Oct. 1829, no. 90, perchè troppo lunga. I. Bd. S. 171 (1831).

Soluzione di due dubbj promossi da M. A. Cournot nel Bull. Math. Férussac, Févr. 1829 no. 34. I. Bd. S. 171 (1831).

Tentativi sui fondamenti dell' Algebra, in seguito alla Memoria del Sig. A. L. Cauchy sui metodi analitici inserita nel Novembre 1830 della Biblioteca Italiana. I. Bd. S. 271 (1831).

Sul calcolo sublime e sulle sue applicazioni. *c)* Sull' oggetto del calcolo sublime, ed osservazioni relative al calcolo inverso delle differenze finite. I. Bd. S. 347 (1831).

Cilindri di massima superficie inscritti in una sfera. I. Bd. S. 406 (1831).

Sulla determinazione dell' equatore del sistema solare. II. Bd. S. 57 (1832).

Sopra alcuni teoremi di geometria. II. Bd. S. 241 (1832).
Sulla Geometria derivata. II. Bd. S. 250 (1832).
Sopra alcune formule e serie infinite relative ai fattoriali ed agli integrali euleriani. IV. Bd. S. 10 (1834).
Teoremi generali per determinare le aree dei poligoni ed i volumi dei poliedri col mezzo delle distanze dei loro vertici. IV. Bd. S. 256 (1834).
Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle equipollenze). V. Bd. S. 244 (1835).
Teoria delle figure inverse e loro uso nella Geometria elementare. VI. Bd. S. 126 (1836).
Annotazioni ad una memoria del Prof. Gaspare Mainardi sullo sviluppo imperfetto continuo di una curva piana, estensione di un teorema memorabile di Giovanni Bernoulli. VII. Bd. S. 36 (1837).
Annotazione alla soluzione d'un problema di Geometria relativo al metodo inverso delle tangenti del Prof. S. R. Minich. VII. Bd. S. 165 (1837).
Metodo delle equipollenze. VII. Bd. S. 243; VIII. Bd. S. 17, 85 (1837—1838).
Considerazioni sulle formule per l'equilibrio di una verga elastica che si leggono nella seconda edizione (1833) della Meccanica del Poisson. IX. Bd. S. 202 (1839).

VI. Nuovi Saggi della I. R. Acccademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova.

Saggio di Geometria derivata. IV. Bd. S. 243 (1838).

VII. Annali di Scienze Matematiche e Fisiche compilati da Barnaba Tortolini. Roma.

Discorso sulla dottrina del calorico raggiante. I. Bd. (1850).
Discorso sulle proprietà generali dei corpi. I. Bd. S. 451 (1850).
Nota sulla specie della conica che passa per cinque punti dati. I. Bd. S. 249 (1850).
Nota sulla risoluzione numerica della $x^2+y^2=c$. I. Bd. S. 422 (1850).
Sulla risultante centrale di quantesivogliano forze date comunque nello spazio. III. Bd. S. 290 (1852).
Su alcune memorie di Geometria contenute nel vol. XXIV, 1850 delle Memorie della Società Italiana delle Scienze. III. Bd. S. 193 (1852).
Sulla descrizione organica delle curve del secondo ordine. III. Bd. S. 388 (1852).
Sulla derivazione delle curve. III. Bd. S. 508 (1852).
Sulle serie di numeri che comprendono i bernoulliani. IV. Bd. S. 108 (1853).
Teoria delle Lenti. IV. Bd. S. 260 (1853).
Sopra alcune formule derivate col mezzo dell' inversione. IV. Bd. S. 198 (1853).
Soluzioni mediante la derivazione di alcune questioni geometriche. V. Bd. S. 31 (1854).
Principii della Geometria di derivazione. V. Bd. S. 241, 428, 473 (1854).
Sulla partizione dei numeri e sul numero degli invarianti. Neue Serie II. Bd. S. 237 (1859).
Sulla inversione, e sui coefficienti dei fattoriali, sui numeri bernoulliani u. s. w. III. Bd. S. 60 (1860).

VIII. Atti dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia.

Considerazioni sulla dottrina del calorico raggiante. I. Bd. S. 74 (1840).
Nota intorno alla memoria del Prof. Zantedeschi sui nodi termo-elettrici dell' apparato Voltiano. I. Bd. S. 48 (1842).

Osservazioni alla risposta del Prof. Zantedeschi. II. Bd. S. 70 (1842).

Considerazioni sulla Memoria del Dott. Bizio intitolata: Ricerche intorno alle molecole dei corpi ed alle loro affinità dipendenti dalla forza espansiva alle medesime inerente. II. Bd. S. 112 (1842).

Sui vantaggi e sui danni che le ipotesi e le teorie possono recare alle scienze fisiche. II. Bd. S. 285, 303 (1843).

Sopra un nuovo barometro ad aria, destinato principalmente a misurare le altezze delle montagne. II. Bd. S. 367 (1843).

Risposta alle Considerazioni del Prof. Turazza intorno ad alcune obbiezioni mosse alle soluzioni di alcuni problemi di idraulica. IV. Bd. S. 14 (1844).

Considerazioni sul caso irreducibile e sulla risoluzione delle equazioni numeriche. IV. Bd. S. 151 (1845). — V. Bd. S. 259 (1846).

Sopra un oligocronometro, ossia strumento per misurare il tempo con molta precisione. V. Bd. S. 282 (1846).

Poche esperienze ed alcune considerazioni sulla coesione dell'acqua. VI. Bd. S. 86 (1847).

Alcune avvertenze sopra la memoria: Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium. VI. Bd. S. 461 (1847).

Dimostrazione col metodo delle equipollenze di alcuni teoremi in parte considerati dai Sigg. Bellati e Ridolfi. VI. Bd. S. 53 (1847).

Discorso sopra alcune parti della fisica. VI. Bd. S. 320 (1847).

Sulla legge di reciprocità fra gli interi immaginarii, relativamente ai residui biquadratici. VI. Bd. S. 9 (1847).

Dimostrazione delle formule del Gauss e del Turazza per l'uso dei compartimenti desiguali nella ricerca del valor numerico di un integrale fra dati limiti. Neue Serie I. Bd. S. 9, 74 (1850).

Osservazioni intorno ai colori accidentali. I. Bd. S. 50, 152 (1850).

Sul modo di provare direttamente il moto rotatorio della terra. II. Bd. S. 123 (1851).

Alcune notizie ed osservazioni che fanno seguito alla nota relativamente ad un modo di render palese la rotazione della terra. II. Bd. S. 140 (1851).

Sulla unità delle varie quantità fisiche e sull' importanza ed uso delle teorie per coordinare e raccogliere i fenomeni fisici. II. Bd. S. 173 (1851). — III. Serie I. Bd. S. 87 (1852). — IV. Serie I. Bd. S. 107, 221, 325 (1856).

Nota sul pendolo di Foucault. III. Serie I. Bd. S. 91 (1852.)

Sui metodi di Spitzer e di Moth per la risoluzione delle equazioni. I. Bd. S. 121 (1852).

Soluzioni di alcune questioni proposte nel giornale intitolato Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem et Gerono e non ancora risolte. IV. Bd. S. 79 (1853).

Pensieri sull' istruzione pubblica. IV. Bd. S. 119 (1853).

Sulla classificazione delle curve della terza classe. IV. Bd. S. 234 (1853).

Sopra un algoritmo proposto per esprimere gli allineamenti e sull' ordine o la classe del luogo geometrico dei punti o delle rette soggetti ad una legge di allineamento. VI. Bd. S. 53 (1854).

Sperienze fatte per verificare se vi possono essere in un medesimo conduttore correnti elettriche simultanee ed opposte. VI. Bd. S. 145, 176, 183 (1855).

Alcune opinioni sull' apparente grandezza degli astri. VI. Bd. S. 105, 139 (1855).

Intorno ad alcune questioni proposte nel giornale Nouvelles Annales. VI. Bd. S 313 (1855).

Intorno alle conseguenze di un abbondante prodotto d'oro. III. Serie I. Bd. S. 730 (1856).
Alcune parole sulle righe logaritmiche e sulla cosi detta rappresentazione degli immaginarii. II. Bd. S. 144 (1857).
Osservazioni su la teoria della probabilità. II. Bd. S. 299 (1857).
Del calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e delle sue relazioni col metodo delle equipollenze. III. Bd. S 334 (1858).
Nota sulle correnti elettriche simultanee ed opposte lungo uno stesso conduttore; sopra una nuova maniera per trasmettere contemporaneamente due dispacci in direzioni opposte mediante un solo filo telegrafico; e sopra un facile modo di applicare l'apparecchio telegrafico alla notazione delle osservazioni astronomiche. III. Bd. S. 113 (1858).
Studi sulle memorie pubblicate del Prof. Mainardi negli Atti dell' I. R. Istituto Lombardo. IV. Bd. S. 334 (1859).
Un problema sul giroscopio. III. Bd. S. 739 (1858).
Sulla risoluzione algebrica delle equazioni. IV. Bd. S. 55 (1859).
Cenni elementari sui discriminanti, invarianti e covarianti. IV. Bd. S. 65 (1859).
Relazione sulle tavole d'integrali definiti compilate da D. Bierens de Haan e pubblicate nel T. IV (1858) delle Memorie dell'Accademia di Amsterdam. IV. Bd. S. 413 (1859).
Sui vantaggi di una maniera di numerazione nelle città. IV. Bd. S. 420 (1859).
Di alcune memorie del Liouville intorno alle funzioni numeriche e del Poinsot sulla percossa massima. IV. Bd S. 536 (1859).
Applicazione della cinematica alla curvatura di tutte le trajettorie descritte dai punti di un sistema piano invariabile. IV. Bd. S. 991 (1859).
Relazione sul System elliptischer Bogen berechnet von J. G. Schmidt. Berlin 1842. IV. Bd. S. 1001 (1859).
Intorno ad una scrittura anonima sopra la quadratura del cerchio e proposta di restituire le scritture relative alla quadratura del cerchio, alla trisezione geometrica degli angoli e al moto perpetuo. V. Bd. S. 70 (1859).
Esposizione di una facile costruzione geometrica della soluzione del problema di determinare i poli dei circoli osculatori delle curve descritte dai varii punti d'una sfera che si muove intorno al proprio centro. V. Bd. S. 195 (1859).
Rivista di alcuni articoli dei Comptes Rendus dell'Accademia delle Scienze di Francia. IV. Bd. S. 1109 (1859).
Sul movimento istantaneo intorno ad un punto. V. Bd. S. 519 (1860).
Relazione sopra un'opera moderna del matematico indiano Ramchundra sui massimi e minimi. V. Bd. S. 714 (1860).
Seconda Rivista di alcuni articoli dei Comptes Rendus. V. Bd. S. 821 (1860).
Intorno ad alcune questioni di matematica pura elementare, parecchie delle quali sono proposte e non risolte nei nuovi annali del Terquem. V. Bd. S. 165 (1861).
Terza Rivista di alcuni articoli dei Comptes Rendus della Accademia delle Scienze di Francia e di alcuni questioni dei Nouvelles Annales de Mathématiques. VI. Bd. S. 376, 625 (1861).
Quarta Rivista di giornali. VII. Bd. S. 5, 123 (1862).
Quinta Rivista di giornali. VII. Bd. S. 244, 449, 619, 889 (1862).
Sesta Rivista di giornali. VIII. Bd. S. 171, 533, 921, 1266 (1863).
Prospetto dei lavori pubblicati dall' Istituto Veneto fino dalla sua fondazione. VIII. Bd. S. 1183; IX. Bd. S. 15 (1863).
Settima Rivista di giornali. IX. Bd. S 304, 405 (1864). — X. Bd. S. 17, 124, 139, 307, 1019, 1335 (1865).

Sull misura delle azioni elettriche. IX. Bd. S. 773, 807 (1864).
Ottava Rivista di giornali. XI. Bd. S. 275, 880 (1866). — XIII. Bd. S. 53 (1867).
Nona Rivista di giornali. XIII. Bd. S. 1461 (1868). — XIV. Bd. S. 456, 1249, 1993 (1869).
Decima Rivista di giornali. XV. Bd. S. 840, 1659 (1870). — XVI. Bd. S. 729, 1651 (1871).
Undecima Rivista di giornali. XVI. Bd. S. 2297 (1871). — IV. Serie I. Bd. S. 393 (1872). — II. Bd. S. 383 (1873).
Duodecima Rivista di giornali. II. Bd. S. 1197 (1873). — III. Bd. S. 203, 311, 1035, 1179, 1223 (1874).
Sulle nuove teorie relative ai fenomeni che si riferivano ai fluidi imponderabili. V. Serie I. Bd. S. 495 (1875).
Tredicesima Rivista di giornali. II. Bd. S. 121, 163, 317 (1876). — III. Bd. S. 173 (1877).
Quattordicesima Rivista di giornali. III. Bd. S. 247, 357, 1069, 1099, 1147 (1877).
Quindicesima Rivista di giornali. V. Bd. S. 299 (1879).
Giuoco americano, che consiste nell' ordinare i primi quindici numeri sopra uno scacchiere di sedici case, e ciò muovendo i varî numeri o dadi di un passo della torre degli scacchi. VI. Bd. S. 901 (1880).

IX. Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia.

Soluzioni grafiche di alcuni problemi geometrici del primo e del secondo grado trovate col metodo delle equipollenze. I. Bd. S. 225 (1843).
Sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale. II. Bd. S. 339 (1845).
Sul più facile modo di trovare le radici reali delle equazioni algebriche e sopra un nuovo metodo per la determinazione delle radici immaginarie. III. Bd. S. 109 (1846).
Considerazioni sulle nomenclature chimiche, sugli equivalenti chimici e su alcune proprietà che con questi si collegano. III. Bd. S. 221 (1847).
Alcune considerazioni sugli effetti dell' attrito e sul modo di calcolarli. IV. Bd. S. 201 (1851).
Saggio sull' algebra degli immaginarii. IV. Bd. S. 243 (1852).
Sul calcolo approssimato degli integrali d'ordine superiore. VI. Bd. S. 91 (1856).
Sulla risoluzione numerica delle equazioni. VI. Bd. S 357 (1857).
Sposizione elementare della teoria dei determinanti. VII. Bd. S. 67 (1857).
Della materia e delle forze. VIII. Bd. S. 87 (1859).
Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica. VIII. Bd. S. 241 (1860).
Relazioni di allineamento nei punti delle curve algebriche. VIII. Bd. S. 161 (1860).
Appendice alle memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni, inserite nei volumi precedenti delle Memorie dell' Istituto stesso. IX. Bd. S. 177 (1860).
Sunto dell' opera del Salmon Lessons introductory to the modern higher Algebra (Dublin 1859) ossia della teoria delle sostituzioni lineari. IX. Bd. S. 237 (1861).
Pensieri sopra una lingua universale e su alcuni argomenti analoghi. XI. Bd. S. 33 (1863).
Determinazione numerica delle radici immaginarie delle equazioni algebriche. XI. Bd. S. 463 (1864).
Considerazioni sulla matematica pura. XIV. Bd. S. 1 (1867). — XV. Bd. S. 375 (1870). — XVII. Bd. S. 189 (1872).
Tavole numeriche del Logaritmo-integrale ossia dell' esponenziale integrale e di altri integrali euleriani. XVIII. Bd. S. 125 (1874).

Sulla Logica. XVIII. Bd. S. 321 (1874).
Sulle origini del metodo delle equipollenze. XIX. Bd. S. 449 (1876).
Dei libri di ragione a scrittura doppia e della Logismografia. XXI. Bd. II. Th. S. 379 (1880).

X. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Instituti Bononiensis. Bononiae.

Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium. VIII. Bd. S. 445 (1846).

XI. Enciclopedia Italiana del Tasso. Venezia.

Die Stimme: Facce, Falsa posizione, Fattori, Figurati (numeri), Fochi, Formule, Forza, Frazione, Funzione, Geodesia, Geometria, Gnomonica, Gravità. — (1837—1853.)

XII. Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze. Modena.

Sulla classificazione delle curve del terzo ordine. XXV. Bd. II. Th. S. 1 (1851).
Sposizione del metodo delle equipollenze. XXV. Bd. II. Th. S 225 (1854). — Französisch von Laisant unter dem Titel: Exposition de la Méthode des équipollences. Paris, Gauthier-Villars. 1874. — Böhmisch von Dr. Zahradnik unter dem Titel: Methoda equipollenci cili rovnic geometrickijch. Praze. Tiskem Dra Ed. Gregra-Nackladem Jednoty Ceskych Mathematiki. 1874.
Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze. II. Serie I. Bd. S. 126 (1862).
Su alcune curve di facile costruzione. III. Bd. Nr. 4 (1879).

XIII. Rivista periodica dei lavori della I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova. Padova.

Calcolo ed esposizione elementare delle due prime funzioni ellittiche. III. u. IV. Quartal (1851—1852); S. 149 (1852).
Soluzione di alcuni problemi di Geometria descrittiva proposti nel giornale Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem. III. u. IV. Quartal (1852 bis 1853); S. 279 (1853).
Considerazioni ideologiche sulla matematica pura. III. u. IV. Quartal (1854—1855); S. 169 (1855).
Sulla dottrina fisico-chimica così detta italiana. V. Heft S. 89 (1857).
Della visione e dello stereoscopio. VI. Heft S. 170 (1858).
Alcune parole sulla proprietà letteraria. VI. Heft S. 206 (1858).
Risposta all' apologia del Professore Bartolomeo Bizio sulla dottrina fisico-chimica italiana. VII. Heft S. 76 (1859).
Sopra alcuni studî dei Sigg. Dorna e Menabrea intorno alle pressioni sopra più di tre appoggi. IX. Heft S. 33 (1861).
Pensieri sulla istruzione popolare. XII. Heft S. 29 (1863).
Della istruzione per la via degli occhi. XIV. Heft S. 92 (1865).
Utopie. XVI. Heft S. 5 (1867).
Memoria sul calcolo delle probabilità. XXI. Heft S. 37 (1872).
Reminiscenze della mia vita. XXVII. Heft S. 5 (1877).

XIV. Crelle's Journal. Berlin.

Nouvelle règle pour reconnaître en plusieurs cas l'absence de racines réelles d'une équation algébrique dans un intervalle donné. L. Bd. S. 263 (1855).

XV. Il Raccoglitore. Pubblicazione annuale della Società d'Incoraggiamento. Padova.

Discorso I. Misurazione delle aree. IV. Bd. S. 3 (1855).
„ II. Misurazione dei volumi. V. Bd. S. 3 (1856).
„ III. Del peso e del peso specifico. VII. Bd. S. 47 (1858).
„ IV. Del lavoro meccanico. VIII. Bd. S. 75 (1859).

XVI. Nouvelles Annales de Mathématiques. Paris.

Sur l'existence du pseudo-centre dans tout polyèdre. XIII. Bd. S. 191 (1854).
Sur la méthode des équipollences. XIV. Bd. S. 60 (Bull. de Bibl. u. s. w.) (1855).

XVII. Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma.

Sulla risoluzione delle congruenze numeriche e sulle tavole che danno i logaritmi (indici) degli interi rispetto ai varî moduli. III. Serie I. Bd. S. 778 (1877).
Sulla Statica. III. Serie V. Bd. S. 29 (1880).
Sviluppi in serie delle funzioni implicite, e rami infiniti delle curve algebriche. III. Serie V. Bd. Nr. 4 (1880).

Recensionen.

Die Beobachtung der Sterne sonst und jetzt. Von J. Norman Lockyer, übersetzt von P. Siebert. Mit 217 in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig, 1880.

Anleitung zur Durchmusterung des Himmels. Astronomische Objecte für gewöhnliche Teleskope von Dr. Hermann J. Klein. Mit 75 in den Text eingedruckten Holzstichen, 5 Tafeln, 4 Sternkarten und 1 Titelbilde. Braunschweig 1880.

Zwei populäre astronomische Werke, welche sich ergänzen und im Allgemeinen dem Publicum empfohlen werden können. Beide sind ursprünglich in englischer Sprache erschienen, das erste eine getreue Uebersetzung, das zweite eine vollkommene, mehr für das deutsche Volk berechnete Umarbeitung einer kleineren Schrift von Webb (Celestial objects). Bei der bekannten Vorliebe der Engländer, sich um die Arbeiten der Gelehrten anderer Länder, namentlich der Deutschen, wenig zu kümmern, hätte auch das erste Werk eine für Deutschland berechnete Umarbeitung erfahren sollen. Das Capitel über die Spectralanalyse, Photometrie, wird diese Forderung genügend belegen, so dass es nicht nöthig ist, auf andere Punkte in dieser Beziehung hinzuweisen.

Das Werk von Lockyer ist im Wesentlichen eine astronomische Instrumentenkunde, in gemeinfasslicher Weise dargestellt und durch den historischen Entwickelungsgang dem Leser anziehend gemacht. Bisher fehlte ein derartiges Werk in Deutschland und es wird zweifellos von den zahlreichen Liebhabern astronomischer Forschung trotz seiner angedeuteten Mängel freundlich begrüsst werden.

Das Lockyer'sche Buch zerfällt in 6 Theile (33 Capitel). Im ersten Theile wird uns Einiges über die Beobachtung in der Zeit vor Erfindung des Fernrohrs mitgetheilt, wie sich aus den ersten Aufzeichnungen über stattgefundene Sonnen- und Mondfinsternisse, besondere Planetenconstellationen die Beobachtungen der Sternhöhen mit einfachen Apparaten, dann die Bestimmungen des Erdumfanges durch Eratosthenes, Posidonius, die der Sternörter mit verhältnissmässig grosser Genauigkeit durch Tycho de Brahe entwickelten. Letztere Beobachtungen führten zur Entdeckung der Kepler'schen und des Newton'schen Gesetzes. Bei diesem grossen Wendepunkte beginnt der zweite Theil, in welchem nach kurzen Mittheilungen aus der Lehre der Optik die Fernröhre, sowohl die auf Brech-

ung als auf Reflexion beruhenden, ihre Verfertigung, ihre Leistungsfähigkeit — hier ist überall der Reflector viel ausführlicher, als der Refractor behandelt — besprochen werden. Im dritten, vierten und fünften Theile werden die Uhren, die Instrumente zur Bestimmung der Zeit und absoluten Sternörter (Meridianinstrumente), sowie die der relativen Ortsbestimmungen (Aequatoreale und Mikrometer) nebst den Angaben zur Aufstellung der Instrumente und Berichtigung der Fehler besprochen, soweit es in den Rahmen des Buches passt. Die Anordnung der einzelnen Capitel in diesen drei Theilen hätte wohl eine andere sein können, indem Alles, was sich auf Uhren bezog, in einen Theil, das Meridianinstrument für sich und die Mikrometer mit dem Aequatoreal in einen Theil vereint wären.

Der letzte Theil enthält die physische Astronomie — die Abschnitte, welche in Deutschland unter dem Namen der Astrophysik zusammengefasst werden —, Spectralanalyse, Photographie, Photometrie etc., das Gebiet, auf welchem der Verfasser seine grosse Berühmtheit erlangt hat.

Die sehr zahlreichen Abbildungen sind, wie immer bei derartigen Werken, eine angenehme Zugabe, erleichtern Verständniss und Anschaulichkeit. Im vorliegenden Buche steht ihre Ausführung, sowie übrigens die gesammte Ausstattung, wesentlich hinter anderen, im gleichen Verlage erschienenen illustrirten Werken zurück und ganz speciell gegen die Klein'sche Anleitung zur Durchmusterung.

Dasselbe giebt in drei Abschnitten das Instrument — Fernrohr, Aufstellung, Beobachtungsweise —, das Sonnensystem, den Sternenhimmel. Es ist geschrieben für die Besitzer von grösseren und kleineren Fernrohren an erster Stelle und soll denselben diejenigen Objecte bezeichnen, welche sich mit den betreffenden Hilfsmitteln beobachten lassen; an zweiter Stelle wendet es sich überhaupt an die Freunde der Astronomie, ohne sich auf irgendwelche theoretische Auseinandersetzungen einzulassen. Die Mehrzahl der Objecte hat Klein selbst im Laufe der Jahre beobachtet und vermag daher über ihre Sichtbarkeitsverhältnisse eigenes Urtheil abzugeben. In sehr vielen Fällen führt er aber an erster Stelle die besten Beobachtungen anderer Astronomen citirend an. Referent hat bereits früher seine Ansicht über die vermeintlichen Mondveränderungen auseinandergesetzt und will heute nicht auf dieselben zurückkommen. Ihm würde das Werk noch beträchtlich lieber sein, wenn der Verfasser die Veränderungen auf der Mondoberfläche, sowie auch an den Nebelformen nicht so positiv behauptete — um so mehr, da es sehr gefährlich ist, dem grossen Publicum in dieser Weise Anleitung zu geben, Veränderungen selbst zu beobachten, wo solche sicherlich in den allermeisten Fällen nur Täuschungen irgendwelcher Art sind.

Valentiner.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Theil. A. u. d. T. Lehrbuch der analytischen Curventheorie, nebst zwei vorausgehenden Abschnitten, enthaltend die Theorie der linearen Raumgebilde und die Kinematik. Von R. Hoppe, Professor a. d. Universität Berlin. Leipzig 1880. XV u. 89 S. 8°.

Den im XXII. Jahrgang dieser Zeitschrift angezeigten „Principien der Flächentheorie" hat Herr Hoppe das in der Ueberschrift angeführte Werkchen folgen lassen, und zwar als Vervollständigung eines Leitfadens der analytischen Geometrie des Raumes. Abgesehen von einer einleitenden Zugabe, in welcher auf acht Seiten die Elemente der Determinantentheorie abgehandelt sind, zerfällt die Schrift in drei Abschnitte. Auf S. 1—27 enthält der erste Abschnitt die Geometrie der geraden Linie und der Ebene für orthogonale Coordinaten. Es finden sich in diesem Abschnitte ziemlich vollständig und übersichtlich alle wesentlichen Probleme erörtert, zu welchen die Combination von gerader Linie und Ebene Veranlassung giebt, wie Winkel, welchen zwei Geraden oder Ebenen einschliessen, Distanz eines Punktes von einer Geraden oder Ebene u. s. w. Den Beschluss macht die Transformation der Coordinaten nebst einigen Bemerkungen über Polarcoordinaten. Dieser Abschnitt kann nur den Zweck haben, eine Verweisung auf andere Schriften, betreffend die ersten Elemente der Raumgeometrie, vermeiden zu wollen. Mit dem zweiten Abschnitte, welcher die kinematische Grundlage der Curven- und Flächentheorie begreift, beginnen die eigentlichen Betrachtungen, welche die Schrift verfolgt, nämlich: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie des Raumes. Lässt man einige mechanische Betrachtungen bei Seite, so handelt der zweite Abschnitt von den einhüllenden Flächen mit besonderer Rücksicht auf die Ebene als eingehüllte Fläche und die Bewegung einer Geraden. Ob die Einführung mechanischer Begriffe von Vortheil ist, möge dahingestellt bleiben. Monge, der Erfinder der Lehre von den eingehüllten Flächen und der Erzeugung von Flächen durch Curven, welche sich nach gegebenen Gesetzen bewegen, hat weder den Begriff der Zeit, noch der Geschwindigkeit nöthig gehabt. Es möchte auch gut gewesen sein, die Terminologie des Erfinders beizubehalten oder wenigstens anzumerken, um so mehr, als die Bezeichnungen von Monge allgemeine Verbreitung gefunden haben.

Der wesentlichste und grösste Abschnitt des I. Theils der analytischen Geometrie umfasst die Theorie der Curven. In Beziehung auf diesen Abschnitt enthält die Vorrede Folgendes: „Die Flächentheorie, welche nur Bekanntes verarbeitete, ist bereits in Zeitschriften einer Kritik gewürdigt worden; ich spreche bei dieser Gelegenheit den Verfassern derselben meinen Dank aus. Die Curventheorie hingegen, welche man nach Monge's Bearbeitung 50 Jahre lang ohne Fortbildung gelassen hatte, habe ich principiell neu gestaltet und durch die in § 54 definirte

Scheidung der zwei bestimmenden Functionen auf einen Standpunkt gebracht, wo sie nahezu ein geschlossenes Ganze bildet."

Die erste Abhandlung von Monge über Curven im Raume ist: Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure. (Mémoires de Mathématiques et de Physiques. Présentés à l'Académie R. des Sciences par divers Sçavans. Tome X pag. 511—550. Paris MDCCLXXXV.) Der wesentlichste Inhalt dieser Abhandlung ist im § XXVII der „Application de l'analyse à la géométrie" reproducirt und dadurch weiter bekannt geworden. Die erste Ausgabe des bemerkten Werkes unter anderem Titel ist von 1795, unter dem Titel „Application" von 1801. Eine ungemeine Bereicherung erhielt die Theorie der Curven noch zu Lebzeiten von Monge durch zwei Abhandlungen von Lancret in den „Mémoires présentés à l'Institut des sciences, belles lettres et arts par divers savans. Sciences mathématiques et physiques". Die erste dieser Abhandlungen in Tome I (pag. 416—454. Paris 1805) heisst: „Mémoire sur les courbes à double courbure"; dieselbe enthält neben manchen neuen Elementen u. A. die rectificirende Gerade, Ebene und Fläche (S. 420), die Filarevolventen (S. 435) etc. Ferner enthält Tome II (p. 1—79. Paris 1811) der bemerkten Publication Lancret: „Sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables." Uebrigens finden sich die Abhandlungen von Lancret schon im Traité von Lacroix vom Jahre 1819 verarbeitet. Die Fortbildung der Arbeiten von Monge hat nicht so trostlos lange gedauert, wie Herr Hoppe meint. Es mögen bei dieser Gelegenheit noch einige Arbeiten erwähnt werden, welche gegenwärtig die eigentliche Basis einer analytischen Theorie der Raumcurven bilden. In jedem Punkte einer Curve doppelter Krümmung existiren im Allgemeinen drei gegenseitig zu einander orthogonale Geraden, welche für die Untersuchung der Curven wesentlich sind. Die eine dieser Geraden, die Tangente, bot sich aus der Geometrie der planen Curven von selbst dar. Nicht so ist es der Fall mit den beiden übrigen Geraden, auf welche zuerst Cauchy hingewiesen hat. In seinen „Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie" (2 vol. Paris 1826 u. 1828) hat Cauchy (Tome I p. 276—328) die Curventheorie analytisch in einer Ausführlichkeit behandelt, welche sehr geeignet war, späteren Untersuchungen den Weg zu ebnen. Die Normale einer ebenen Curve hat auf den ersten Anschein im Raume kein Analogon. Um zu einer bestimmten Geraden zu gelangen, stellt Cauchy (l. c. I p. 285) folgende einfache Betrachtung an. Von einem bestimmten Punkte der Curve aus trage man dieselbe Länge auf der Curve und auf ihrer Tangente in gleicher Richtung ab. Die Endpunkte der beiden Segmente verbinde man durch eine Gerade. Lässt man die Segmente unendlich abnehmen, so convergirt die Gerade gegen eine Grenzlage, in welcher

sie normal auf der Tangente steht und dann die Hauptnormale der Curve in dem bestimmten Punkte heisst. Später (S. 299) ergiebt sich, dass Hauptnormale und Radius des osculatorischen Kreises dieselbe Richtung haben. Neben der Tangente und der Hauptnormale weist Cauchy (S. 292) auf eine dritte Gerade hin, welche auf jeder der beiden erstgenannten in ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte senkrecht steht. Die dritte Gerade hat Cauchy mit keinem besondern Namen belegt. In seinem umfangreichen „Mémoire sur les lignes non planes“ (Journal de l'École R. Polytechnique, Cahier 30, Tome XVIII p. 1—76. Paris 1845) nennt Saint-Venant die Gerade, welche in einem Punkte einer Raumcurve auf ihrer osculatorischen Ebene senkrecht steht, die Binormale der Curve in dem bemerkten Punkte. Die Bezeichnung wird dadurch motivirt (l. c. S. 17), dass die Binormale zu zwei Bogenelementen gleichzeitig normal ist, während alle anderen Normalen nur zu einem Bogenelement normal sind. Während sich bei Saint-Venant alle analytisch wichtigen Bestimmungsstücke einer Curve durch die Differentialquotienten der Coordinaten ausgedrückt finden, hatte Serret die glückliche Idee, die Cosinus der Winkel, welche die Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale bestimmen, in Beziehung auf einen Parameter zu differentiiren. Es ergab sich, dass die Differentialquotienten sich wieder durch die bemerkten Cosinus ausdrücken lassen, in Verbindung mit Krümmungsradius, Torsionsradius und dem Differentialquotienten des Bogens. Die von Serret gefundenen, ebenso einfachen wie nützlichen Formeln sind enthalten in Serret: „Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure“ (Journal de Mathématiques, T. XVI Année 1851 p. 193—207). Von seinen Formeln hat Serret eine Reihe bemerkenswerther Anwendungen gemacht, sowohl in der bemerkten Abhandlung selbst, wie in einigen folgenden. In seiner oben erwähnten Abhandlung (Note auf S. 48) hatte Saint-Venant unter anderen Fragen folgende aufgeworfen: Welche Curve kann mit einer zweiten Curve dieselben Hauptnormalen haben? Dieses Problem wurde zuerst von Bertrand in dem „Mémoire sur les courbes à double courbure“ (J. d. M. Année 1850 p. 332—350) gelöst und eine äusserst einfache Bedingung aufgestellt (l. c. S. 347). Dieselbe Bedingung hat Serret in: „Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure“ (J. d. M. Année 1851 p. 499—500) durch sehr einfache und elegante Rechnungen gefunden. Einige weitere sehr schöne Anwendungen seiner Formeln hat Serret in der folgenden Abhandlung gegeben: „Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes á double courbure“ (J. d. M. Tome XVIII Année 1853 p. 1—40). Ein Theil dieser Abhandlung (p. 30—40) ist dadurch merkwürdig, dass eine Inversion der Formeln auftritt bei Behandlung der Probleme, aus der Curve, welche den Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugel-

flächen oder der osculatorischen Kreise bildet, die primitive Curve zu finden. Es scheint, dass die oben erwähnten, von Serret gefundenen Formeln schon früher in etwas verschiedener Form aufgestellt worden sind. Die kurze Abhandlung Frenet's: „Sur les courbes á double courbure“ (J. d. M. Tome XVII Année 1852 p. 437—447) enthält die Fundamentalgleichungen von Serret, sie bildet den Auszug einer 1847 in Toulouse bei der dortigen Facultät eingereichten Dissertation. In dem Vorhergehenden sind nur die Arbeiten angemerkt, welche zur analytischen Fundamentirung der Curven doppelter Krümmung wesentlich beigetragen haben. In geometrischer Beziehung ist, sowohl was Zusammenstellung der Resultate, wie Erweiterung derselben anlangt, auf die vorzügliche Schrift zu verweisen: Schell, „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung. In rein geometrischer Darstellung“ (Leipzig 1859, 106 S. 8⁰). Die vorstehenden, etwas ausgedehnten historisch-literarischen Bemerkungen mögen ihre Entschuldigung finden durch die Genauigkeit der Angaben und Mittheilung einiger, vielleicht nicht allgemein bekannter Daten.

In seiner Schrift hat Herr Hoppe die Formeln von Serret und Frenet zu Grunde gelegt, dieselben in § 49 vollständig entwickelt und zum weiteren Gebrauch zusammengestellt. Es folgen dann weitere Betrachtungen über Torsion, Krümmungskreis, osculirende Spirale (Schmiegungshelix auf S. 82 bei Schell) und Berechnung der Bestimmungsgrössen einer Curve aus ihren Coordinaten. Es werden darauf die Ausdrücke, welche das Bogenelement nicht enthalten, von denen unterschieden, die vom Bogenelement abhängen. Vielleicht legt der Herr Verfasser zuviel Werth auf diese Bemerkungen, die sich wohl von selbst Jedem aufdrängen, welcher sich mit analytischer Geometrie beschäftigt. Unter der Bezeichnung „Elementaraufgaben“ enthalten die §§ 56 und 57 eine Reihe nützlicher Anwendungen der Formeln von Serret. Weitere Anwendungen dieser Formeln werden auf eine Eintheilung der Curven in Beziehung auf die Torsion gemacht.

Besondern Fleiss hat der Herr Verfasser auf das dritte und letzte Capitel seiner Curventheorie verwandt. In jedem Punkte P einer Curve bilden die Tangente, Hauptnormale und Binormale ein variabeles Coordinatensystem, welches der Herr Verfasser ein begleitendes System nennt. Dem Punkte P entspreche in Beziehung auf das bemerkte System ein Punkt P_1, dessen Ort eine neue Curve, die begleitende Curve, bildet. Sieht man eine Curve als Wendecurve der Enveloppe ihrer Krümmungsebenen an (man vergl. hierüber Serret auf S. 559 flg. der 1850 erschienenen 5. Ausgabe der „Application etc.“ von Monge), so wird dieses Verfahren zur Bestimmung einer Anzahl von Begleitenden angewandt. So z. B. wird angenommen, dass die Tangenten der Begleitenden successive den Tangenten, Binormalen, Hauptnormalen, rectificirenden Ge-

raden etc. der gegebenen Curve parallel sind. Die gefundenen Resultate lassen sich umkehren, der Ort des Punktes P_1 wird als gegeben angesehen und dann die primitive Curve bestimmt. Mit diesen vielfach eigenartigen Untersuchungen schliesst die Theorie der Curven. Da eine Verwerthung der Formeln von Serret in einem kurzen Abriss einer analytischen Theorie der Curven doppelter Krümmung bisher noch nicht vorhanden war, so möchte die Schrift des Herrn Hoppe Manchem, der keine Gelegenheit hat, die Originalabhandlungen zu lesen, zeitgemäss kommen. Der Referent kann auf manche schöne und interessante Resultate von Lancret, Jacobi, Molins u. A., welche Herr Hoppe als ausserhalb des Rahmens seiner Schrift liegend angesehen hat, nicht näher eingehen. Man findet den grössten Theil derselben in der schon oben gerühmten Schrift von Schell.

Göttingen. ENNEPER.

Die Fundamentaltheorien der neueren Geometrie und Elemente der Theorie von den Kegelschnitten, von H. SEEGER. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1880.

Das vortreffliche Buch, welches ich den Lesern dieser Zeitschrift hiermit anzuzeigen die Ehre habe, unterscheidet sich von anderen zur Einführung in die neuere Geometrie bestimmten Schriften weniger dem Inhalte nach, als in Bezug auf die Form. Der Verfasser hat sich hierüber in einem sehr lesenswerthen Schulprogramm (Güstrow 1879) ausführlicher ausgesprochen und ich erlaube mir, einen Hauptpassus daraus an dieser Stelle zu reproduciren.

„Ich meine,“ heisst es dort, „dass jedes in Schulen zu gebrauchende Lehrbuch der neueren Geometrie die allgemeinen Theorien und ihre Anwendungen in zwei auch äusserlich getrennten Theilen streng auseinanderzuhalten hat. Der erste Theil hat in knapper, von der Form des entwickelnden Vortrags sich sorgfältig fernhaltender Darstellung von der Conformität, sowie von den allgemeinen Beziehungen collinearer und reciproker Systeme zu handeln, von den Kegelschnitten aber nur soviel zu lehren, als erforderlich ist, um jene allgemeinen Betrachtungen zu einem befriedigenden Abschlusse zu bringen oder die Hauptangriffspunkte für die spätere Herleitung der so mannichfaltigen einzelnen Eigenschaften der Kegelschnitte zu gewinnen. Der zweite Theil legt dem Schüler, damit dieser in der Anwendung der Fundamentaltheorien und Fundamentaltheoreme sich übe, und damit durch diese Uebungen zugleich der Schatz seines geometrischen Wissens einen reichen Zuwachs erfahre, eine geordnete Sammlung von Lehrsätzen aus der Theorie der Kegelschnitte vor, wobei er sich der vollständig ausgeführten Beweise soviel wie möglich zu enthalten hat.“

Nach dem hiermit gezeichneten Plane ist nun das vorliegende Buch gearbeitet. Der erste Theil umfasst 77, der zweite 102, die beigefügte Aufgabensammlung 29 Seiten, und Referent ist der festen Ueberzeugung, dass in diesem engen Raume ein Material vorliegt, dessen Reichhaltigkeit wohl kein Schulmann vermehrt wünschen möchte. Ein abschliessendes Urtheil über den praktischen Werth der befolgten Methode kann freilich nur die Erfahrung an die Hand geben. Es ist auch nicht die Absicht des Verfassers gewesen, jeden Lehrer, welcher sein Buch dem Unterrichte zu Grunde legt, streng an die Methode binden zu wollen. Weiter heisst es in dem erwähnten Programm: „Hat der Schüler sich mit den allgemeinen Theorien gut vertraut gemacht und hat er sich darin geübt, einen Kegelschnitt, je nach Bedürfniss, bald als die collineare Umbildung eines Kreises oder auch als seine eigene collineare Umbildung, bald als das Erzeugniss conformer Punktreihen oder Strahlenbüschel, bald als die Directrix eines Polarsystems anzusehen, so wird ihm, im Ganzen genommen, die Herleitung der elementaren Eigenschaften des Kegelschnitts als ein heiteres Spiel erscheinen, und sollte ihm das Studium jener allgemeinen Theorien ja einige Selbstüberwindung gekostet haben, so wird er sich durch den Genuss, den ihm ein solches Spiel bereiten muss, überreichlich belohnt finden.“ Nach diesen frischen, herzerquickenden Worten fällt es allerdings schwer, die sonst so naheliegende Einwendung von der *vis inertiae* des Schulstaubes zu machen. Und trotz des im ersten Theile hervortretenden Muthes, Anfängern abstracte Theorien auseinanderzusetzen, glaubt ganz gewiss auch der Verfasser nicht, dass der geometrische Unterricht sich je ohne den ernstlichsten Schaden von der Anschauung entfernen dürfe. Heisst es doch in seinem Programm: „Bei der schriftlichen Bearbeitung einer geometrischen Aufgabe ist zwar zunächst richtige und gut motivirte Construction zu fordern. Es könnte aber nicht schaden, wenn hin und wieder auch mit besonderem Nachdruck Genauigkeit der Zeichnung verlangt und dem Schüler beispielsweise einmal aufgegeben würde, die Länge der beiden Axen einer gewissen Bedingungen genügenden Ellipse aus der Zeichnung auf ein Hundertstel genau zu ermitteln. Dazu müsste die Aufgabe bestimmte Angaben über die Lage der gegebenen Stücke enthalten. Dictirt der Lehrer die gegebene Figur nach Eingebung des Augenblicks, so ist er in Gefahr, in Bezug auf zweckmässige Anordnung derselben es manchmal recht unglücklich zu treffen.“

Referent kann sein Urtheil dahin zusammenfassen, dass ihm das Büchlein als die reife Frucht reicher pädagogischer Erfahrung und gediegensten Wissens erschienen ist. Hoffentlich haben die Leser sich selbst über die Methode des Verfassers aus den mitgetheilten Aeusserungen desselben ein klares Bild entwerfen können. Möge es dem Herrn Verfasser beschieden sein, dass auch andere Lehrer beim Gebrauche des

Buches dieselben günstigen Erfahrungen machen, von denen er in einer freundlichen Zuschrift dem Referenten Mittheilung gemacht hat.

Zu seinem Schmerze sind dem Verfasser einige zum Theil recht ärgerliche Unrichtigkeiten in das Buch hineingerathen. Die Mehrzahl derselben, wie z. B. S. 31 Anm. 1, S. 42 Z. 9 v. u. u. s. w, sind wohl der Darlegung von Specialitäten im Eifer des Vortrags entsprungen. Referent erlaubt sich, um die gegenwärtigen und zukünftigen Besitzer des Buches vor Irrthümern zu schützen, dieselben an den Herrn Verfasser dieserhalb zu verweisen, falls derselbe nicht vorziehen sollte, durch Beigabe eines gedruckten kleinen Fehlerverzeichnisses dem Buche einen Sicherheitspass mitzugeben.

Coesfeld, den 5. Februar 1881. K. Schwering.

F. Joachimsthal, **Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung.** 2. Auflage, bearbeitet von L. Natani. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig 1881, bei B. G. Teubner. VIII, 242.

Ein Vierteljahrhundert ist vergangen, seit Ferdinand Joachimsthal diese Vorlesungen in Breslau hielt und mit dem Gedanken umging, sie im Druck zu veröffentlichen. Neun Jahre sind es, dass Dr. Liersemann, ein Schüler des inzwischen verstorbenen Verfassers, dem er besonders nahe gestanden sein muss, wie daraus zu schliessen ist, dass Joachimsthal durch ihn seiner Zeit die wortgetreue Niederschrift der Vorträge hatte anfertigen lassen, die Herausgabe wirklich vollzog. Aehnlich wie Joachimsthal's Analytische Geometrie der Ebene wurde auch dieses Buch mit dem allgemeinsten Beifall begrüsst. Zeigte es doch die gleichen Tugenden der Kürze, der Fasslichkeit, welche jedoch nie in dem Maasse bevorzugt sind, dass die nothwendige Strenge darüber verloren gegangen wäre. Heute gelangen wir in Besitz einer zweiten Auflage, durch deren Besorgung Herr L. Natani sich verdient gemacht hat.

Herr Natani sagt in der Vorrede, es sei im Einverständniss mit Dr. Liersemann seine Absicht gewesen, das Buch als Joachimsthal's Eigenthum und als Elementarbuch bestehen zu lassen. In beiden Beziehungen ist es ihm vollauf gelungen, dieser Absicht zu genügen, in der ersteren so sehr, dass wohl keinem Leser der neuen Auflage der Gedanke kommen kann, es seien gegen die erste Auflage wesentliche Veränderungen eingetreten. Und doch ist dem so. Herr Natani hat nicht nur diejenigen Joachimsthal'schen Untersuchungen, welche in der ersten Auflage die Nachträge bildeten, in den fortlaufenden Text hineingearbeitet, er hat, wie genaue Vergleichung der beiden Auflagen

erkennen lässt, an den verschiedensten Stellen die bessernde und ergänzende Hand angelegt, deren ein jedes Werk, mag es mit noch so grosser Aufmerksamkeit, mit noch so viel Liebe zum Drucke vorbereitet worden sein, bei zweiter Auflage dringend bedarf. Man sehe die §§ 1, 3, 4, 5, 8, 12, 21, 29, 35, 46[a], 52, 62, 64[a], 70, 71, 76, 76[a], 77, 82, 91, 101[a] durch, und man wird finden, dass nur Nothwendiges, wir möchten sagen Unentbehrliches, in fast unmerklicher Weise geschehen ist. Wir erwähnen beispielsweise die Lehre von den Indicatricen, welche früher fehlte und gegenwärtig die Darstellung durchzieht. So ist trotz engerem Satze der Umfang der Joachimsthal'schen Vorlesungen von 174 auf 201 Seiten angewachsen.

Den Schluss bildet auf S. 202—242 ein Anhang zur zweiten Auflage, für welchen Herr Natani in der Vorrede die alleinige Verantwortlichkeit beansprucht, welche zu tragen das sicherlich übereinstimmende Urtheil der Leser ihm keinenfalls schwer machen wird. Von dessen vier Abtheilungen ist die erste einem directen Beweise des Jacobi'schen Satzes über Raumdreiecke gewidmet, deren aus Curven bestehende Seiten die Eigenschaft besitzen, dass je zwei Seiten in ihrem Schnittpunkte eine gemeinschaftliche Hauptnormale haben. Die zweite Abtheilung ist einem neuen Coordinatensystem gewidmet, dessen Veränderliche s, l, m heissen und welches von dem Erfinder den Namen der Coordinaten der einfachsten Transformationen erhalten hat, weil beim Uebergange zu einem neuen System jede Coordinate mit der gleichnamigen des neuen Systems eine constante Summe oder Differenz besitzt. Die Bedeutung von s ist, wie gewöhnlich, die der Bogenlänge; l ist der Winkel, welchen die Berührungslinie an die durch das System zu bestimmende Curve in einem Punkte M mit einer ersten Berührungslinie bildet; m ist der Winkel, den die Krümmungsebene in M mit einer ersten Krümmungsebene bildet. Die Gleichung $f(l, s) = 0$, die bei ebenen Curven ausreicht, nennt Herr Natani die Bogengleichung. Krümmungsgleichung heisst ihm die bei doppeltgekrümmten Curven hinzutretende $\varphi(l, m) = 0$. Eine dritte Abtheilung liefert Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung, insbesondere zur sogenannten Totalkrümmung von Gauss, deren Verallgemeinerung eben zu dem in der ersten Abtheilung bewiesenen Satze von Jacobi geführt hat. Die vierte und letzte Abtheilung beschäftigt sich mit Elementargrössen der Flächentheorie.

Wir sind überzeugt, dass die Studirenden unserer Hochschulen, für welche das Buch recht eigentlich bestimmt ist, der neuen Auflage mit noch besserem Erfolge sich bedienen werden, als seither der früheren, und dass es bei dieser zweiten Auflage nicht bleiben wird. CANTOR.

Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, für höhere Lehranstalten bearbeitet von J. FRANZ MEYER, Lehrer der Mathematik und Mechanik an der königl. Realschule I. O. zu Hildesheim. Hannover 1881, Helwing'sche Verlagsbuchhandlung (Th. Mierzinsky, königl. Hofbuchhändler). VI, 166.

Wir haben hier über ein Buch zu berichten, um welches es schade ist, dass die Form den Inhalt in so wenig günstigem Lichte erscheinen lässt. Der Verfasser hat es verstanden, den gewöhnlich behandelten Stoff anders, als in den meisten Lehrbüchern und, wie wir zugeben, recht hübsch anzuordnen. Er hat theilweise neue originelle Beweise geliefert, worunter wir die Darstellung der Berührungslinien an die Ellipse hervorheben, ausgehend von der Eigenschaft, dass die Entfernungssumme eines Punktes der Berührungslinie nach den Brennpunkten im Berührungspunkte ein Minimum sein muss, und die auf ähnliche Eigenschaften sich gründende Erörterung der Berührungslinien an Hyperbel und Parabel. Aber er hat leider nicht verstanden, lesbar zu schreiben; er hat nicht verstanden, sehr sinnentstellende Druckfehler zu vermeiden; er hat in Dem, was die Vorrede Knappheit der Form nennt, sich so weit verstiegen, dass Vieles geradezu falsch ist, was bei Zufügung weniger, offenbar absichtlich weggelassener, aber nothwendiger Worte richtig wäre. Wir nennen eine Schreibweise unlesbar, wenn S. 15 von X und Y als Gleichungspolynomen zweier Geraden die Rede ist, welche nicht die Coordinatenaxen sind, und wenn ebenda jene Axen X und Y heissen; oder wenn S. 65 plötzlich ein Winkel v vorkommt, während vorher u und v regelmässig die Leitstrahlen bedeuteten; oder wenn S. 116 derselbe unglückliche Buchstabe v in der Gleichung $cos v = v N$ links vom Gleichheitszeichen einen Winkel, rechts eine Verhältnisszahl bedeutet! Wir nennen es sinnentstellende Druckfehler, wenn S. 32 Z. 13 oder statt und, S. 57 Z. 21 positiv statt negativ stehen blieb. Der Luxus des ss in Assymptoten scheint fast kein Druckfehler zu sein, so häufig tritt er auf, wenn gleich nicht so häufig, wie das Wörtchen n u n, welches in seiner fortwährenden Wiederkehr geradezu aufregend wirkt. Welcher Druckfehler S. 132 sich eingeschlichen hat, um den Satzbau „Zeichnet man x aber, die Kurve, auf eine Ebene, d. h. giebt man die Gleichung einer Projektion der Kurve an, so ist alsdann x, y beschränkt veränderlich" zu ermöglichen, ist uns unerfindlich. Falsch durch mangelnde Zusätze sind so massenhaft auftretende Stellen, dass wir nur beispielsweise folgende anführen: S. 64 „Der Ausdruck rechts ist aber als Ellipsengleichung gleich 1"; S. 68 „Beschreibe über PF_1 einen Kreis"; S. 149 „Unter einem Kegel versteht man eine Oberfläche, die entsteht, wenn eine Gerade beständig durch einen Punkt geht und dabei stets eine Kurve berührt". Ihnen reiht sich auch die Definition des Ellipsoids auf S. 156 an.

CANTOR.

Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen hundert Beispielen von DIEDR. AUG. KLEMPT, Realschullehrer in Rostock. Leipzig, B. G. Teubner. 1880. XII, 260 S.

Das uns vorliegende Buch zerfällt in neun Abschnitte, welche die Ueberschriften führen: 1. Combinatorik, 2. Determinanten, 3. Lineare Gleichungen und Functionen, 4. Homogene lineare Functionen zweiten Grades, 5. Allgemeine Sätze über ganze algebraische Functionen n^{ten} Grades mit einer Veränderlichen, 6. Symmetrische Functionen der Wurzeln, 7. Elimination, 8. Die Discriminante, 9. Canonische Formen. Diese Abschnitte sind von ungemein verschiedenem Umfange. Während der erste fast 3, der zweite mehr als 4, der dritte etwas mehr als 2 Druckbogen in Anspruch nimmt, entfallen auf sämmtliche übrige Abschnitte nicht ganz 5 Bogen, ja die drei letzten Abschnitte müssen sich mit einer Ausdehnung von 5, 5, 7 Seiten begnügen.

Wir dürfen diese Ungleichmässigkeit, möchte sie auch besser vermieden worden sein, und sei es nur dadurch, dass bei unverändertem Inhalte eine geringere Zahl von Abschnitten unterschieden worden wäre, dem Verfasser nicht verübeln. Er sagt ausdrücklich in seinem Vorworte, seine Absicht gehe nur dahin, den Leser in die schönen Untersuchungen der genialen Schöpfer der modernen Algebra einzuführen, und demgemäss musste der zweite und dritte Abschnitt ziemlich erschöpfend behandelt werden, so weit es mit elementaren Hilfsmitteln möglich war, während, je weiter der Leser fortschreitet, um so eher ein Uebergang zu den Originalabhandlungen thunlich ist. Ihr Studium empfiehlt das Vorwort mit Fug und Recht — nur hätte alsdann auch auf die Quellen hingewiesen werden sollen, während es uns als die empfindlichste Lücke des Lehrbuches erscheint, dass — man möchte fast glauben, grundsätzlich — kein einziger Satz nach Ursprung und Fundort bezeichnet ist. Wir glauben, Herr Klempt hätte besser gethan, dem entgegengesetzten Beispiele zu folgen, welches S. Günther unter Anderen in seinem Lehrbuche der Determinantentheorie (Erlangen 1877) gegeben hat.

Befriedigt fühlen wir uns dagegen durch die zahlreichen Beispiele, welche einen Schwerpunkt des Buches in dem Maasse bilden, dass der Verfasser ihrer in dem Titel ausdrücklich gedachte. Sie sind durchweg gut gewählt und werden den Leser verhältnissmässig rasch in den Gegenstand einführen.

CANTOR.

Lagrange's Mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. NIEDERMÜLLER, Oberlehrer am Nicolaigymnasium in Leipzig. Leipzig, B. G. Teubner. 1880. I, 116 S.

Wenn der Uebersetzer in seinem Vorworte behauptet, die mathematischen Elementarvorlesungen, welche Lagrange im Jahre 1795 an

der École normale in Paris hielt, seien heute noch, was Inhalt sowohl wie Methode betrifft, für den Lehrer und den Studirenden der Mathematik von grosser Wichtigkeit, so können wir diesen Ausspruch lediglich unterschreiben. Wahr ist es auch, was er hinzusetzt, dass der erste Abdruck dieser Vorlesungen in den ungemein seltenen Séances des Ecoles normales, wie der zweite im Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier VII u. VIII, pag. 173—278 nur verhältnissmässig wenigen Mathematikern unserer Tage bekannt ist, und wenn auch der neueste Abdruck im VII. Bande der von J. A. Serret besorgten Gesammtausgabe von Lagrange's Schriften allgemeinere Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben dürfte, so ist es doch nicht Jedermanns Sache, ein so bändereiches, kostspieliges Werk sich anzuschaffen.

Von diesen verschiedenen Gesichtspunkten aus können wir es nur billigen, dass der Uebersetzer eine Sonderausgabe gerade dieser Vorlesungen ermöglichte, und wünschen dem kleinen Schriftchen, welchem auch die bekannte saubere Ausstattung, welche alle Bücher aus dem gleichen Verlage auszeichnet, zur Empfehlung dienen wird, eine recht weite Verbreitung, insbesondere unter Lehrern oberer Gymnasialclassen, deren Unterricht nur dadurch gewinnen kann, je genauer sie sich an das trotz seines Alters von 86 Jahren keineswegs veraltete Musterwerk anschliessen. Nicht als ob wir glaubten, ein Schüler der mittleren Classen, in welchen der Gegenstand der Lagrange'schen Vorlesungen zuerst behandelt zu werden pflegt, könne zu deren Verständniss reif sein, aber in den höchsten Classen der Gymnasien sollte solches der Fall sein, und alsdann werden zwei Monate etwa auf eine Repetition nach Lagrange's Gedankengang verwandt, wie uns scheint, in fruchtbarster Weise benutzt sein.

Cantor.

Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen und ihren Anwendungen. Von Dr. Hermann Schapira, Mitglied der neurussischen Naturforscher-Gesellschaft. Erster Theil. Lineare homogene Cofunctionen. Elementare Behandlung: ohne Anwendung der Theorie der complexen Variabeln. I. Abtheilung. Functionen einer Variabeln. 1. Lieferung (Abdruck aus dem III. Bande der Memoiren der Mathematischen Section der neurussischen Naturforscher-Gesellschaft). Odessa 1881.

Wir haben S. 103—104 eine Veröffentlichung der Schapira'schen Untersuchungen über Cofunctionen in Aussicht gestellt. Heute können wir das Erscheinen der 1. Lieferung von 14 Druckbogen bestätigen. Der Oeffentlichkeit gehören die Ergebnisse trotz des Abdruckes leider noch nicht an, da das Werk, in russischer Sprache erscheinend, für die meisten Mathematiker und so auch für den Unterzeichneten ein Buch mit

sieben Siegeln ist. Nur ein deutsches Inhaltsverzeichniss ist beigegeben, welches wir im Abdrucke folgen lassen. Einleitung. Definitionen und einige Fundamentalsätze. Erster Abschnitt. Allgemeine Eigenschaften der Cofunctionen. Capitel 1. Gegenseitigkeit der Cofunctionen erster Dimension. Capitel 2. Cofunctionen aus Summen etc. Circumplexe Partialfunctionen und partiale circumplexe Functionen. Derivirte von Cofunctionen und Cofunctionen aus Derivirten. Capitel 3. Subordinirte Cofunctionen. Zweiter Abschnitt. Symmetrische Functionen der Cofunctionen. Capitel 1. Cyklo-symmetrische Determinanten und die Zerlegung derselben in Factoren aus gleichnamigen Determinanten. Capitel 2. Darstellung der symmetrischen Functionen der Cofunctionen in Form cyklo-symmetrischer Determinanten aus coordinirten Cofunctionen. Capitel 3. Darstellung der symmetrischen Functionen der Cofunctionen in Form successiver partieller Ableitungen. Capitel 4. Die Jacobi'sche Functionaldeterminante der Cofunctionen. Dritter Abschnitt. Anwendung auf algebraische Gleichungen. Capitel 1. Einheitliche Lösung der ersten vier Grade. Capitel 2. Gleichungen specieller Natur. Capitel 3. Die Coefficienten einer Gleichung als successive Ableitungen von einander und die Zurückführung der Lösung algebraischer Gleichungen auf die Umkehrung eines Integrals. Capitel 4. Cyklische Algebraische Gleichungen.

Cantor.

Erhard Weigel, weiland Professor der Mathematik und Astronomie zu Jena, der Lehrer von Leibnitz und Pufendorf. Ein Lebensbild aus der Universitäts- und Gelehrtengeschichte des 17. Jahrhunderts, gleichzeitig ein Beitrag zur Geschichte der Erfindungen, sowie zur Geschichte der Pädagogik. Nach gedruckten und ungedruckten Quellen gezeichnet von Lic. Dr. Edmund Spiess, d. Z. Schlosspfarrer in Cüstrin a. d. Oder, vordem Professor der Theologie an der Universität Jena. Leipzig 1881, bei Julius Klinkhardt. 157 S.

Gleich auf der ersten Seite der uns vorliegenden Schrift ist des „trefflichen" Aufsatzes über Erhard Weigel gedacht, welchen Bartholomäi im Supplementhefte zu Bd. XIII (1868) dieser Zeitschrift S. 1—44 veröffentlicht hat. Wir billigen durchaus das jenem Aufsatze gegebene Beiwort und haben uns durch neuerdings wiederholtes Lesen noch mehr von dessen Berechtigung überzeugt; aber, möchten wir fragen, war es nach dieser trefflichen Studie denn nothwendig, noch ein besonderes Buch über Weigel zu schreiben, war es gerade Herr Spiess, der ein solches schreiben musste? Herr Spiess nennt sich selbst *in mathematicis* nur Laie (S. 51), und dass er mit dieser Bezeichnung nicht falsche Bescheidenheit übt, dafür zeugt statt vieler eine einzige Stelle, welche wir unseren Lesern nicht vorenthalten wollen:

„Die Gymnasien der Gegenwart haben allerdings auch jetzt noch nicht den Zweck, fertige Mathematiker heranzubilden, so wenig als sie die Absicht haben, fertige Philologen herzustellen. Aber doch geht das Lehrziel schon hier weit über die vier niederen Rechnungsarten hinaus und erweitert sich, indem es Potenzirung, Radicirung und Logarithmirung herbeizieht. Ja, wie die Programme mancher (namentlich norddeutscher) Gymnasien beweisen, begnügt man sich an denselben nicht einmal mit jenen sieben Rechnungsoperationen und ihren natürlichen Anwendungen auf die algebraischen Gleichungen des ersten und zweiten Grades und, was damit zusammenhängt, auf arithmetische und geometrische Progressionen, sondern man lehrt sogar die Theorie der Kettenbrüche, die Bestimmung der Logarithmen von Zahlen durch unendliche Reihen, die Verwandlung der irrationalen Quadratwurzeln in Kettenbrüche, die Permutationen, Combinationen und Variationen, den binomischen (selbst den polynomischen) Lehrsatz, die figurirten Zahlen, Polygonal- und Pyramidalzahlen, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, die kardanische Formel, die Auflösung der Gleichungen durch trigonometrische Formeln u. dergl. — Aufgaben, die eigentlich polizeilich verboten sein sollten, weil sie auf Kosten viel nöthigerer und nützlicherer Dinge Zeit und Kraft der Schüler über Gebühr in Anspruch nehmen." (S. 64.)

Der deutsche Reichskanzler soll einmal gesprächsweise gesagt haben, es sei schade, dass nicht jedem Leitartikel politischer Tagesblätter die Photographie des Verfassers beigegeben sei, damit jeder Leser sich gegenwärtig halten könne: so sieht der Mensch aus, der sich über diesen Gegenstand äussert. Wir wissen nicht, ob diese Anekdote auf Wahrheit beruht, aber Herr Spiess hat jedenfalls den betreffenden Wunsch erfüllt; S. 64 ist seine geistige Photographie, und aus ihren Zügen geht mit Bestimmtheit hervor: der Mann ist Laie in der Mathematik. Nun war Erhard Weigel vorzugsweise Mathematiker; wie kommt der Nichtmathematiker dazu, über ihn zu schreiben? Wie würde Herr Spiess selbst es nennen, wenn Referent etwa aus dem Umstande, dass Melanchthon in einem Briefe einmal über den Rechenunterricht sich geäussert hat, die Berechtigung herleitete, ein Lebensbild Melanchthon's zu zeichnen und dabei nicht blos den Theologen in ihm vorzugsweise zu berücksichtigen, sondern auch den heutigen Religionslehrern an Mittelschulen Weisungen zu ertheilen, was sie in ihren Unterricht aufnehmen oder nicht aufnehmen dürfen? „*Ne sutor supra crepidam*" hat Plinius gesagt, ein Mann universellen Wissens für seine Zeit, und wir glauben, er hat heute noch Recht.

Die naturgemässen Folgen, wie es gehen muss, wenn man über Dinge schreibt, in denen man eingestandenermassen Laie ist, erweisen sich auch an dem uns vorliegenden Buche selbst. Der grösste Theil ist

ein ohne Verständniss gemachter Auszug aus Bartholomäi's Abhandlung durch passende und unpassende Einschaltungen zu mehr als doppeltem Umfange aufgebauscht; uns ist Bartholomäi viel lieber. Neu ist nur, dass Weigel um 1691/92 eine Reise nach Holland gemacht hat (S. 36), von welcher B. Nichts wusste; neu, dass er bei dieser Gelegenheit Huygens kennen lernte, der sich geäussert habe (wo?), der Besuch von Weigel's Schüler, Leibnitz, würde ihm lieber gewesen sein (S. 38). Das ist die ganze Ausbeute der ersten 100 Seiten unseres Buches!

Auf Seite 100 beginnt das 40 Seiten lange IX. Capitel: Weigel als pädagogischer Theoretiker und Praktiker. Referent würde von seinem eigenen Schustersleisten sich zu weit entfernen, wenn er dieses Capitel, welches von Bartholomäi vollständig unabhängig ist, zu beurtheilen sich unterfinge. Ist Herr Spiess, was wir nicht wissen, in der Pädagogik aus seinem Laienstande herausgetreten und sind seine Angaben, was wir nicht prüfen, zuverlässiger als in den vorhergehenden Theilen, so ist dieses Capitel in der That dankenswerth.

Endlich finden sich S. 140—157 Schlussbetrachtungen, welche in einer Polemik gegen die heutigen Universitäten gipfeln, an welchen nur die Theologen es seien, welche, den alten Begriff der *universitas litterarum* festhaltend, auch andere Vorlesungen, als die ihres eigentlichen Faches besuchen. Wir sind die Ersten, welche sich darüber freuen, wenn das Interesse des Studirenden über die Schranken der einstigen Prüfungsgegenstände hinausreicht, und doch würden wir darauf verzichten, wenn dieses immerhin nur aufnehmende Interesse den Glauben an erquickliche leichte Selbstthätigkeit auf dem gestreiften Gebiete erwecken sollte.

Cantor.

De Stephano Alexandrino Hermanni Useneri Commentatio. Bonnae apud A. Marcum. 1880. 58 S. 4°.

Die uns vorliegende, aus drei Beilagen zu Bonner Vorlesungsanzeigen vereinigte Schrift des gelehrten Philologen, von dessen Bemühungen um die Geschichte der exacten Wissenschaften im byzantinischen Reiche schon im XXI. Bande dieser Zeitschrift (hist.-lit. Abthlg. S. 183—184) berichtet werden durfte, giebt uns das Bild einer wesentlich früheren Zeit, als des XIV. S., dem die „Symbola ad historiam astronomiae" galten. Wir haben es heute mit dem ersten Drittheil des VII. S. zu thun. Als im Jahre 529 die Philosophenschule zu Athen durch Kaiser Justinian geschlossen, fast gleichzeitig die Universität zu Konstantinopel gegründet wurde, deren anfangs fast nur theologischer und juristischer Charakter den mathematischen Studien keine Heimath versprach, da war für diese doch noch eine Stätte an dem Orte geblieben, wo sie in früheren Jahrhunderten ihre höchste Ausbildung erreicht hatten, in Alexandria.

Hermias war von Athen dorthin übergesiedelt. Sein Sohn Ammonius (natürlich nicht zu verwechseln mit dem gleichnamigen Gründer des Neuplatonismus im II. S.) eröffnete eine Philosophenschule, in welcher am Ende des V. und Anfang des VI. S. neben eigentlicher Philosophie auch Arithmetik, Geometrie, Astronomie gelehrt wurden. Zu den Zöglingen dieser Schule zählte Olympiodorus, von dessen Beobachtung eines Kometen im Jahre 565 ein Bericht erhalten ist. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass Stephanus, von dessen Wirksamkeit unsere Vorlage handelt, wieder ein Schüler des Olympiodorus gewesen sein mag, wenn auch erst in dessen spätesten Lebensjahren. Stephanus von Alexandria kam nämlich — und damit ist seine Lebenszeit bestimmt — nach Konstantinopel, als Kaiser Heraklius (610—641) sich bemühte, die Wissenschaft und ihre Lehre wieder einigermassen zu heben, die unter Phokas' achtjähriger Missregierung (602—610) dort vollends herabgekommen waren. Stephanus nahm die Stelle eines *διδάσκαλος οἰκουμενικός* ein, d. h. etwa eines Seminardirectors; wenigstens wurde jener Gelehrte mit gleichem Titel bezeichnet, welchen Leon Isaurus 725 mit seinen zwölf Hilfslehrern in seiner Schule selbst verbrennen liess, weil er die der Strenggläubigkeit widersprechenden Meinungen dieses Kaisers anzunehmen verweigerte. Stephanus hielt in Konstantinopel Vorlesungen über Schriften des Platon und des Aristoteles, über Geometrie, Arithmetik, Musik, Astronomie. Was seine schriftstellerischen Leistungen auf dem Gebiete der Sternkunde betrifft, von welchen Herr Usener vorzugsweise Rechenschaft giebt, so waltete ein eigenthümlicher Zufall. Ein echtes Werk des Stephanus drohte ihm entzogen zu werden, ein unter seinem Namen erhaltenes Werk dagegen ist unecht. Echt ist nämlich ein ungemein breiter Commentar zu den Handtafeln des Theon von Alexandria, geschrieben für Kaiser Heraklius, der es nicht verschmähte, selbst in einigen noch breiteren Zusatzcapiteln den Beweis zu liefern, wie unendlich schwer es ihm geworden ist, sich in die Osterrechnung u. s. w. hineinzufinden. Wegen dieser Zusätze, welche Herr Usener vollständig nebst den Anfangscapiteln von Stephanus (S. 38—54) veröffentlicht, gilt in einzelnen Handschriften das ganze Werk als Eigenthum des Kaisers. Die zweite Schrift, von der wir reden, gleichfalls und zwar vollständig im Drucke veröffentlicht (S. 17—33), ist eine Weissagung über die Geschichte der Araber durch Stephanus aus der Nativität des Muhammed gezogen. Für diese Prophetie gilt, was für alle derartige Schriften als kritisches Kennzeichen angenommen ist: dass ihr allzugenaues Zutreffen den Beweis liefert, dass sie erst verfasst wurde, als die angekündigten Thatsachen sich schon ereignet hatten, und dass die genaue Entstehungszeit sich ermitteln lässt, wenn von einem bestimmten Datum an die geschichtliche Bewahrheitung ein Ende hat. Erwägungen dieser Art ermöglichten die Datirung im vorliegenden Falle auf das Jahr

776, nach dem Tode Almansur's, also auch jedenfalls mehr als ein Jahrhundert nach Stephanus von Alexandria, der mithin unmöglich der Verfasser sein kann, als welchen die Handschriften ihn nennen; das hat Herr Usener mit zwingender Gewissheit zu Tage gebracht.

CANTOR.

Le matematiche nello studio di Padova dal principio del Secolo XIV alla fine del XVI per ANTONIO FAVARO. Padova 1880. 95 S. 4°.

Die hohe Bedeutsamkeit einiger unter den Männern, welche an der Universität Padua Mathematik lehrten, macht die Aufgabe zu einer dankbaren, die Geschichte der mathematischen Lehrstühle jener Anstalt in fortlaufender Darstellung zu bearbeiten. Herr Favaro hat dieser Aufgabe sich unterzogen und bietet uns heute den I. Theil seiner Untersuchungen; ein II. Theil wird die 18 Jahre behandeln, während welcher Galilei in Padua wirkte; ein III. Theil soll Galilei's Nachfolgern gewidmet sein. Die vollendet vorliegende erste Abtheilung ist etwa als Namensregister der betreffenden Persönlichkeiten aufzufassen, soweit dieselben überhaupt bekannt geworden sind. Der Grund dieser Kürze ist theils darin zu finden, dass jene Männer und ihre Leistungen nur sehr mangelhaft bekannt sind, trotz der auf's Höchste anzuerkennenden Mühe, welche der Verfasser sich gab, ihre Spuren in Druckwerken und Handschriften zu verfolgen, theils und zwar hauptsächlich darin, dass der Verfasser selbst in seiner im Bulletino Boncompagni XII (1879) veröffentlichten Monographie über Prosdocimo da Beldomandi ausführlich über noch mehrere Mathematiker von Padua ausser demjenigen, welcher der Abhandlung den Titel gab, sich verbreitete und nunmehr vorzog, auf diese frühere Arbeit zu verweisen, als sie ganz oder theilweise zu wiederholen. Durchaus ohne Frucht wird übrigens auch die lakonischere Darstellung für den Leser sich nicht erweisen. Er wird insbesondere mit Interesse bei der Darstellung der Beziehungen verweilen, welche in alter Zeit zwischen den Professoren der Medizin, der Astrologie und der Astronomie fast regelmässig obgewaltet zu haben scheinen, und wird auch über den Aufenthalt einzelner hervorragender Männer in Padua, des Peurbach, des Regiomontanus, des Luca Pacioli, des Triaca (Lehrer des Coppernicus), des Cardanus Wissenswerthes sich aneignen können.

CANTOR.

Galileo Galilei ed il „Dialogo de Cecco di Ronchitti da Bruzene in perpuosito de la stella nuova“. Studi e ricerche di ANTONIO FAVARO. Venezia 1881. 84 S.

Im October 1604 erschien am Himmel im Sternbilde des Ophiuchus ein neuer Stern, welchen Galilei am 10. des genannten Monats in Padua beobachtete. Laien und Gelehrte waren durch die Erscheinung erschreckt und in Aufregung. Glänzender selbst als die Sterne erster Grösse trat das Phänomen auf, und wenn es auch nicht aller Erfahrung widersprach, dass ein neuer Himmelskörper erschien und wieder verschwand — wir erinnern an den Stern in der Cassiopeia, welchen Tycho Brahe von 11. November 1572 bis zum März 1574 hatte beobachten können —, so widersprach doch jede solche Erscheinung der aristotelischen Lehre von der Unveränderlichkeit des Himmels und war dadurch ein Gegenstand des Jubels für die Coppernicaner, des Aergernisses für die noch weitaus die Mehrzahl bildenden Peripatetiker auf den Lehrstühlen der Astronomie. Galilei hielt zu Anfang December drei zahlreich besuchte Vorlesungen über den neuen Stern. Antonio Lorenzini von Montepulciano schrieb gegen diese Vorlesungen oder mindestens gegen deren Inhalt eine breitspurige Abhandlung, deren Vorrede vom 15. Januar 1605 datirt ist. Sechs Wochen später, zu Ende Februar, wurde eine Gegenschrift gegen Lorenzini veröffentlicht, ein Dialog in der Mundart von Padua: Dialogo de Cecco di Ronchitti da Bruzene in perpuosito della nuova stella. Den Wiederabdruck dieser sehr selten gewordenen Streitschrift haben wir vor uns, vermehrt um eingehende und gewissenhafte Untersuchungen über den Verfasser. Herr Favaro hat so gut wie sicher gestellt, dass es einen Cecco di Ronchitti niemals gegeben hat, dass sich ein gewisser Girolamo Spinelli, ein Benedictinermönch von vielbewegtem Leben, dieses Pseudonyms bedient hat, dass endlich Galilei selbst der geistige Urheber des Gespräches gewesen sein muss, aus welchem seine Eigenthümlichkeiten satyrischer Fechtweise unverkennbar hervorspringen. Damit ist aber der Wiederabdruck reichlich gerechtfertigt, wenn auch das Lesen des im Dialekt geschriebenen Dialogs für Jeden, der nicht Italiener von Geburt ist, mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte.

Cantor.

Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Ioniens. Ein Vortrag von Friedrich Hultsch. Berlin 1881, Weidmann'sche Buchhandlung. 52 S. (40 S. Text und 12 S. Anmerkungen.)

In geradezu vollendeter Form und mit der an ihm bekannten Beherrschung des schwierigen Inhalts hat unser gelehrter Freund über den Bauplan des Heratempels auf Samos und des Artemistempels zu Ephesus gehandelt. Wir dürfen auch mathematische Leser auf das kleine stylistische Meisterwerk hinweisen, aus welchem sie Genuss und Belehrung in Fülle schöpfen werden. Finden sich doch in demselben die Grund-

züge griechischer Maasskunde entwickelt. In dieser vermengen sich von Aegypten und von Babylon übernommene Maasse und Eintheilungen mit nationalgriechischen Maassbegriffen. Aegypten entstammen die beiden uralten Ellen, eine grössere und eine kleinere. Babylon lieferte die mit astronomischen Anschauungen verquickte Sechzigtheilung und die Länge von 240 Schritten oder 360 Ellen. Der griechische Fuss fand sich in dieses System als der 600. Theil der zuletzt genannten Länge, die nun den Namen Stadion erhielt. Für Tempelbauten ward es Regel, den Umfang entweder genau zu einem Stadion anzunehmen, wie bei dem Zeustempel zu Olympia und bei dem ältesten Bau des Parthenon zu Athen, oder so, dass er durch das Stadion in kleinen Verhältnisszahlen sich messen liess. Wir möchten freilich nicht Alles unterschreiben, was S. 28 flg. über die Entstehung der Sechzigtheilung gesagt ist. Uns scheint nach wie vor das Jahr von 360 Tagen der astronomische Grundbegriff gewesen zu sein, aus welchem erst die Zahl 60 ihre Bedeutung gewann, welche die weiteren Zusammenhänge erkennen liess. Allein die der unserigen einigermassen entgegenstehende Auffassung wird der Leser nicht leicht deutlicher und schöner auseinandergesetzt finden, als bei Hultsch.

Cantor.

Ueber Causalität in den Naturwissenschaften. Rede, gehalten bei der Uebergabe des Prorectorats der Albertus-Universität zu Königsberg von Professor Dr. H. Weber. Leipzig 1881, bei Wilh. Engelmann. 30 S.

Unter allen Gelehrten sind wohl die Mathematiker am schlimmsten daran, wenn sie einen gemeinverständlichen Vortrag zu halten in die Lage kommen. Nur die der Zahl nach Wenigen, denen die Geschichte ihrer Wissenschaft zum Forschungsgebiete dient, können Gegenstände ihrer gewohnten Thätigkeit behandeln; die Anderen werden meistens wohl oder übel zu philosophischen Stoffen greifen, der Mathematik wohl verwandt, nicht ihr selbst angehörend. So haben die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz besonders häufig dem nach einem Vortragsstoffe Fahndenden sich dargeboten, so häufig, dass es kaum möglich schien, ihnen eine noch neue Seite abzugewinnen. Wir haben mit diesem Ausspruche bereits unsere Anerkennung der uns vorliegenden kleinen Schrift nach einer Richtung hin ausgesprochen. Es ist deren Verfasser gelungen, die Frage so zu stellen, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst erst als Folgerung aus der Beantwortung entspringt. Was man unter Causalität verstehe, hat er untersucht, und er hat die Ergebnisse in eine Form gebracht, welcher nur ein paar Functionalzeichen fehlen, um eine mathematische genannt werden zu können. Weber unterscheidet Classen von Ereignissen, d. h. von Zustandsänderungen innerhalb der

Zeit. Sind alsdann zwei Classen U, W derart in Abhängigkeit unter einander, dass jedem W-Ereignisse ein U-Ereigniss vorausgeht, dass jedem U-Ereignisse ein W-Ereigniss nachfolgt, so ist die U-Classe die Ursachsclasse der Wirkungsclasse der W. Er zeigt nun, wie unter den Wirkungsclassen auf der einen, unter den Ursachsclassen auf der andern Seite einfachere ausgeschieden werden können. Sind beide zusammengehörige Classen der U und W einfach, so heisst ihre gegenseitige Beziehung Naturgesetz. Naturgesetze wurden meistens so aufgefunden, dass man von einer W-Classe ausgehend die entsprechende U-Classe aufsuchte. Dass man aber überhaupt für jede W-Classe eine U-Classe als vorhanden annimmt, beruht auf der dem Menschen innewohnenden Ueberzeugung von der Gesetzmässigkeit der Natur. Weber nennt als Grundlage sehr passend ein Princip der Stetigkeit der Natur, darin bestehend, dass geringfügige Aenderungen in den Ursachen auch nur geringfügige Aenderungen in den Wirkungen hervorrufen, ein Princip, dessen Folge das sogenannte Gesetz der grossen Zahlen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Weber prüft nun die hier in dürftiger Skizze dargelegten Gedanken an der Wirkungsclasse der Planetenbewegung. Er zeigt, was der Kant'schen Hypothese von 1755 und der Laplace'schen von 1796, welche beide die Ursachsclassen bilden können, gemeinsam, was zwischen ihnen unterscheidend ist. Er bespricht insbesondere die Kometentheorie beider und kommt schliesslich auf Grund der bisher in die Erfahrung aufgenommenen Thatsachen zu der „Laplace'schen Annahme, dass die Kometen fremden Ursprungs seien, als der ungleich allgemeineren und darum nach unserer jetzigen Kenntniss wahrscheinlicheren". Die Sprache, in welche Weber seine feinen Ausführungen gekleidet hat, ist eine nach Möglichkeit leicht verständliche, so dass auch nach dieser Richtung der Vortrag seine Leser gewiss befriedigen wird.

CANTOR.

Berichtigung.

In Heft 4, hist.-lit. Abthlg., ist zu lesen: S. 122 Z. 5 v. u. Heron statt Theon; S. 124 Z. 11 v. o. $\frac{bc}{2(b^2+c)}$ statt $\frac{bc}{2(b+c)}$.

Bibliographie

vom 16. Mai bis 15. Juli 1881.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Jahrg. 1881. Nr. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 12 Mk.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 14. Bd., 1. Abth. München, Franz. 7 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. II. 83. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1883, mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (217) für 1881. Redigirt von W. Förster u. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von E. Schönfeld und A. Winnecke. 15. Jahrg., 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Astronomische Nachrichten, 100. Bd. Nr. 1. (Nr. 2377.) Herausgegeben von A. Krüger. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 15 Mk.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. 3. Folge. Jahrg. 1879. Wien, Wallishauser. 11 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1882, herausgegeben vom hydrograph. Amt der kaiserl. Marine. Berlin, Mittler. 1 Mk. 50 Pf.

Repertorium für Experimentalphysik, mathematische und physikalische Instrumentenkunde etc. Herausgeg. von Ph. Carl. Generalregister zu Bd. I—XV. München, Oldenbourg. 2 Mk.

Berichte über das meteorologische Bureau für Wetterprognosen im Königreich Sachsen. 3. Bericht, 1880. Herausgegeben von C. Bruhns. Leipzig, Engelmann. 60 Pf.

Beobachtungen an den meteorologischen Stationen im Königreich Bayern, herausgegeben von W. v. Bezold und C. Lang. 3. Jahrg. 1881. Nr. 1. München, Ackermann. pro compl. 18 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed. F. Frenkel. 30. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1880. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

Reine Mathematik.

Handbuch der Mathematik, 8. Lief. (20. Lief. d. Encyklopädie d. Naturwissensch.) Breslau, Trewendt. 3 Mk.

Schlömilch, O., Handbuch der algebraischen Analysis. 6. Aufl. Jena, Frommann. 9 Mk.

Harnack, A., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 60 Pf.

Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen. 2. Aufl. 2. Bd. (Schluss.) Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Goldschmidt, L., Beiträge zur Theorie der quadratischen Formen. Göttingen, akad. Buchhdlg. 80 Pf.

Hamilton, R., Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. I. Bd., 1. Thl. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Bardey, E., Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Dronke, A., Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung f. d. Prima höherer Lehranstalten. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. L. Heiberg. Vol. II. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Angewandte Mathematik.

Undeutsch, H., Einführung in die Mechanik. Freiberg, Craz & Gerlach. 12 Mk.

Jolly, P. v., Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. 2. Abth. München, Franz. 50 Pf.

Haedicke, H., Der Angriffspunkt des hydrostatischen Auftriebs. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

Waals, v. d., Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustands. Uebers. v. F. Roth. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Verdet, E., Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichts. Deutsch von K. Exner. I. Bd., 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk. 40 Pf.

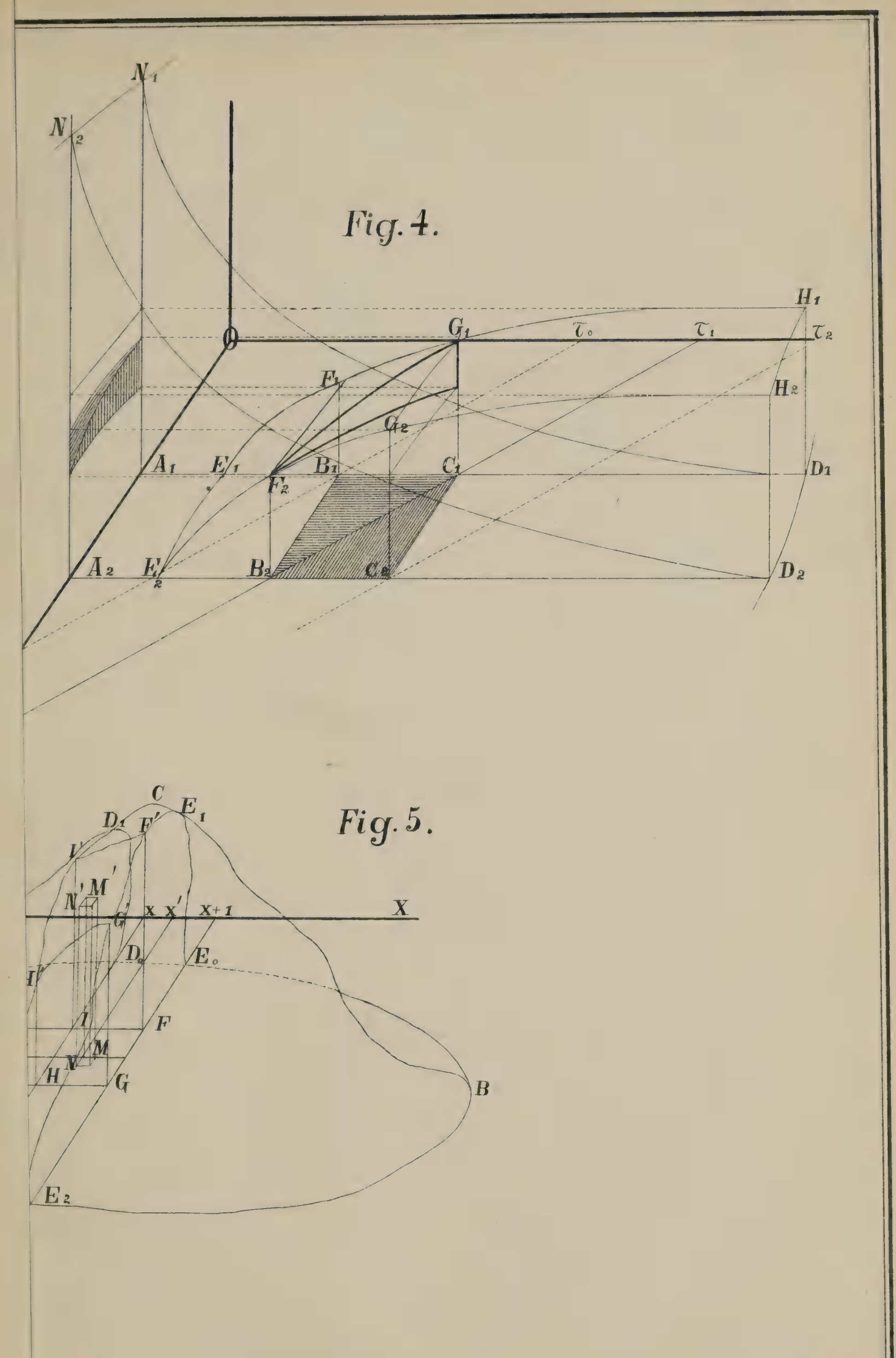
Struve, H., Fresnel's Interferenzerscheinungen, theoretisch und experimentell bearbeitet. Dorpat, Karow. 1 Mk. 50 Pf.

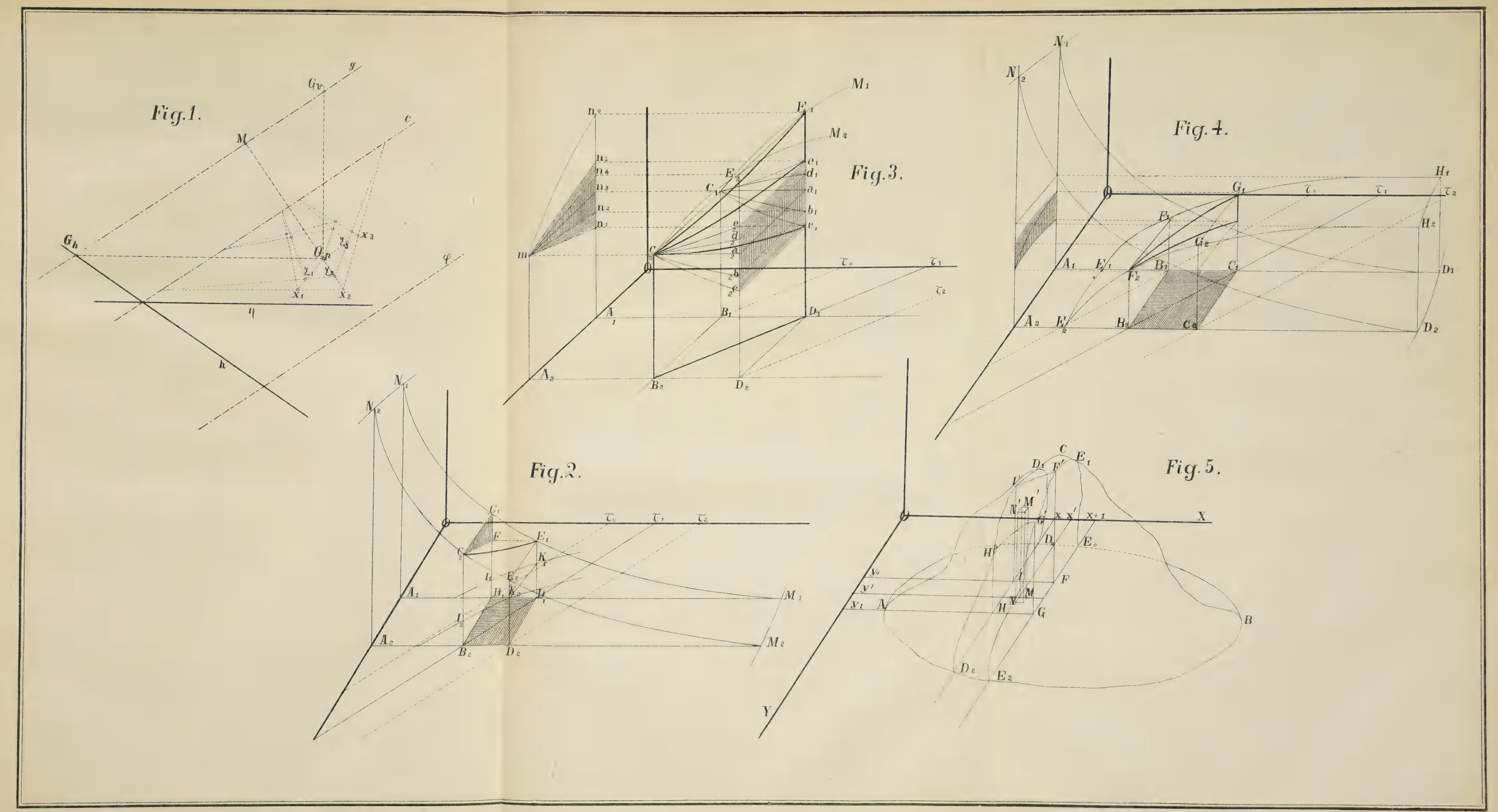
Pulfrich, K., Photometrische Untersuchungen über die Absorption des Lichts in anisotropen Medien. Bonn, Behrendt. 1 Mk. 60 Pf.

Dronke, A., Physikalischer Schulatlas. Trier, Verl.-Conto. 3 Mk.

Tillo, A. v., Karte mit Linien gleicher magnetischer Declination f. 1880. Leipzig, Voss' Sortim. 2 Mk.

Pfeil, L. Graf v., Kometische Strömungen auf der Erdoberfläche. 2. Ausg. Berlin, Hempel. 6 Mk.


Fig. 4.
N1
N2
O
G1
τ0
τ1
τ2
H1
H2
F1
G2
A1
E1
F2
B1
C1
D1
A2
E2
B2
C2
D2
Fig. 5.
C
E1
D1
F'
N'
M'
G'
x
x'
x+1
X
D0
E0
F
I
M
N
H
G
B
E2


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. Nach Jacob Steiner's Principien auf synthetischem Wege abgeleitet von Dr. HEINRICH SCHROETER, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau.

In kurzer Aufeinanderfolge ist die Literatur der synthetischen Geometrie durch zwei Werke bereichert worden, welche denselben Stoff behandeln, nämlich die Gebilde zweiter Ordnung. — Im Jahre 1880 erschien Reye's Geometrie der Lage, II. Theil, und im Jahre 1881 Schroeter's vorliegendes, 718 Seiten starkes Werk: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung. Ueber das Verhalten des letzteren Werkes zum ersten spricht sich der Verfasser im Vorwort aus: „Während Reye's vortreffliches Werk sich allgemeinere Ausgangspunkte gewählt und weitere Grenzen gesteckt hat, indem es die projectivischen Systeme dritter Stufe, die Strahlensysteme und Strahlencomplexe, die Fläche dritter Ordnung und das Flächengebüsch in den Kreis seiner Betrachtung zieht, war es die Absicht des Verfassers vorliegenden Buches, auf die Erforschung der beiden einfachsten Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Raume, der Fläche zweiter Ordnung und der Raumcurve dritter Ordnung sich zu beschränken und auf diesem engeren Gebiete eingehender und mit den einfachsten Mitteln zu Werke zu gehen.“ Wer das Reye'sche Werk kennt, wird diesen Entschluss Schroeter's nur freudig willkommen heissen; jenes nimmt an jeder Stelle alle vorher abgeleiteten Resultate ganz und voll in Anspruch und verlangt daher eingehendes Studium, welches häufig durch die oft knappe Beweisführung recht mühevoll wird. Schroeter's Werk setzt stets nur die einfachsten Mittel voraus, ist im Ausdruck und in der Beweisführung nicht so knapp und gestattet, irgend eine Stelle mit Verständniss zu lesen, ohne alles Vorhergehende durchgearbeitet zu haben.

Steiner hat in seinem bahnbrechenden Werke „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten unter einander“

einen Plan vorgezeichnet, nach welchem er die synthetische Geometrie zu behandeln gedachte. Er selbst hat ihn nicht weiter ausgeführt. Diesen Plan durchzuführen, hat der Verfasser des vorliegenden Werkes unternommen. Nachdem er die „Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften", bearbeitet und im Jahre 1876 die zweite Auflage besorgt hatte, sah er sich naturgemäss „der grösseren Aufgabe gegenüber, die Eigenschaften der einfachsten Erzeugnisse projectivischer Gebilde, der Flächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung in einer einheitlichen und möglichst vollständigen Darstellung zusammenzufassen". Diese Aufgabe hat er im vorliegenden Werke gelöst.

Die räumlichen Grundgebilde theilen sich in Stufen, je nach der Mannichfaltigkeit ihrer Elemente. Im ersten Abschnitte werden die Gebilde erster Stufe, das ebene Strahlenbüschel, die gerade Punktreihe und das Ebenenbüschel nebst ihren Erzeugnissen, den geradlinigen Flächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung behandelt. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Gebilden der zweiten Stufe, dem Strahlenbündel, dem Ebenenbündel, dem Punktfelde, dem Strahlenfelde und ihren Erzeugnissen, den Oberflächen zweiter Ordnung, die keine Gerade enthalten.

In den ersten vier Paragraphen werden die projectivischen Beziehungen der Ebenenbüschel in perspectivischer und schiefer Lage besprochen, die Doppelelemente coaxialer Ebenenbüschel und die involutorische Lage derselben behandelt. Zwei Aufgaben über Involutionen, welche häufiger verwendet, findet man im folgenden § 5: „Durch eine gegebene hyperbolische Strahleninvolution eine gleichseitig-hyperbolische Ebeneninvolution zu legen" und „Ein ebenes Strahlenbüschel und ein projectivisches Ebenenbüschel in perspectivische Lage zu bringen". Darauf wendet sich die Untersuchung dem Kegel zweiter Ordnung und zweiter Classe zu. Der letztere wird definirt als der Ort sämmtlicher Ebenen, welche durch die Punkte einer Reihe und durch die homologen Strahlen eines projectivischen Strahlenbüschels gelegt werden können. Aus dieser Definition ergiebt sich die Identität des Kegels zweiter Classe mit dem Orte sämmtlicher Ebenen, welche einen festen Punkt mit den Tangenten eines Kegelschnitts verbinden. Dual gegenüber steht die Erzeugung des Kegels als Strahlengebilde durch die Schnittlinien homologer Ebenen projectivischer Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden. Da jeder ebene Schnitt eines Kegels ein Kegelschnitt ist, so geht der Kegel aus der Perspective des Kegelschnitts hervor, erscheint jedoch andererseits als dualistisch gegenüberstehendes Gebilde des ebenen Kegelschnittes. Den Punkten des Kegelschnittes entsprechen die Berührungsebenen des Kegels, den Tangenten des ersteren die Kegelstrahlen, der Ebene des Kegelschnittes der Mittelpunkt des Kegels. — Denkt man sich das ebene Polarsystem aus einem Punkte projicirt, so erhält man das Polar-

bündel; die incidenten Elemente desselben bilden die Strahlen und Berührungsebenen eines reellen oder imaginären Kegels. Die allgemeinen Eigenschaften des Polarbündels ergeben sich zwar aus der Perspective des ebenen Polarsystems, werden jedoch (§§ 7 und 8) unabhängig davon aus den Elementen der projectivischen Gebilde, welche den Kegel erzeugen, hergeleitet.

Als besonders einfacher Fall wird das orthogonale Polarbündel hervorgehoben; darunter werden die sämmtlichen Strahlen eines Punktes und die in ihm dazu rechtwinkligen Ebenen als Polarstrahlen und Polarebenen verstanden. Der Kernkegel dieses Polarbündels, d. i. die Gesammtheit seiner incidenten Strahlen und Ebenen, ist imaginär und schneidet die unendlich ferne Ebene in ihrem imaginären Kreise.

Zunächst werden die Hauptaxen und Hauptebenen des Polarbündels und darauf seine Brennstrahlen und Kreisebenen behandelt, d. h. diejenigen Strahlen, in denen die Involutionen conjugirter Ebenen und diejenigen Ebenen, in denen die Involutionen conjugirter Strahlen orthogonal sind. Die Eigenschaften der einen lassen sich aus denen der anderen ableiten, wenn man rechtwinklig auf einander bezogene Strahlen- und Ebenenbündel zu Hilfe nimmt, ein Mittel, das häufiger angewendet wird. Die abgeleiteten Eigenschaften des Kegels, „welche sich an die Brennstrahlen und Kreisebenen anschliessen und deren Analogie mit den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte durch eine uneingeschränkte Dualität ergänzt wird“, ergeben andere Erzeugungsarten des Kegels.

In der Geometrie des Raumes („Punktes“ steht S. 67 Z. 2) nimmt ein besonderer Kegel, der orthogonale, eine ähnliche Stellung ein, wie der Kreis in der Geometrie der Ebene. Er ist der Ort der Schnittlinien zweier orthogonalen Ebenen, welche durch zwei feste sich schneidende Gerade gehen. Zu diesen Geraden sind die Kreisschnitte rechtwinklig; die Ebene dieser Geraden ist eine Hauptebene. Die Analogie dieses Kegels mit dem Kreise tritt noch mehr hervor. Wie dieser durch zwei projectivisch-gleiche Strahlenbüschel, so kann jener auf unendlich viele Arten durch projectivisch-gleiche Ebenenbüschel erzeugt werden; wie der Kreis der Ort eines Punktes ist, dessen Abstände von zwei festen Punkten ein constantes Verhältniss haben, so ist der orthogonale Kegel der Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen sich schneidenden Geraden in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen. Ergänzt werden auch hier wieder die Eigenschaften dieses Kegels durch diejenigen des dualen Gebildes, welches auf folgende Art erzeugt wird: „Wenn die Schenkel eines rechten Winkels mit unbewegtem Scheitel sich in zwei festen Ebenen EE_1 bewegen, so umhüllt seine Ebene einen Kegel, welcher die Ebenen EE_1 berührt und dessen Brennstrahlen zu diesen Ebenen normal sind.“

Die in diesem umfassenden Zusammenhange wohl zum ersten Male zusammengestellten Eigenschaften des orthogonalen Kegels eignen sich wegen ihrer ausgeprägten Analogie mit denen des Kreises durchaus zum Ausgangspunkte elementarer Forschung, welche in der Darlegung der Beziehungen räumlicher Gebilde eigentlich noch nirgends so recht zur Geltung gekommen ist. In der weiteren Besprechung wird sich noch öfter Gelegenheit finden, auf den elementaren Charakter mancher räumlichen Gebilde aufmerksam zu machen. Es mag vorweg erwähnt werden der gleichseitige Kegel, das orthogonale Hyperboloid, das gleichseitige Hyperboloid, besonders auch in seinen Beziehungen zum Tetraeder, das hyperbolische Paraboloid. Alle diese Flächen sind der elementaren Untersuchung durchaus zugänglich, d. h. sie verlangen zur Erforschung ihrer wesentlichsten Eigenschaften nicht die projectivischen Beziehungen.

Bei der Behandlung der ebenen Schnitte eines Kegels entsteht die Frage nach denjenigen Schnitten, welche besondere Curven zweiter Ordnung, also namentlich Kreise oder gleichseitige Hyperbeln herausschneiden. In Beantwortung der ersten Frage ist gezeigt, dass es nur zwei Stellungen einer Ebene giebt, in denen sie den Kegel in Kreisen schneidet, welche seinen cyklischen Ebenen parallel sind. Gleichseitige Hyperbeln kann eine Ebene jedoch in unendlich vielen Stellungen aus dem Kegel herausschneiden. Zieht man nämlich im Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ eines Kegels senkrecht zu einem Kegelstrahle x eine normale Ebene ξ, welche den Kegel in den Strahlen y und z schneidet, so schneidet jede zu den Ebenen $[xy]$ und $[xz]$ parallele Ebenen den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel. Wenn die Ebene einer solchen gleichseitigen Hyperbel auf einem Kegelstrahle x senkrecht steht, so bilden die Strahlen xyz ein rechtwinkliges Dreikant. Der Kegel heisst in diesem Falle ein gleichseitiger Kegel; auf ihm liegen unendlich viele rechtwinklige Dreikante und jede zu einem Kegelstrahle senkrechte Ebene schneidet ihn daher in einer gleichseitigen Hyperbel.

Eine Analogie dieses Kegels mit der gleichseitigen Hyperbel lässt die folgende Eigenschaft erkennen: „Jeder Kegel zweiter Ordnung, welcher durch ein Dreikant und seinen Höhenstrahl gelegt werden kann, ist ein gleichseitiger Kegel.“ Aus der Betrachtung eines Dreikants und seines Höhenstrahles folgt eine interessante Eigenschaft des Tetraeders: Bei einem Tetraeder kreuzen sich alle drei Paare von Gegenkanten rechtwinklig, wenn zwei Paare dieses thun. Von diesem Tetraeder, auf welchen Baltzer in seinen Elementen der Mathematik aufmerksam macht, werden S. 85—87 noch andere Eigenschaften abgeleitet, so unter anderen, dass seine Höhen sich in einem Punkte schneiden, in welchem sich auch die kürzesten Abstände der Gegenkanten treffen.

Die Untersuchung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung wird in den folgenden Paragraphen fortgesetzt; es wird zunächst die Identität

der Erzeugnisse projectivischer Ebenenbüschel und projectivischer Punktreihen nachgewiesen, deren Axen sich nicht schneiden. Ein solches Erzeugniss heisst eine Regelschaar; sie ruft sofort noch eine zweite hervor und beide bilden ein einfaches Hyperboloid. Aus der Entwickelung seiner Eigenschaften ergiebt sich, dass die vier Höhen eines Tetraeders hyperbolische Lage haben, d. h. einer Regelschaar angehören, dass also die vier Höhen eines Tetraeders sich treffen, wenn zwei sich schneiden.

Zu dem Mittelpunkte und den Hauptaxen des Hyperboloids gelangt man auf folgendem Wege. Wenn l und g, l_1 und g_1, l_2 und g_2 drei Paare paralleler Erzeugender der beiden Regelschaaren sind, so bilden die Ecken (lg_2), (l_1g), (lg_1), (l_2g) die Ecken eines Parallelogramms, dessen Diagonalenschnittpunkt mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ des Hyperboloids zusammenfällt. Die Parallelen durch ihn zu den Erzeugenden des Hyperboloids bilden den Asymptotenkegel, dessen Hauptaxen mit denen des Hyperboloids sich decken. Da jede Ebene das Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel in ähnlichen Curven schneidet, so gelangt man gleichzeitig zu den Kreisschnitten beider Flächen.

Für die Anschauung ist es ungemein schwierig, sich aus der Erzeugung des Hyperboloids von der Form desselben eine richtige Vorstellung zu machen, also beispielsweise der Bewegung einer Geraden zu folgen, welche auf drei anderen sich nicht schneidenden Geraden gleitet. Deshalb wird es Jeder, der an das Studium dieser Flächen herantritt, dankbar anerkennen, dass der Verfasser durch eingehende Discussion der Schnitte in den Hauptebenen und durch Construction des Hyperboloids ein deutliches Bild dieser Fläche entwirft.

Einige lineare Constructionen des Hyperboloids, welche geeignet sind, die Vorstellung von seiner Form zu vervollständigen, 1. aus drei Erzeugenden einer Regelschaar, 2. aus zwei Paaren von Erzeugenden beider Schaaren und einem Punkte, 3. aus zwei Erzeugenden der einen, einer der andern Schaar und zwei Punkten, 4. zwei Erzeugenden einer Schaar und vier Punkten, 5. aus einer Erzeugenden aus jeder Schaar und fünf Punkten, 6. aus sechs Punkten, entwickelt § 16.

Die einfachen projectivischen Beziehungen der Gebilde, welche das Hyperboloid erzeugen, führen zu polaren Zuordnungen und zum räumlichen Polarsystem. Doch wird die Betrachtung des letzteren an dieser Stelle bald abgebrochen, weil es später (§ 19) eingehender untersucht wird. Wie vom Kegel zum Polarbündel, so gelangt man also vom Hyperboloid zum räumlichen Polarsystem; „die Polareigenschaften treten naturgemäss in den Mittelpunkt der Betrachtung“.

Aus drei Erzeugenden $l\,l_1\,l_2$ der einen Regelschaar und drei Erzeugenden $g\,g_1\,g_2$ der andern lassen sich sechs windschiefe Sechsseite zusammenstellen, welche ganz auf dem Hyperboloid verlaufen. Verbindet man

je zwei aufeinanderfolgende Seiten eines Sechsecks durch Ebenen, so erhält man ein einfaches Sechsflach. In einem solchen Sechsseite schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken in einem Punkte und in einem solchen Sechsflach schneiden sich die gegenüberliegenden Ebenen in drei Geraden, die in einer Ebene liegen. Diese interessanten Sätze, welche den Sätzen des Pascal und Brianchon analog sind, enthalten letztere als specielle Fälle und nicht nur diese, sondern auch ihre Steiner'sche Erweiterung, wenn man die räumliche Figur durch eine Transversalebene schneidet. Wie sehr die Polaritätsbeziehungen den Mittelpunkt der Untersuchungen bilden, zeigt sich auch an dieser Stelle dadurch, dass die Eigenschaften des windschiefen Sechsseits und Sechsflachs polare Zuordnungen ergeben, die wiederum zum räumlichen Polarsystem führen, „dessen Zusammenhang und Eigenschaften sich durch weitere Verfolgung dieser Untersuchung ergeben würden". Der Verfasser zieht es jedoch vor, dasselbe unmittelbar aus den Elementen der projectivischen Gebilde zu construiren, welche das Hyperboloid erzeugen. Sind $l(ABC\ldots X)$ und $l_1(A_1B_1C_1\ldots X_1)$ zwei projectivische Punktreihen, deren Träger sich nicht schneiden, so sind die Ebenenbüschel $l[A_1B_1C_1\ldots X_1]$ und $l_1[ABC\ldots X]$ auch projectivisch und erzeugen dieselbe Regelschaar, wie jene Punktreihen. Eine Ebene E treffe l und l_1 in X und Y_1; die Verbindungslinie X_1Y der entsprechenden Punkte treffe E in P_1; macht man X_1YP_1P harmonisch, so heisst P der Pol der Ebene E. In umgekehrter Folge ergiebt sich zum Punkte P die Polarebene E. Wie aber das Hyperboloid gleichzeitig durch projectivische Punktreihen und projectivische Ebenenbüschel erzeugt wird, so folgt aus der zweiten Erzeugung eine zweite Definition von Pol und Polarebene, welche als identisch mit der ersten nachgewiesen wird. Das System der in dieser Weise einander zugeordneten Punkte und Ebenen ist das schon wiederholt gefundene räumliche Polarsystem. Aus dieser einfachen Constituirung des Polarsystems ergeben sich seine wesentlichen Beziehungen und führen unter Anderem zu einem Gebilde, das wegen seines häufigen Vorkommens und seiner wichtigen Rolle in allen Untersuchungen über Flächen zweiter Ordnung hervorgehoben werden muss, zum Polartetraeder, in welchem je zwei Gegenkanten conjugirte Strahlen sind und jede Ecke ihre Gegenseite als Polarebene hat.

Die Zuordnung der Punkte, Strahlen und Ebenen, wie sie im Polarsystem ihren Ausdruck gefunden hat, ging aus der projectivischen Beziehung derselben Punktreihen und Ebenenbüschel hervor, welche das Hyperboloid erzeugen. Dieses steht daher mit dem Polarsystem in engstem Zusammenhange, welcher in der That dadurch einen neuen Ausdruck erhält, dass jeder Punkt des Hyperboloids auf seiner Polarebene liegt, dass jede Berührungsebene desselben durch ihren Pol geht, dass je zwei conjugirte Strahlen, welche sich begegnen, auf dem Hyperboloid

liegen, dass jede sich selbst conjugirte Gerade ein Hyperboloidstrahl ist, oder in anderer Fassung: „Alle incidenten Elemente des Polarsystems liegen auf dem Hyperboloid. Letzteres kann man auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Punktreihen oder Ebenenbüschel erzeugen; die aus den verschiedenen projectivischen Beziehungen hervorgehenden Polarsysteme sind identisch. Dadurch wird die Unabhängigkeit des Polarsystems von den erzeugenden Gebilden erwiesen. Die Abhängigkeit des Polarsystems und Hyperboloids, welche derart ist, dass das eine als Vertreter des andern angesehen werden kann, muss sich auch darin zeigen, dass jedes aus derselben Zahl bestimmender Elemente construirt werden kann. Von der Wahl dieser Bestimmungsstücke wird es abhängen, ob es im Polarsystem incidente Elemente giebt oder nicht, ob dasselbe eine Kernfläche hat oder nicht. Im letzteren Falle einer imaginären Kernfläche ist das Polarsystem als Vertreter dieser Fläche anzusehen. Wenn das Polarsystem incidente Gerade, d. i. sich selbst conjugirte Strahlen hat, so ist die Kernfläche ein einfaches Hyperboloid, im andern Falle eine Oberfläche zweiter Ordnung, auf welcher keine reellen Geraden liegen.

So gelangt die Darstellung durch Construction des Polarsystems zu sämmtlichen Oberflächen zweiter Ordnung. Bei dieser Construction gilt als einfaches Bestimmungsstück ein Paar conjugirter Punkte oder Ebenen, als zweifaches eine Gerade mit ihrer zugehörigen Punkt- oder Ebeneninvolution, als dreifaches ein Paar Pol und Polarebene oder eine sich selbst conjugirte Gerade, als vierfaches ein Paar conjugirter Strahlen, als fünffaches ein ebenes Polarsystem oder ein Polarbündel, als sechsfaches ein Polartetraeder, als achtfaches ein Paar Pol und Polarebene mit dem im ersteren liegenden Polarbündel. Hieraus ergiebt sich, dass neun einfache Bestimmungsstücke zur Construction des Polarsystems erforderlich sind.

Aus der näheren Untersuchung eines Polartetraeders (§ 22) ergeben sich weitere Eigenschaften des Polarsystems, welche drei Arten von Polarsystemen unterscheiden lassen (§ 23). Die erste Art hat auf jedem Paare conjugirter Strahlen ungleichartige Involutionen und stets eine reelle Kernfläche ohne reelle Gerade; die zweite und dritte Art haben auf jedem Paare conjugirter Strahlen gleichartige Involutionen und entweder eine reelle Kernfläche mit reellen Geraden oder eine imaginäre Kernfläche.

Vermittelst zweier Gebilde von zweifach unendlicher Mannichfaltigkeit, eines Ebenenbündels und Strahlenbündels, deren reciproke Beziehung aus den Eigenschaften des Polarsystems folgt, wird dann die Kernfläche des räumlichen Polarsystems unabhängig davon construirt, ob dieselbe Gerade enthält oder nicht (§ 24). Umgekehrt kann diese Reciprocität

(§ 26) zur Construction der Flächen zweiter Ordnung und zur Herstellung des räumlichen Polarsystems benutzt werden.

Nach der Untersuchung des allgemeinen Hyperboloids wendet sich der Verfasser zur Betrachtung specieller Hyperboloide, zunächst des orthogonalen Hyperboloids. Es wird definirt als Kernfläche in demjenigen räumlichen Polarsystem, in welchem die zugehörigen Ebeneninvolutionen zweier conjugirten Strahlen orthogonal sind; es erscheint auch als Durchschnitt je zweier senkrechten Ebenen zweier Ebenenbüschel, deren Axen sich nicht schneiden. Als charakteristische Eigenschaft ergiebt sich, dass seine Kreisschnitte zu den Axen dieser Ebenenbüschel senkrecht stehen. Zwischen dem orthogonalen Kegel und orthogonalen Hyperboloid wird ausser den angeführten analogen Eigenschaften noch dadurch eine nähere Beziehung hergestellt, dass der Asymptotenkegel des orthogonalen Hyperboloids ein orthogonaler Kegel ist, woraus sich sofort ergiebt, dass das orthogonale Hyperboloid durch projectivisch-gleiche Ebenenbüschel sich erzeugen lässt. Eine weitere Analogie, auch mit dem Kreise, findet sich darin, dass das Verhältniss der Abstände irgend eines Hyperboloidpunktes von den Axen der orthogonalen Ebeneninvolutionen constant ist.

Auf einen wesentlichen Unterschied mit dem orthogonalen Kegel muss noch aufmerksam gemacht werden. Während der erstere nur zwei Brennstrahlen, d. i. Gerade mit orthogonalen zugehörigen Ebeneninvolutionen, hat, hat das letztere eine vierfach-unendliche Schaar von conjugirten Strahlenpaaren, in denen die Ebeneninvolutionen conjugirter Ebenen orthogonal sind. Auch für je zwei dieser conjugirten Strahlen gilt die Eigenschaft, dass jeder Punkt des Hyperboloids von ihnen ein constantes Abstandsverhältniss hat. Der Werth des letzteren ist veränderlich. — Diese merkwürdige Eigenschaft findet sich mitgetheilt in einer Abhandlung „Ueber ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art. Von H. Schröter“, Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 85. In das vorliegende Werk hat sie der Verfasser nicht aufgenommen.

An die Untersuchung des orthogonalen Hyperboloids schliesst sich diejenige des gleichseitigen Hyperboloids an, „welches sich zu jenem in ähnlicher Weise verhält, wie die gleichseitige Hyperbel zum Kreise“. Eine Haupteigenschaft des gleichseitigen Hyperboloids ist diejenige, von jeder zu einer Erzeugenden senkrechten Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten zu werden.

Auf eine einfache Transformation des Kreises in die gleichseitige Hyperbel, des orthogonalen Kegels in den gleichseitigen und des orthogonalen Hyperboloids in das gleichseitige möchte Referent aufmerksam machen, welche das ähnliche Verhalten dieser Gebildepaare klar darlegt. Senkrecht zu einer Erzeugenden g eines orthogonalen Kegels oder Hyperboloids sei dieses in einem Kreise K geschnitten, dessen Peripherie der

Geraden g in G begegnet; in G sei a die Tangente an K. Dem Punkte G liegt diametral gegenüber der Punkt A; legt man durch die Geraden g und a eine Ebene α, so liegen alle Punkte, welche die Punkte des orthogonalen Kegels oder Hyperboloids von A und α harmonisch trennen, auf einem gleichseitigen Kegel oder Hyperboloid und alle Punkte, welche die Punkte des Kreises K von A und a harmonisch trennen, auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Jedes gleichseitige Hyperboloid enthält unendlich viele Tripel senkrechter Erzeugender. Sind $l l_1 l_2$ drei solche einer Regelschaar, $g g_1 g_2$ die ihnen parallelen der andern, so bilden diese sechs Geraden ein rechtwinkliges räumliches Sechsseit, dessen Ecken auf einer mit dem Hyperboloid concentrischen Kugel liegen, welche auch die Schnittpunkte je dreier zu einander normaler Berührungsebenen enthält. — Die sechs Seiten dieses Sechsecks sind sechs Kanten eines Parallelepipedons, dessen übrige sechs Kanten nicht auf dem Hyperboloid liegen. Sind $a^2 b^2 c^2$ die Potenzen der Involutionen auf seinen Hauptaxen, so haben alle solche Parallelepipeda das constante Volumen $4abc$.

Zum gleichseitigen Hyperboloid steht ein allgemeines Tetraeder in der Beziehung, dass seine vier Höhen stets auf einem gleichseitigen Hyperboloid liegen; es können also drei beliebige Erzeugende eines solchen stets als drei Höhen eines Tetraeders angenommen werden. Auch die hieran sich knüpfende Frage, welche Lage drei Gerade haben müssen, um Höhen eines Tetraeders sein zu können, findet ihre Erledigung (S. 207). In Analogie mit einem bekannten Dreieckssatze wird folgende hübsche Eigenschaft des Tetraeders nachgewiesen, dass sein Schwerpunkt, der Mittelpunkt der umgeschriebenen Kugel und der Mittelpunkt des gleichseitigen Hyperboloids, auf welchem die vier Tetraederhöhen liegen, auf einer Geraden sich befinden.

Wenn der Mittelpunkt eines Hyperboloids ins Unendliche rückt, so nennt man dasselbe ein hyperbolisches Paraboloid, dessen charakteristische Eigenschaft darin besteht, dass die Erzeugenden der einen Regelschaar irgend zwei der andern in ähnlichen Punktreihen schneiden. Die unendlich ferne Ebene schneidet die Fläche in zwei reellen Erzeugenden, so dass also sämmtliche Erzeugende einer Regelschaar einer festen Ebene parallel laufen. Als Bedingung für die Erzeugung eines hyperbolischen Paraboloids durch projectivische Ebenenbüschel findet man, dass dasjenige Ebenenpaar, welches auf dem kürzesten Abstande der Axen senkrecht steht, ein Paar entsprechender Ebenen ist. Analog mit einer bekannten Parabelerzeugung wird gezeigt, dass die Senkrechten aus den Punkten einer Geraden auf die homologen Ebenen eines projectivischen Ebenenbüschels eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids bilden. Dann wird die Richtung der Axe bestimmt und nachgewiesen, dass die Fläche nur parabolische und hyperbolische

Schnitte hat, dass die Parabelschnitte in den beiden Hauptebenen ihre Oeffnungen nach entgegengesetzter Richtung kehren und endlich, dass ein hyperbolisches Paraboloid auf zweifach-unendlich viele Arten durch projectivisch-gleiche Punktreihen erzeugt werden kann.

Stehen die beiden unendlich fernen Erzeugenden auf einander senkrecht, so erhält man ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid, bei welchem die Parabeln in den Hauptschnitten einander gleich werden. Als Bedingung, unter welcher zwei projectivische Punktreihen ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid erzeugen, ergiebt sich das projectivische Entsprechen der beiden Punkte, in denen die Träger von ihrem kürzesten Abstande getroffen werden. Die Regelschaaren dieses Paraboloids erhält man auch, wenn man aus den Punkten einer jeden von zwei Geraden Senkrechte auf die andere fällt. — Von solchen conjugirten Geraden, in denen die Ebeneninvolutionen conjugirter Ebenen orthogonal sind, hat jeder Punkt der Fläche gleichen Abstand.

Besonders aufmerksam wird darauf gemacht, dass das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid die charakteristischen Eigenschaften des orthogonalen und gleichseitigen Hyperboloids in sich vereinigt. Allerdings degeneriren die Kreisschnitte in Linienpaare, welche durch die Kreispunkte der unendlich fernen Erzeugenden gehen.

Hiermit wird die Untersuchung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung geschlossen. — Ausser der Fülle neuer Eigenschaften, welche dem Leser geboten werden, ist besonders hervorzuheben, dass nirgends eine ähnliche, so ins Einzelne gehende Zusammenstellung und Herleitung der Eigenschaften dieser Flächen gefunden werden dürfte. Die Entwickelung derselben geht überall von den einfachsten projectivischen Beziehungen aus und ist so einfach, klar und übersichtlich, dass man das Buch mit Leichtigkeit lesen kann; ohne schwierigeres und anstrengendes Studium gelangt auch der Anfänger zur vollständigen Vertrautheit mit diesen Flächen und besonders auch durch die anschauliche Art der Darstellung zur Fähigheit, sich dieselben deutlich vorstellen zu können. Viele der mitgetheilten Eigenschaften und Erzeugungsarten sind metrischer Natur und haben dadurch mehr oder weniger elementaren Charakter. Sie lassen sich deshalb auch meist auf elementarem Wege, also ohne Benutzung projectivischer Beziehungen ableiten, wie der Verfasser selbst in der schon erwähnten Abhandlung im Crelle-Borchardt'schen Journal gezeigt hat. Hierin aber liegt eine Anregung zur Beschäftigung mit diesen Flächen, die trotz der grossen Erfolge der synthetischen Geometrie und der allmälig sich auch auf unseren Universitäten weiter ausbreitenden geometrischen Studien doch noch immer nicht eines allgemeineren synthetischen Studiums von Seiten der Mathematiker sich erfreuen.

Aber nicht nur Bekanntschaft mit diesen Flächen gewährt die vorliegende Bearbeitung derselben, sondern auch Anregung und Anleitung

zu eigener Beschäftigung durch die Art der Behandlung und das Hervorheben der analogen Eigenschaften. So dürfte es nicht schwer werden und ist im Interesse eigenen Schaffens durchaus anzurathen, die beim allgemeinen Kegel oder beim orthogonalen und gleichseitigen angewendete Art der Ableitung der Eigenschaften bei dem allgemeinen oder orthogonalen oder gleichseitigen Hyperboloid nachzubilden, zumal immer nur die einfachsten projectivischen Beziehungen als Ausgangspunkt dienen.

Wie die geradlinigen Flächen das Erzeugniss zweier projectivischen Gebilde sind, so ist die Raumcurve dritter Ordnung das Erzeugniss dreier projectivischen Ebenenbüschel, erscheint demnach auch als Durchschnitt zweier einfachen Hyperboloide, die eine Erzeugende gemein haben. Aus dieser Erzeugungsart werden die bekannten Eigenschaften der Raumcurve abgeleitet (§ 31), wird ihre Construction aus gegebenen Punkten gefolgert (§ 32), die lineare Construction eines siebenten Punktes aus sechs gegebenen auf verschiedene Arten gelehrt, die Zahl der Schnittpunkte zweier Raumcurven dritter Ordnung auf einem Hyperboloid bestimmt und schliesslich gefolgert (S. 251), dass im Allgemeinen nur viermal vier homologe Ebenen von vier projectivischen Ebenenbüscheln, deren Axen sich nicht schneiden, in einem Punkte zusammentreffen, ein Satz, der bei der Bestimmung des gemeinschaftlichen Polartetraeders von zwei Flächen benutzt wird. Nach einigen Constructionen der Raumcurve aus Punkten und Secanten (§ 33) gelangt die Darstellung in § 34 zur Behandlung der Tangenten und Schmiegungsebenen, von denen der von Möbius herrührende Satz bewiesen wird: „Die sämmtlichen Schmiegungsebenen schneiden auf einer beliebigen festgehaltenen Schmiegungsebene gerade Linien aus, die einen Kegelschnitt umhüllen.“

Dieser Satz ist übrigens dual zu dem S. 231 abgeleiteten, dass die Raumcurve dritter Ordnung aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel projicirt wird, und liefert so ein Beispiel zu der Bemerkung auf S. 28, dass der Kegel öfter als dual gegenüberstehendes Gebilde des Kegelschnitts erscheint.

Aus dem Satze von Möbius folgt dann die Identität der Raumcurven dritter Ordnung mit dem Erzeugniss dreier projectivischen Punktreihen, also mit der Raumcurve dritter Classe.

Wie vom Kegel zum Polarbündel, vom einfachen Hyperboloid zum räumlichen Polarsystem, so schreitet hier die Darstellung von der Raumcurve zum Nullsystem fort. — „Die Dualität, welche die Raumcurve, als Punkt- und Ebenengebilde aufgefasst, darbietet, führt zu einem eigenthümlichen Polarsystem im Raume, welches sich von dem allgemeinen Polarsystem zwar wesentlich unterscheidet, aber seine charakteristischen Eigenschaften besitzt.“ Diese führen zu den wohl zuerst von Möbius hervorgehobenen Beziehungen zweier Tetraeder, von denen jedes dem andern gleichzeitig ein- und umgeschrieben ist (Möbius, Crelle's

Journal Bd. III S. 273). Die bekannte Eintheilung der Raumcurven dritter Ordnung mit den von Seydewitz eingeführten Benennungen: kubische Ellipse, kubische Hyperbel, kubische parabolische Hyperbel, kubische Parabel, und eine anschauliche Darlegung des Verlaufs dieser Curven, wie er sich auf den Cylindern gestaltet, welche durch jene gelegt werden können, findet sich in § 37. Hieran schliesst sich die Untersuchung der in den Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Classe enthaltenen Kegelschnitte, welche die Schnittlinien einer jeden mit allen übrigen einhüllen. Eine Menge neuer Sätze findet man abgeleitet, so z. B. dass die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte auf einem Kegelschnitte liegen, dass diese Kegelschnitte bei der kubischen Parabel lauter Parabeln sind, dass die Mittelpunktsebenen aller Kegel, welche durch die kubische Ellipse gelegt werden können, in Ellipsen, und alle Kegel, welche durch die kubische Hyperbel gelegt werden können, in Hyperbeln schneidet, welche durch drei reelle Punkte gehen.

Denkt man sich die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung aus ihrem unendlich fernen Punkte projicirt, so bilden die Projectionsstrahlen einen Cylinder. Die Hauptaxen dieser Cylinder haben die Eigenschaft, dass sie die Mittelpunkte sämmtlicher Secanten enthalten, welche ihnen begegnen. Deshalb heissen diese Cylinderaxen Durchmesser der Raumcurven dritter Ordnung. Alle Secanten, welche einen Durchmesser treffen, bilden eine Regelschaar eines Hyperboloids. Eine kubische Ellipse hat also einen, eine kubische Hyperbel drei Durchmesser. Die Mittelpunktsebene, auf welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen liegen, begegnet einer kubischen Hyperbel in drei reellen Punkten $A_0 B_0 C_0$ und den drei Asymptoten in $A_1 B_1 C_1$; die Verbindungslinien $A_0 A_1$, $B_0 B_1$, $C_0 C_1$ sind noch drei Durchmesser, d. h. sie halbiren die sie treffenden Secanten.

Hiermit endigt der erste Abschnitt (340 Seiten). Der zweite (378 Seiten) beginnt in § 40 mit den projectivischen Beziehungen, der Collinearität und Reciprocität, der vier Grundgebilde zweiter Stufe, d. i. von doppelt-unendlicher Mannichfaltigkeit, des Strahlenbündels, des Ebenenbündels, des Punktfeldes, des Strahlenfeldes. — Die Gesammtheit aller Punkte des Raumes wird als ein Gebilde von dreifach und die Gesammtheit aller Geraden als ein solches von vierfach unendlicher Mannichfaltigkeit nachgewiesen. Den Ursprung der projectivischen Beziehung eines Strahlenbündels und Punktfeldes oder Ebenenbündels und Strahlenfeldes bildet die perspectivische Lage (§ 41); sie lässt erkennen, dass es zwei Paare von gleichen entsprechenden Punktreihen und Strahlenbüscheln in zwei collinearen Ebenen giebt. Diese vermittelst der perspectivischen Lage gefundenen Punktreihen und Strahlenbüschel finden sich auch wieder, wenn die collineare Beziehung irgendwie, z. B. durch vier homologe Elementenpaare festgesetzt wird. Daraus wird dann

gefolgert, dass sich zwei collineare Ebenen auf zwei wesentlich von einander verschiedene Arten in perspectivische Lage bringen lassen. In der Entwickelung dieser Eigenschaft ist auch die Lösung der Aufgabe enthalten, zwei gegebene Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ so im Raume zu legen, dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sich in einem Punkte treffen. Referent möchte darauf aufmerksam machen, dass die Lösung der letzteren Aufgabe auch auf elementarem Wege nicht schwierig ist und dann den Beweis enthält, dass zwei collineare Ebenen durch vier Paare homologer Elemente gegeben sind. Die Construction der drei Doppelelemente zweier collinearen Ebenen, deren Träger zusammenfallen, giebt § 43. Es folgen die analogen Untersuchungen für collineare Bündel in perspectivischer und allgemeiner Lage, aus denen hervorgeht, dass zwei collineare Bündel sich stets, ein Bündel und eine collineare Ebene nicht immer in perspectivische Lage bringen lassen. Darauf wird die involutorische Lage zusammenliegender collinearer Ebenen betrachtet und die Bedingung aufgestellt, welche erfüllt sein muss, damit zwei collineare Ebenen sich in involutorische Lage bringen lassen. Diese wird (S. 400) so formulirt, dass diejenigen Strahlenpaare ss' und $s_1s'_1$, welche die Träger entsprechender gleicher Punktreihen der beiden collinearen Ebenen sind, in beiden Ebenen denselben Abstand haben. Die involutorische Lage wird dann erhalten, wenn man zwei von ihnen, s und s_1, identisch zur Deckung bringt.

Wenn in zwei collinearen Ebenen zwei entsprechende congruente Dreiecke in cyklischer Vertauschung aufeinander fallen, also ABC auf $B_1C_1A_1$, so tritt dies immer ein, d. h. die einem Punkte (XY_1) entsprechenden Punkte X_1 und Y fallen stets mit zwei entsprechenden Punkten Z und Z_1 zusammen, so dass also die congruenten Dreiecke XYZ und $Y_1Z_1X_1$ sich in cyklischer Vertauschung befinden. Diese besondere Lage collinearer Ebenen wird die t r i l i n e a r e L a g e genannt und es wird nachgewiesen, dass zwei collineare Ebenen sich auf unendlich viele Arten in trilineare Lage bringen lassen. Hieran schliesst sich die Betrachtung der besonderen Fälle collinearer Beziehung: Affinität, Aehnlichkeit, Gleichheit.

Eingehende Behandlung haben die reciproken Gebilde erfahren. Sind E und E_1 zwei reciproke Ebenen, so heissen die den unendlich fernen Geraden entsprechenden Punkte d i e M i t t e l p u n k t e d e r P u n k t f e l d e r und die durch sie gezogenen Geraden D u r c h m e s s e r. Zwei Durchmesser heissen c o n j u g i r t, wenn jeder durch die entsprechenden Punkte des andern geht. Diese bilden in den Mittelpunkten zwei projectivische Strahlenbüschel. In jedem derselben giebt es ein einziges Paar orthogonaler Strahlen, deren entsprechende auch orthogonal sind. Diese Paare heissen die A x e n der reciproken Ebenen. Legt man die reciproken Systeme so auf einander, dass ihre Axen zusammenfallen, so sind

je zwei entsprechende Elemente Pol und Polare eines ebenen Polarsystems.

Wenn zwei Bündel reciprok auf einander bezogen sind, so giebt es in jedem ein einziges Tripel orthogonaler Strahlen, deren entsprechende Ebenen auch orthogonal sind; daher lassen sich zwei solche Bündel stets zu einem Polarsystem vereinigen, wenn man jene orthogonalen Dreikante zur Deckung bringt.

Incidente Elemente zweier reciproken Felder werden solche Elementenpaare genannt, bei denen der Strahl durch den entsprechenden Punkt geht. Es ergiebt sich, wie der Verfasser in Crelle-Borchardt's Journal Bd. 77 S. 105: „Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume", nachgewiesen hat, dass alle Punkte der einen Ebene E, welche auf ihren entsprechenden Strahlen liegen, einen Kegelschnitt K^2 erfüllen, den Kernkegelschnitt eines durch die reciproke Beziehung bedingten Polarsystems. Ebenso berühren alle Geraden von E, die durch ihre entsprechenden Punkte gehen, einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, der den vorigen doppelt berührt.

Die Erzeugung der Raumcurve dritter Ordnung durch collineare Bündel wird in § 51 behandelt; es ergeben sich aus ihr theils die früheren, theils ergänzende Resultate der in § 31 bis § 39 behandelten Raumcurvenerzeugung durch projectivische Ebenenbüschel. Hieran schliesst sich die Erzeugung der Oberfläche zweiter Ordnung durch reciproke Bündel, die Ableitung ihrer Haupteigenschaften und in § 53 die von Chasles gegebene Construction aus neun gegebenen Punkten. Für andere Constructionen dieses fundamentalen Problems werden die Quellen angegeben (S. 474 und 475). Es ergiebt sich aus der Erzeugung sofort, dass jede Fläche zweiter Ordnung in einem Kegelschnitte getroffen wird; hieraus aber folgen die Polareigenschaften. Aus der Construction der Oberfläche durch neun Punkte folgt, dass durch acht Punkte sich unendlich viele Oberflächen legen lassen, die ein Büschel bilden und jede Ebene in einem Kegelschnittbüschel schneiden.

Die polaren Beziehungen des Oberflächenbüschels oder, wie Reye kurz es nennt, des F^2-Büschels werden später § 72 untersucht.

Aehnlich wie in § 19 die Polareigenschaften eines Hyperboloids aus den einfachsten projectivischen sich ergeben, lassen sich diese Eigenschaften für eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, ohne Benutzung der Eigenschaft, dass dieselbe von jeder Ebene in einem Kegelschnitte getroffen wird, unmittelbar aus der Erzeugung der Fläche durch reciproke Bündel in folgender Weise herleiten. Sind § 56 S. 496 O und O_1 zwei reciproke Bündel, x und y_1 (im Texte steht y) zwei Strahlen derselben durch einen Punkt X, ξ_1 und η die entsprechenden Ebenen, so lege man durch die Schnittlinie $|\xi_1\eta|$ und X eine dritte Ebene und die ihr zugeordnete harmonische Ebene ξ, so sind X und ξ Pol und

Polarebene eines räumlichen Polarsystems, dessen Kernfläche F^2 das Erzeugniss der reciproken Bündel O und O_1 ist.

Die Eintheilung der Flächen zweiter Ordnung geschieht nach dem Charakter ihrer Berührungsebenen, woraus sich drei Hauptclassen ergeben, und innerhalb derselben tritt das Verhalten ihrer unendlich fernen Elemente hinzu. — Je nachdem eine und also jede Berührungsebene mit der Fläche zwei Gerade oder eine, oder einen Punkt gemein hat, erhält man das einfache Hyperboloid oder den Kegel, oder eine Fläche, welche keine Geraden enthält. Solcher Flächen giebt es drei Arten: das zweischalige Hyperboloid, das elliptische Paraboloid, das Ellipsoid.

Zu diesen gesellt sich die imaginäre Fläche zweiter Ordnung als Kernfläche eines elliptischen Polarsystems. Der Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung ist der Mittelpunkt eines Polarbündels in dem ihr zugehörigen Polarsystem; drei Strahlen eines Polardreikants dieses Bündels heissen drei conjugirte Durchmesser. Die Strahlen des einzigen stets reellen Polardreikants dieses Bündels (S. 48) heissen die Hauptaxen der Fläche zweiter Ordnung.

Sehr eingehend werden in § 58 die metrischen Beziehungen conjugirter Durchmesser untersucht. Unter anderen findet man das „räumliche Analogon“ einer bekannten Hyperbeleigenschaft in folgendem Satze ausgedrückt: „Diejenigen Berührungsebenen eines zweischaligen Hyperboloids, deren Berührungspunkte die Mittelpunkte der Ellipsen sind, in welchen sie den Asymptotenkegel treffen, schneiden von diesem ein constantes Volumen ab.“ — Ferner findet man, dass die Summe der Potenzen $P_a + P_b + P_c$ der drei Punktinvolutionen auf drei conjugirten Durchmessern constant ist, dass ferner die Summe ihrer reciproken Werthe, also $\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c}$, auf den Hauptaxen, ausserdem die Summe der Producte $P_a P_b + P_b P_c + P_c P_a$, also auch $P_a P_b P_c$ constant, Sätze, deren Analogie mit den bekannten Kegelschnittssätzen erkennbar ist.

Hieran schliesst sich die Entwickelung metrischer Beziehungen für das räumliche Polarsystem. Der Pol der unendlich fernen Ebene heisst der Mittelpunkt des Systems. Aus der Menge der abgeleiteten Eigenschaften seien folgende hervorgehoben. Der Ort des Schnittpunktes dreier orthogonalen Berührungsebenen einer Fläche zweiter Ordnung ist eine mit ihr concentrische Kugel, welche jede einem Polartetraeder umgeschriebene Kugel rechtwinklig schneidet. Wenn man die Eigenschaften des Kugelbündels und Kugelbüschels benutzt, so lässt sich dieser Satz auch ohne Rechnung erweisen. Gleichzeitig findet die Aufgabe ihre Lösung: Aus drei conjugirten Durchmessern die Axen zu bestimmen. Dieselben sind die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0$, in welcher die Coefficienten von der Grösse und Lage der Durchmesser abhängige Constanten sind.

Die Eigenschaften der Focalkegelschnitte, zuerst von Chasles in seinem „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie" ohne Beweis angegeben, werden im Zusammenhange (§§ 61—66) entwickelt. Durch jeden Punkt im räumlichen Polarsystem giebt es zwei reelle und vier imaginäre Strahlen, deren zugeordnete Ebeneninvolutionen orthogonal sind. Fallen die beiden reellen Strahlen zusammen, so ist das Polarbündel ein rotatorisches. Von dem Punkte lässt sich, falls er ausserhalb der Kernfläche des Polarsystems liegt, an diese ein gerader Kreiskegel als Berührungskegel legen. Alle Punkte, deren Berührungskegel gerade Kreiskegel sind, erfüllen drei Kegelschnitte in den drei Hauptebenen, die Focalkegelschnitte der Kernfläche des Polarsystems, ein Satz, der von Steiner herrührt. Von ihnen ist der eine Ellipse, der zweite Hyperbel, der dritte imaginär. Mit ihnen stehen die Kreisschnitte der Fläche zweiter Ordnung in enger Beziehung. Nur einer der reellen Focalkegelschnitte schneidet die Fläche; die vier Schnittpunkte heissen die Kreispunkte derselben; jede Ebene parallel zu der Berührungsebene in einem Kreispunkte schneidet die Fläche in einem Kreise.

Die Modificationen, welche die Eigenschaften der Focalkegelschnitte beim Paraboloid erfahren, werden in § 63 eingehend dargelegt. — In §§ 64—66 findet man eine Fülle von Sätzen über Focalkegelschnitte, metrische Beziehungen derselben und eingehende Discussion der Kreisschnitte.

Die einfachen metrischen Beziehungen, zu denen die Focalkegelschnitte führen, liefern neue Erzeugungsarten der Oberflächen dritter Ordnung, die von Mac-Cullagh, Jacobi und Salmon angegeben sind.

Alle Flächen zweiter Ordnung, deren Kegelschnitte in den drei Hauptebenen dieselben Brennpunkte und dieselben Focalkegelschnitte haben, bilden eine Schaar von confocalen Flächen zweiter Ordnung, als deren Grenzflächen die Focalkegelschnitte erscheinen. Die Berührungskegel an alle confocalen Flächen aus einem Punkte haben dieselben Hauptaxen und Brennstrahlen. Durch irgend einen Punkt gehen drei confocale, zu einander orthogonale Flächen, ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid. Von den drei Berührungsebenen heissen zwei in Bezug auf die Fläche, welche sie nicht berühren, die Hauptnormalebenen. Die Raumcurven vierter Ordnung, in denen zwei dieser Flächen die dritte schneiden, heissen Krümmungslinien dieser Fläche. Von diesen Linien wird eine Menge von metrischen Beziehungen entwickelt, die auf analytischem Wege von Heilermann in dem Aufsatze: „Ueber die Focalpunkte der Flächen zweiten Grades", Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 56 S. 345, abgeleitet sind. Hervorgehoben mag folgender Satz werden: „Wenn man in jedem Punkte einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung (die keine Gerade enthält) die beiden

Hauptnormalebenen construirt, so treffen dieselben jede der drei Hauptaxen in Punktpaaren einer Involution, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Fläche ist.“ Die Doppelpunkte dieser Involution heissen die Focalpunkte der Fläche; das Ellipsoid hat vier reelle und zwei imaginäre, das zweischaalige Hyperboloid hat zwei reelle und vier imaginäre Focalpunkte. Man construirt sie als Ecken des Parallelogramms, welches die Normalen in den Kreispunkten bilden. Die Kugeln um die Focalpunkte mit ihren Abständen von den Kreispunkten nennt der Verfasser Focalkugeln. Nennt man die Focalkugeln um die auf der grössten Axe des Ellipsoids liegenden Focalpunkte die äusseren, die anderen die inneren, nennt man die Tangente an eine Focalkugel einen Focalstrahl, so gilt: Für alle Punkte einer Krümmungslinie einer Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte ist entweder die Summe oder die Differenz der Focalstrahlen an zwei zusammengehörige Focalkugeln constant, nämlich gleich der durch die Focalpunkte gehenden Hauptaxe derjenigen Fläche, welche die Krümmungslinie bestimmt. Dieser Eigenschaft der Focalkugeln, welche eine gewisse Analogie mit den bekannten Kegelschnittssätzen von der constanten Summe oder Differenz zweier Brennpunktsstrahlen zeigt, schliesst sich eine zweite an von gleich analogem Charakter: Nennt man die Polarebene eines Focalpunktes die Directrix, so spricht sich diese Eigenschaft aus: Für alle Punkte einer Krümmungslinie steht ein Focalstrahl zu dem Abstande von der zugehörigen Directrix in unverändertem Verhältniss.

Es folgt eine kurze Entwickelung der Haupteigenschaften eines Flächenbüschels zweiter Ordnung und Flächenbündels zweiter Ordnung. Dass der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Flächen eines Bündels eine Fläche dritter Ordnung ist, wird S. 710 angeführt, doch leider nicht bewiesen. Mit dem Nachweise der 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung schliesst das inhaltsvolle Werk und eröffnet die Perspective auf die Fortsetzung desselben und die Behandlung derjenigen Abschnitte von den Oberflächen zweiter Ordnung, welche vorläufig ausgeschlossen werden mussten, weil sie sofort in die Theorie der Flächen dritter Ordnung überführen. Es sind dies die Abschnitte über Flächenbüschel und Bündel zweiter Ordnung und die daran sich knüpfende Theorie der Raumcurve vierter Ordnung und der Fläche dritter Ordnung, zu welcher das Flächenbündel unmittelbar führt, über die Axen der Kegelschnitte, die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, über die Normalen einer solchen Fläche, mit denen die Theorie des quadratischen Strahlencomplexes in enger Beziehung steht, endlich die Theorie des Flächengebüsches zweiter Ordnung, aus welcher die Eigenschaften der Steiner'schen und Kummer'schen Fläche vierter Ordnung sich ergeben. Flächenbüschel, Flächenbündel und Flächengebüsch zweiter Ordnung eröffnen in der That „so umfangreiche Forschungsgebiete, dass

durch eine eingehende und erschöpfende Darstellung bei weitem der zulässige Umfang dieses Buches überschritten worden wäre".

In Betreff der Darstellung ist der Verfasser der Ansicht Steiner's gefolgt: „Stereometrische Betrachtungen sind nur dann richtig aufgefasst, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellung angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die synthetische Betrachtungsweise erforderlich und vorzugsweise für Denjenigen, der darin erfinderisch zu Werke gehen will." So wahr dieser Satz an und für sich sein mag, so gilt er praktisch vorzugsweise für Diejenigen, die „erfinderisch zu Werke" gehen wollen. Dies gilt aber doch nur von einem kleinen Theile der Leser eines Werkes und bekanntlich hat das Verschmähen aller Versinnlichungsmittel der Verbreitung des ausgezeichneten v. Staudt'schen Werkes hindernd im Wege gestanden. Hierzu kommt allerdings bei letzterem, wie Reye urtheilt, eine merkwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortknappe Darstellung, nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt. Von dieser Klippe hält sich Schroeter's Werk fern. Die Forderungen an die Vorstellung sind auch für Anfänger nicht zu hoch gespannt; die Darstellung hält die richtige Mitte zwischen Kürze und Weitläufigkeit; die Theilung der Flächen durch ihre Hauptebenen und die Discussion der in ihnen liegenden Kegelschnitte ruft die richtige Anschauung wohl hervor. Doch dürften bildliche Darstellungen dem Anfänger keinen Schaden bringen, in vielen Fällen aber dem Vorstellungsvermögen grosse Erleichterung schaffen. Man vermisst die Figur am meisten bei der Entwickelung metrischer Beziehungen, wo es im Allgemeinen weniger auf die Anschauung der ganzen räumlichen Figur, als auf Vergleichung der einzelnen Theile durch Congruenz, Aehnlichkeit, Involution ankommt. Aber auch als Abbildung einer Fläche ist sie mitunter erwünscht. So ist es z. B. ungemein schwer, eine Vorstellung von der Bewegung einer Geraden, die auf drei anderen windschiefen Geraden gleitet, also von der Form eines einfachen Hyperboloids sich zu verschaffen, wenn keine Figur oder Modell zu Hilfe kommt. Selbst Reye giebt ein Bild desselben, Geometrie der Lage Fig. 55. Das räumliche Verständniss muss durch constructive Vorbereitung vermittelt und durch einfache Versinnlichungsmittel unterstützt werden; dadurch wird die ideelle Anschauung so gekräftigt, dass sie schliesslich solche Mittel gern entbehrt. Die Organisation unserer Schulen gestattet meist nicht, so viele Zeit auf die Kräftigung des räumlichen Denkens zu verwenden, als Steiner für nöthig hält. Dazu kommt, dass viele von den Lehrern, dem analytischen Zuge auf unseren Universitäten folgend, selbst sich nicht eingehend mit Geometrie beschäftigt haben und diese deshalb mehr oder weniger leiden lassen. Daher werden viele der von unseren Schulen abgehenden Studenten nur ein gering durchgebildetes Vorstellungsvermögen auf die Universität mitbringen. Von diesen — und für sie ist es

ja wohl geschrieben — wird vorliegendes Werk mit lebhafter Anerkennung begrüsst werden; die ungemein klare und ausführliche Darstellung, die immer nur die einfachsten und unmittelbarsten projectivischen Beziehungen in Anspruch nimmt, lässt allmälig die richtige Anschauung hervortreten. Reye's Geometrie der Lage setzt überall die vorher behandelten Theile ganz und vollständig voraus, gelangt dadurch natürlich schneller, aber für den Studirenden mühsamer weiter. Schroeter's Buch kann man lesen, das von Reye muss man studiren. Beide Werke ergänzen einander; das erstere wird dem Anfänger willkommener sein, das letztere von dem schon Geübten vorgezogen werden.

Sehr anzuerkennen ist die glückliche Verbindung der Geometrie der Lage mit derjenigen des Maasses und dadurch der höheren, projectivischen Geometrie mit der elementaren. Meist wohl durch das Mittel der Involution sind aus den projectivischen Erzeugungsarten der Gebilde durch metrische Beziehungen elementare abgeleitet. Es dürfte keine undankbare Aufgabe sein, den umgekehrten Weg zu gehen, aus den elementaren Erzeugungsweisen die Gebilde zweiter Ordnung zu construiren und aus ihnen die projectivischen Eigenschaften abzuleiten. Steiner selbst hat bei den Kegelschnitten diesen Versuch gemacht und er lässt sich auch bei Oberflächen durchführen. In der schönen Abhandlung in Crelle-Borchardt's Journal: „Ueber ein besonderes Hyperboloid" hat der Verfasser selbst diesen Weg eingeschlagen. Wer die Elemente der projectivischen Geometrie sich auf der Universität angeeignet hat — und die Zahl der Mathematiker, die dies nicht gethan haben, ist nicht klein —, wird sich dieselben später im Lehreramte nicht zu eigen machen oder dieselben doch nicht so zu handhaben lernen, dass er sie in elementare Form zu kleiden versteht. Soll daher das Studium der Oberflächen zweiter Ordnung allgemeinen Eingang finden, so müssen die Eigenschaften derselben auf ganz elementarem Wege abgeleitet werden. Hierzu aber wird Schroeter's Buch helfend beitragen und so seinen Wirkungskreis mittelbar erweitern. Die meisten Eigenschaften der Focalkegelschnitte, die doch bis jetzt im Allgemeinen ein ziemlich unbekanntes Gebiet bildeten, haben eine elementare Ableitung. Weitere Beispiele übergehe ich; im Laufe der Besprechung sind sie vielfach hervorgetreten. Aus ihr ergiebt sich in ziemlicher Ausführlichkeit der ungemein reiche Inhalt, der natürliche Fortschritt vom engeren zum weiteren Gebilde und hoffentlich die sichere Erkenntniss von seinem fundamentalen Werthe für das Studium der Flächen zweiter Ordnung.

Zum Schlusse sei der Hoffnung Ausdruck gegeben, dass es dem Verfasser vergönnt sein möge, das geometrische Publicum mit einer ausführlichen Darstellung der nur kurz behandelten oder übergangenen Gebiete bald zu erfreuen.

Weissenburg im Elsass, März 1881. MILINOWSKI.

Zur Grundlegung der Psychophysik. Kritische Beiträge von Dr. Georg Elias Müller, Privatdocent der Philosophie an der Universität zu Göttingen. 1878.

Das vorliegende sehr verdienstvolle Werk bildet den 23. Band der im Verlag von Th. Grieben in Berlin erscheinenden „Bibliothek für Wissenschaft und Literatur". Der Verfasser giebt in demselben, dem dermaligen Stande der Wissenschaft entsprechend, eine eingehende Untersuchung über die Giltigkeit, Bedeutung und Zweckmässigkeit des Weber-schen Gesetzes. Das Buch zerfällt in vier Hauptabschnitte. Der erste ist der Kritik der bei Prüfung des Weber'schen Gesetzes zur Verwendung gekommenen psychophysischen Maassmethoden gewidmet. Der Verfasser weist nach, dass eine grosse Anzahl dieser Methoden für den vorliegenden Zweck unbrauchbar ist und dass die durch principiell richtige Methoden gewonnenen Zahlenresultate vielfach unrichtige Verwendung fanden. Von besonderem Interesse ist in diesem Abschnitte die Aufstellung von Formeln für die Methode der richtigen und falschen Fälle, sowie die Bemerkungen über die „Methode der kleinsten Unterschiede", wie der Verfasser die Combination der Methode der eben merklichen Unterschiede mit der Methode der eben unmerklichen Unterschiede nennt. — Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Thatsachen des Weber-schen Gesetzes; in ihm werden die vorhandenen Versuchsreihen einer näheren Prüfung unterworfen, aus welcher dann auf das Maass der Giltigkeit des Weber'schen Gesetzes geschlossen wird. — Im Gegensatz zu Fechner's psychophysischer Deutung des Weber'schen Gesetzes (Empfindungsstärke proportional dem Logarithmus der Sinnesnervenerregung, letztere proportional dem äussern Reize), vertheidigt der Verfasser im dritten Abschnitte die sogenannte physiologische Auffassung (Empfindungsstärke proportional der Sinnesnervenerregung, letztere proportional dem Logarithmus des äussern Reizes) als die wahrscheinlichere von beiden Ansichten. Als eine wesentliche Stütze der physiologischen Deutung wird die unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit mögliche Erklärung der interessanten Proportionalität des Präcisionsmaasses und der absoluten Unterschiedsempfindlichkeit angeführt, während die psychophysische Ansicht nicht im Stande sei, eine Erklärung dieser auffallenden Thatsache zu geben. — Der vierte Abschnitt endlich handelt von der Zweckmässigkeit des Weber'schen Gesetzes. Es wird darin hauptsächlich die Bedeutung seiner annähernden Giltigkeit für die Wiedererkennung früher wahrgenommener Objecte besprochen.

Das Werk, von dem wir nur diese kurze Inhaltsübersicht geben können, ist überaus reichhaltig und zeichnet sich durch klare, lebhafte Darstellung aus.

Dietrich.

J. Somoff, **Theoretische Mechanik.** Deutsch von Ziwet. 2 Theile. Leipzig, Teubner. 1878.

Das Werk ist aus langjährigen Vorlesungen über theoretische Mechanik an der Universität St. Petersburg hervorgegangen. Es enthält alle die Theorien, welche in der neueren Zeit in die Mechanik eingeführt worden sind, zum Theil von dem Verfasser selbst herrührend: die Methode des geometrischen Differentiirens, die Sätze über die Beschleunigungen verschiedener Ordnung, über die Differentialparameter erster und zweiter Ordnung u. s. w. Bei der Behandlung des Stoffes findet vielseitige Anwendung der geometrischen Grössen und Punktfunctionen, sowie überhaupt geometrischer Methoden statt. Der erste Theil behandelt die Kinematik, der zweite die Statik und eine Einleitung in die Statik und Dynamik, der eine „Geometrie der Massen" vorausgeschickt wird. Unter dem Titel „Variation der Massen und Raumgrössen" wird eine ganz allgemeine Theorie der Momente gegeben. Das Werk ist, wie man sieht, für das höchste Studium der Mechanik bestimmt, für den Theoretiker und Mathematiker, nicht für praktische Zwecke. Die Uebersetzung ist lobenswerth, gut zu lesen. Bei den Haupttheorien ist immer auf die Quellen verwiesen, insbesondere auf die zahlreichen Abhandlungen des Verfassers in den Memoiren der Petersburger Akademie der Wissenschaften. Somoff ist 1876 in Petersburg gestorben.

P. Zech.

Clausius, **Mechanische Wärmetheorie.** 2. Aufl. II. Bd. Braunschweig, Vieweg. 1879.

Der berühmte Verfasser stellt in diesem Bande seine Untersuchungen über elektrische, insbesondere elektrodynamische Erscheinungen zusammen. Es sind diese Untersuchungen so erweitert worden, dass der Band auch unter dem besondern Titel: „Die mechanische Behandlung der Elektricität" erschienen ist. Einem dritten Theile wird der Rest der mechanischen Wärmetheorie vorbehalten. Die dielektrischen Medien, die elektrische Entladung, der elektrische Strom, die Elektrolyten, die Thermoströme, die Ampère'schen Sätze und die Elektrodynamik bilden den reichen Inhalt des Werkes.

P. Zech.

Bibliographie

vom 16. Juli bis 31. October 1881.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 27. Bd. v. J. 1881. Göttingen, Dieterich. 36 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Cl. II. 83. Bd. 3. u. 4. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk. 50 Pf.

Mémoires de l'académie imp. de Pétersbourg. VII. Série. Tome XVIII Nr. 4—7, Tome XIX Nr. 1. Leipzig, Voss. 27 Mk. 75 Pf.

Oerter von 359 Sternen für d. J. 1882. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 9. Jahrg. 1881, 7. Heft. Berlin, Mittler. pro compl. 3 Mk.

Beobachtungen am astro-physikalischen Observatorium in O-Gyalla. 3. Bd., herausgegeben von N. v. Konkoly. Halle, Schmidt. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 11. Bd. J. 1879. 1. u. 2. Heft. Herausgeg. von Ohrtmann, Müller u. Wangerin. Berlin, G. Reimer. 10 Mk. 80 Pf.

Fortschritte der Physik; 1877. 23. Jahrg. 1. Abth., redig. v. B. Schwalbe. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

Archiv der Mathematik und Physik, gegr. v. Grunert, fortges. v. Hoppe. 67. Thl. 1. Heft. Leipzig, Koch. pro compl. 10 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Krüger, A., Biographische Skizzen aus der Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik. Berlin, W. Weber, Verl.-Conto. 60 Pf.

Marloh, E., Geschichte des Restes der Taylor'schen Reihe. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

Reine Mathematik.

Collectanea mathematica, in memoriam Domin. Chelini edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami. Mailand, Hoepli. 20 Mk.

Bruno, Faa di, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Deutsch bearb. v. Th. Walter. Leipzig, Teubner. 10 Mk. 80 Pf.

Ehrhorn, M., Ueber die von Challis vorgeschlagene Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen II. O. und ihre Anwendung auf Probleme der Variationsrechnung. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.

Gegenbauer, L., Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Haluschka, F., Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Ungar, M., Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Greve, Lehrbuch der Mathematik. I. Cursus, Arithmetik u. Geometrie. Berlin, Stubenrauch. 1 Mk. 20 Pf.

Ameseder, A., Ueber ein Nullsystem zweiten Grades. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Binder, W., Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Bobeck, K., Metrische Beziehungen in Congruenzen linearer Complexe. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Ameseder, A., Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Le Paige, C., Bemerkungen über cubische Involutionen. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Weyr, E., Ausartungen biquadratischer Involutionen u. s. w. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Peschka, V., Normalenfläche einer Developpabelen längs ihres Durchschnitts mit einer krummen Fläche. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Mahler, E., Die Fundamentalsätze der allgemeinen Flächentheorie. 2. Heft. Wien, Seidel & Sohn. 1 Mk.

Simony, O., Ueber Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch gewisse Schnitte entstehen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

Franke, J., Ueber geometrische Eigenschaften von Kräfte- und Rotationssystemen in Verbindung mit Liniencomplexen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Weiss, E., Ueber die Berechnung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität u. s. w. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Klein, B., Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Margebilde. Marburg, Elwert. 1 Mk.

Kroes, F., Untersuchung der Systeme ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreieck umschrieben sind. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk. 40 Pf.

Lippich, F., Zur Theorie der Polyeder. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Sattler, A., Leitfaden der Geometrie. Drei Curse. Braunschweig, Bruhn. 1 Mk.

Henrici, J. u. P. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. 1 Thl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Schwarz, A., Lehrbuch der Stereometrie. Leipzig, Gebhardt. 1 Mk. 80 Pf.

ADAM, W., Ausführliches Lehrbuch der Planimetrie nebst den wichtigsten Sätzen der neueren Geometrie. Langensalza, Beyer & S. 4 Mk.

GLINZER, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Thl., Stereometrie. Hamburg, Nestler & Melle. 3 Mk.

FUHRMANN, W., Einleitung in die neuere Geometrie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

GÖTTING, A., Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Berlin, Wohlgemuth. 1 Mk. 20 Pf.

SACHSLAND, E., Goniometrie und Trigonometrie. Stolp, Schrader. 60 Pf.

SINRAM, TH., Aufgaben aus der Algebra nebst Auflösungen. 3. Theil. Hamburg, Meissner. 3 Mk.

SCHMIDT, E., Planimetrische Aufgaben. Hamburg, Behre. 1 Mk. 20 Pf.

LUKE, A., Sammlung planimetrischer Aufgaben über das Dreieck. 2. Heft für Secunda und Prima. Halle, Schmidt. 2 Mk. 60 Pf.

FUSS, K., Sammlung von Constructions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie. Nürnberg, Korn. 1 Mk.

ZIMMERMANN, R., Henry More und die vierte Dimension des Raumes. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

DURÈGE, H., Ueber Körper von vier Dimensionen. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

DONADT, A., Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Leipzig, Barth. 1 Mk. 60 Pf.

BEYDA, TH., Die imaginären Grössen und ihre Auflösung. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

PELZ, C., Zur wissenschaftlichen Behandlung der Axonometrie. 2. Thl. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

PUTSCHE, H., Perspectivische Constructionen. 1. Serie. Dresden, Gilbers. 30 Mk.

EISERT, M., Vorträge über darstellende Geometrie. Kaiserslautern, Gotthold. 1 Mk.

STEFAN, J., Ueber das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger Temperatur. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

WITTENBAUER, F., Ueber Momente höherer Ordnungen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

JÜRGENSEN, E., Ueber eine Art von Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche. Berlin, Mecklenburg. 2 Mk.

GYLDÉN, H., Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einflusse einer Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$ bewegt. Berlin, Friedländer. 3 Mk. 60 Pf.

MIETHING, E., Bewegung eines Körpers in einer ellipsoidischen Schale u. s. w. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Wittenbauer, F., Ueber Deviationsmomente. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Mischer, R., Ueber Lagrange's zweite Form des d'Alembert'schen Princips. Jena, Neuenhahn. 80 Pf.

Klemenčič, J., Ueber die Dämpfung der Schwingungen fester Körper. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Schüler, F., Das Princip der Erhaltung der Kraft und die Planetenbahnen als involutorische Punktreihen. Freising, Datterer. 1 Mk.

Finger, J., Ueber ein Analogon des Kater'schen Pendels und dessen Anwendung zu Gravitationsmessungen. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Kleritj, L., Zur Theorie und Praxis der Compensationspendel. Freiberg, Craz & Gerlach. 1 Mk. 20 Pf.

Auerbach, F., Die theoretische Hydrodynamik, nach ihrem Entwickelungsgange in neuester Zeit kurz dargestellt. Braunschweig, Vieweg. 4 Mk.

Margules, M., Ueber die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoefficienten etc. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Boltzmann, L., Zur Theorie der Gasreibung. 2. Thl. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Schlesinger, J., Maximalfehler bei Polygonisirungen etc. Wien, Frick. 80 Pf.

Bečka, G., Ueber die Bahn des Planeten Ino (173). (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Holetschek, J., Bahnbestimmung des Planeten Peitho (118). (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Mayer, J., Ueber die Bahn des Kometen 1880 *b*. (Ak.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Hornstein, C., Beitrag zur Kenntniss des Asteroidensystems. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Seeliger, H., Ueber die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ Cancri. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Tinter, W., Zur Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der technischen Hochschule zu Wien. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Martus, H., Astronomische Geographie. Schulausg. Leipzig, Koch. 2 Mk. 60 Pf.

Boltzmann, L., Ueber einige das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Neumann, F., Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 60 Pf.

Physik und Meteorologie.

Helmholtz, H., Wissenschaftliche Abhandlungen. 1. Bd. 1. Abth. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Kirchhoff, G., Gesammelte Abhandlungen. 1. Abth. Leipzig, Barth. 6 Mk.

Weinhold, F., Physikalische Demonstrationen. 3. Lief. (Schluss.) Leipzig, Quandt & Händel. 8 Mk. 50 Pf.

Stefan, J., Ueber die Verdampfung aus einem elliptischen Becken. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Klemenčič, J., Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der elektromagnetischen und mechanischen Einheit der Stromintensität. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

Ditscheiner, L., Ueber die Aufsuchung von Störungsstellen an nicht vollkommen isolirten Leitungen. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf

Hočevar, F., Versuche mit einer Holtz'schen Influenzmaschine. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

Moser, J., Elektrostatische Untersuchungen insbesondere über Verzweigungen der Induction. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Streintz, F., Ueber die durch Entladung von Leydener Flaschen hervorgerufene Wasserzersetzung. (Akad.) Wien, Gerold. 70 Pf.

Kastner, F., Theorie der Schwingungen und Analyse der Elektricität. Strassburg, Trübner. 1 Mk.

Zimmermann, H., Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität auf einen Conductor von der Gestalt einer Fresnel'schen Elasticitäts-Umdrehungsfläche. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk.

Reitlinger, E. u. F. Wächter, Ueber die Disgregation der Elektricität und die Lichtenberg'schen Figuren. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.

Niaudet, A., Die galvanischen Elemente von Volta bis heute. Deutsch bearbeitet von Ph. Hauck. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

Exner, F., Ueber galvanische Elemente, die nur aus Grundstoffen bestehen. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Puluj, J., Strahlende Elektrodenmaterie. 2. u. 3. Abhdl. (Akad.) Wien, Gerold. 55 Pf.

Oberbeck, A., Ueber die zeitlichen Veränderungen des Erdmagnetismus. Leipzig, Engelmann. 70 Pf.

Krebs, G., Grundriss der Physik für höhere realistische Lehranstalten. Leipzig, Veit & Comp. 7 Mk.

Jochmann, E., Grundriss der Experimentalphysik. 7. Aufl., vermehrt um die Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie von O. Hermes. Berlin, Winckelmann & S. 4 Mk. 60 Pf.

Ballauf, L., Die Grundlehren der Physik in elementarer Darstellung. 3. Bd. Langensalza, Beyer & S. 2 Mk. 50 Pf.

Lommel, E., Lexicon der Physik und Meteorologie. Leipzig, bibliogr. Institut. 4 Mk. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1880.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abbildung.

221. Ueber die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkte versehenen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt. E. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 396.
222. Ueber die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte auf einem Kegelschnitt. E. Weyr. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 891.

Abzählende Geometrie.

223. Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks. H. Schubert. Mathem. Annal. XVII, 153.
224. Zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche. H. Schubert. Mathem. Annal. XVII, 575.
225. On Schubert's method for the contact of a line with a surface. Cayley. Quart. Journ. math. XVII, 244.

Akustik.

226. Ueber den von Dvořák beobachteten Variationston. Haberditzl. Wien. Akad.-Ber. LXXVII, 204.
227. Ueber continuirliche akustische Rotationen und deren Beziehung zum Flächenprincip. Haberditzl. Wien. Akad.-Ber. LXXVII, 641.

Analytische Geometrie der Ebene.

228. On dual inversion of Cartesian and Boothian coordinates. Jeffery. Quart. Journ. math. XVII, 311.
229. Des courbes algébriques qui ont plusieurs axes de symétrie. De Saint-Germain. N. ann. math. XXXIX, 350.
230. Der Satz von Desargues über perspectivische Dreiecke. Hunyady. Crelle LXXXIX, 79.
231. Lagenbeziehungen bei ebenen, perspectivischen Dreiecken. Wedekind. Mathem. Annal. XVI, 209.
232. Trouver l'équation de la perspective d'une hélice, le tableau étant perpendiculaire à son axe et le point de vue S étant sur cet axe. Lebon. N. ann. math. XXXIX, 172.
233. Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung. Freyberg. Mathem. Annal. XVII, 329.
234. Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. Brill. Mathem. Annal. XVII, 103, 517.
235. Construction de la tangente à l'ovale de Descartes. Dewulf. N. ann. math. XXXIX, 428.
236. Construction de la tangente à la courbe $\varrho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$. Fouret. N. ann. math. XXIX, 28.
237. Spirale logarithmique en reproduisant une autre. Droz. N. ann. math. XXXIX, 526.

Vergl. Cycloide. Ellipse. Functionen 338. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

238. Ueber die Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel. Hoppe. Grun. Archiv LXV, 287.
239. Ein algebraischer Satz nebst geometrischen Anwendungen. Pasch. Crelle LXXXIX, 252.

240. Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades. Schur. Mathem. Annal. XVII, 107.
241. Einige Eigenschaften von Kugelbüscheln und Kugelschaaren. N. Herz. Grun. Archiv LXV, 385.
242. On spherical curves of the third class with three single foci. Jeffery. Quart. Journ. math. XVII, 104. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 266.]

Vergl. Ellipsoid. Geodäsie. Kegelschnitte 413, 415. Paraboloid.

Astronomie.

243. Folgerungen aus Oppolzer's „neuer Methode zur Bestimmung der Bahnelemente für einen kleinen Planeten" für die Bearbeitung späterer Oppositionen. Kühnert. Astr. Nachr. XCV, 145, 203.
244. Ueber den Lagrange'schen Satz über die Bewegung der Knotenlinien der Planetenbahnen. Seeliger. Astr. Nachr. XCIV, 253.
245. Ueber das von Gauss herrührende Theorem, die Säcularstörungen betreffend. Seeliger. Astr. Nachr. XCIV, 1, 17.
246. Sur une inégalité du quatrième ordre qui existe dans les moyens mouvements des satellites Titan et Japhet de Saturne. Souchon. Astr. Nachr. XCV, 97.
247. Entwickelung der Differentialquotienten der wahren Anomalie und des Radius vector nach der Excentricität in nahezu parabolischen Bahnen. v. Oppolzer. Astr. Nachr. XCV, 13.
248. Ueber die Bestimmung grosser wahrer Anomalien in parabolischen Bahnen. v. Oppolzer. Berl. Akad.-Ber. 1880, 511.
249. Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radius vectors nach der mittleren Anomalie. Scheibner. Mathem. Annal. XVII, 531.
250. Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen. Scheibner. Mathem. Annal. XVII, 545.
251. Quelques séries très utiles. De Gasparis. Astr. Nachr. XCIV, 301, 383; XCV, 221.
252. Mouvement de la matière cométaire sur une hyperbole convexe vers le soleil. Bredichin. Astr. Nachr. XCIV, 143.
253. Ueber die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung. Israel. Grun. Archiv LXV, 225.

Vergl. Geschichte der Mathematik 367.

Attraction.

254. On Legendre's theorem concerning the attraction of an ellipsoid on an external point. Warren. Quart. Journ. math. XVII, 154.
255. Ueber die Anziehung von Massenpunkten insbesondere mit Rücksicht auf die Lothstörungen. Winterberg. Grun. Archiv LXV, 113.

Vergl. Potential.

B.

Bestimmte Integrale.

256. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$. P. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XVI, 115.
257. Zur Theorie der mechanischen Quadraturen. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 768.
258. Directe Bestimmung des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x . dx$. Ligowski. Grun. Archiv LXV, 110.
259. On the integrals $\int_{-1}^{1} P_i . \mu^m . d\mu$, $\int_{-1}^{1} P_i . \cos m\vartheta . d\mu$, $\int_{-1}^{1} P_i . \nu^m . d\mu$, $\int_{-1}^{1} P_i . \sin m\theta \times d\mu$. Forsyth. Quart. Journ. math. XVII, 37.

Vergl. Elliptische Transcendenten. Functionen 337. Gammafunctionen. Residuen. Ultraelliptische Transcendenten.

Brachistochrone.

260. Théorie élémentaire des brachistochrones. Resal. N. ann. math. XXXIX, 385.

C.

Combinatorik.

261. On the finite groups of linear transformations of a variable. Cayley. Math. Annal. XVI, 260, 439. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 389.]
262. Anzahl der innerhalb eines n-Ecks fallenden Schnittpunkte seiner Diagonalen. Englert. Grun. Archiv LXV, 446.
263. Nombre des points d'intersection des diagonales d'un polygone convexe. D'Ocagne. N. ann. math. XXXIX, 44. — Lionnet ibid. 456.

Vergl. Functionen 343. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Crystallographie.

264. Ueber die Berechnung der Elemente einer monoklinischen Krystallgattung. Websky. Berl. Akad.-Ber. 1880, 239.

Cubatur.

265. Sur l'évaluation de certains volumes. Maleyx. N. ann. math. XXXIX, 529.
266. Excentrischer Kugelsector. Hoppe. Grun. Archiv LXV, 176.

Cycloide.

267. Théorèmes sur les cycloïdes et épicycloïdes. Fouret. N. ann. math. XXXIX, 63.

Vergl. Geometrie (höhere) 364. Geschichte der Mathematik 373.

Cylinderfunctionen.

268. Ueber Reihenentwickelung nach Bessel'schen Functionen. J. König. Math. Annal. XVII, 85.
269. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Lommel. Mathem. Annal. XVI, 183.
270. Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. Sonine. Mathem. Annal. XVI, 1.

D.

Determinanten.

271. Elemente der Determinantentheorie. Hoppe. Grun. Archiv LXV, 65.
272. Ueber gewisse Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Pasch. Crelle LXXXIX, 247.
273. Beiträge zur Theorie der Determinanten. Fürstenau. Crelle LXXXIX, 86.
274. On a determinant theorem of M. Glaisher. Scott. Quart. Journ. math. XVII, 129. [Vergl. Bd. XXV, Nr 310.]
275. Ueber eine Classe symmetrischer Determinanten. Noether. Mathem. Annal. XVI, 551.
276. Sur les déterminants composés. Borchardt. Crelle LXXXIX, 82. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 305.]
277. Sur la transformation du déterminant de M. Sylvester en celui de Cauchy. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 110. — Ventéjol ibid. 188.

Differentialgleichungen.

278. Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabelen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen. Fuchs. Crelle LXXXIX, 151; XC, 71.
279. Ueber algebraisch-logarithmische Integrale nicht-homogener linearer Differentialgleichungen. Königsberger. Crelle XC, 267.
280. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. E. Picard. Crelle XC, 281.
281. Ueber lineare Differentialgleichungen. S. Spitzer. Grun. Archiv LXV, 306.
282. Construction einiger linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung. S. Spitzer. Grun. Archiv LXV, 321.
283. Sur la théorie des équations différentielles ordinaires. Laurent. N. ann. math. XXXIX, 153.
284. On the relations of certain symbols. Cockle. Quart. Journ. math. XVII, 20, 208.
285. Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie. A. Mayer. Mathem. Annal. XVII, 332.

286. Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems A. Mayer. Mathem. Annal. XVII, 523.
287. Ueber eine Eigenschaft der Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen. Hazzidakis Crelle XC, 80
288. Ueber die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen. Hočevar. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 47.
289. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Hermite. Crelle LXXXIX, 9.
290. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Bäcklund. Mathem. Annal. XVII, 285.
291. Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Hazzidakis. Crelle XC, 74.
292. Eine merkwürdige Eigenschaft des Integrals der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - \cos 2x}$. Meissel. Grun. Archiv LXV, 111.
293. On the equation $x(1-x)y'' + (\frac{2}{3} - \frac{7}{6}x)y' + \frac{1}{48}y = 0$. Cockle. Quart. Journ. math. XVII, 293.
294. On a differential equation. Harley. Quart. Journ math. XVII, 352.
295 Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $P.dx + Q.dy + R.dz = 0$. Voss. Mathem. Annal. XVI, 556.

Vergl. Paraboloid.

E.

Elasticität.

296. Distortion of an elastic sphere. Craig. Crelle XC, 253.

Elektrodynamik.

297. Die Principien der Elektrodynamik. C. Neumann. Mathem. Annal. XVII, 400.
298. Ueber Ampère's elektrodynamische Fundamentalversuche. v. Ettingshausen. Wien. Akad-Ber. LXXVII, 109.
299. Ueber das ponderomotorische Elementargesetz. Korteweg. Crelle XC, 49.
300. Bemerkung zu den Stefan'schen Grundformeln der Elektrodynamik. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 779
301. Zur Theorie der elektrischen Kräfte. Korteweg. Mathem. Annal. XVI, 533.
302 Theorie und Anwendung der elektromagnetischen Rotationen. Margules. Wien. Akad.-Ber. LXXVII, 805.
303. Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten. G. Kirchhoff. Berl. Akad.-Ber. 1880, 601.
304. On some problems in the conduction of electricity. Allen. Quart. Journ math. XVII, 65.
305. Ueber die Elektricitätsbewegung im Raume und die Nobili'schen Ringe. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LXXXVIII, 93.

Vergl. Elliptische Transcendenten 320. Potential 475 Wärmelehre 528.

Ellipse.

306. Neuer Ellipsograph. Sidersky. Grun Archiv LXV, 420.
307. Einschreibung einer Ellipse in ein Parallelogramm. Jeřábek. Grun. Archiv LXV, 215. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 339.]
308. Le sommet d'un angle droit décrit une ellipse tandis qu'un de ses côtés tourne autour du centre: trouver l'enveloppe de l'autre côté. Bourguet. N. ann. math. XXXIX, 236
309. Sur le cercle qui passe par les pieds des trois normales abaissées d'un point de l'ellipse sur la courbe. Weill. N. ann. math. XXXIX, 60.
310. Sur la construction des normales à l'ellipse. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 279.
311. Point de rencontre des tangentes communes à une ellipse et à une circonférence passant par deux points donnés de l'ellipse. Macé de Lépinay. N. ann. math. XXXIX, 91. — Le Cointe ibid. 122. — Darboux ibid. 184.

Vergl. Potential 472.

Ellipsoid.

312. Construction de la normale à la surface de Glaisher. Mannheim. Quart. Journ. math. XVII, 147. — S. Roberts ibid. 280. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 342.]

Vergl. Attraction 254. Potential 474.

Elliptische Transcendenten.

313. A chapter in elliptic functions. Glaisher. Quart Journ. math. XVII, 50.
314. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen. F. Klein. Mathem. Annal. XVII, 62.
315. Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. F. Klein. Mathem. Annal. XVII, 133.
316. Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. Bianchi. Mathem. Annal. XVII, 234.
317. Kurze Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale aus der Gleichung $\frac{da}{\varDelta a}+\frac{db}{\varDelta b}=0$. Graefe. Crelle XC, 83.
318. Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen. Brill. Mathem. Annal. XVII, 87.
319. On the connexion between elliptic functions and spherical trigonometry. Glaisher. Quart. Journ. math. XVII, 353.
320. Solutions by means of elliptic functions of some problems in the conduction of electricity and of heat in plane figures. Greenhill. Quart. Journ. math. XVII, 284.

Euler'sche Zahlen.

321. Zur Theorie der Euler'schen Zahlen. Radicke. Crelle LXXXIX, 257.

F.

Formen.

322. Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft. Rosane Crelle XC, 308. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 360.]
323. Die Lehre von den quadratischen Formen mit positiver Determinante. Mertens. Crelle LXXXIX, 332.
324. Ueber die Classenzahl einer quadratischen Form mit complexer Determinante. Bachmann. Mathem. Annal. XVI, 537.
325. Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Gierster. Mathem. Annal. XVII, 71, 74.
326. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Markoff. Mathem. Annal. XVII, 379. [Vergl. Bd XXV, Nr. 362.]
327. Sur la réduction des polynomes du second degré homogènes à des sommes de carrés Laurent. N. ann. math. XXXIX, 12.
328. Das Doppelverhältniss und die absolute Invariante binärer quadratischer Formen. Wedekind. Mathem. Annal. XVII, 1.
329. Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f=x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1$. Gordan. Mathem. Annal. XVII, 217.
330. Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f=x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1$. Gordan. Mathem. Annal. XVII, 359.
331. Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung. v. Gall. Mathem. Annal. XVII, 31, 139, 456.

Vergl. Invariantentheorie.

Functionen.

332. Theorie der Transformationsgruppen. S. Lie. Mathem. Annal. XVI, 441.
333. Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem. Königsberger. Crelle XC, 109.
334. Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen. Königsberger. Mathem. Annal. XVII, 561.
335. Zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. H. Stahl. Crelle LXXXIX, 170.
336. Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen. Noether. Mathem. Annal. XVII, 263.
337. Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XVI, 112.
338. Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrass'schen Function. Wiener. Crelle XC, 221.
339. Ueber die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen. Weierstrass. Crelle LXXXIX, 1.
340. Zur Functionentheorie. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1880, 719.
341. Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler. Weierstrass. Berl. Akad.-Ber. 1880, 707.

342. Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. G. Hettner. Crelle LXXXIX, 221.
343. Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen. E. Schröder. Crelle XC, 189.
344. Ueber einen elementaren Algorithmus. Stieltjes. Crelle LXXXIX, 343.
345. Liaison entre les reduites de la fonction e^x et de $log\frac{x-1}{x}$. Laguerre. Crelle LXXXIX, 340.
346. Développement en série entière de $(1+ax)^{\frac{1}{x}}$. Appell. Grun. Archiv LXV, 171.
Vergl. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Differentialgleichungen 278, 279, 280. Elliptische Transcendenten. Euler'sche Zahlen. Gammafunctionen. Gleichungen 375, 377, 378, 379, 380. Kugelfunctionen. Reihen 480, 481, 482. Residuen. Riemann'sche Fläche. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Unendlich. Zahlentheorie 531.

G.

Gammafunctionen.

347. Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. Hermite. Crelle XC, 332.
Vergl. Reihen 486.

Geodäsie.

348. Ueber die geodätische Linie. Winterberg. Astr. Nachr. XCV, 223, 239, 271.
349. Die geodätische Uebertragung geographischer Coordinaten. Helmert. Astr. Nachr. XCIV, 313.
350. On the differential equation of the ellipticities of the strata in the theory of the figure of the earth. Greenhill. Quart. Journ. math. XVII, 203.

Geometrie (descriptive).

351. Zur orthogonalen Axonometrie. Streissler. Grun. Archiv LXV, 208.
352. Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. Peschka. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 1043.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 232. Oberflächen zweiten Grades 450.

Geometrie (höhere).

353. Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe. F. Klein. Mathem. Annal. XVII, 52.
354. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. Darboux. Math. Annal. XVII, 55.
355. Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig aufeinander bezogenen Plancurven. H. Schubert. Mathem. Annal. XVI, 180.
356. Ueber aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven. Kraus. Mathem. Annal. XVI, 245.
357. Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. H. Schubert. Mathem. Annal. XVII, 457.
358. Ueber den Zusammenhang von n beliebigen Geraden in der Ebene. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 789. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 76.]
359. Ueber eine Gattung merkwürdiger Geraden und Punkte bei vollständigen n-Ecken auf dem Kreise. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 193.
360. Ueber das vollständige Viereck und das vollständige Kreisviereck. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 172. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 77.]
361. Ueber das vollständige Fünfseit. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 165, 797.
362. Ueber ebene Curven dritter Ordnung. R. Sturm. Crelle XC, 85.
363. Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung. Milinowski. Crelle LXXXIX, 136.
364. Die Tangentengeometrie an der Steiner'schen Hypocycloide. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 204.
365. On quadric transformation. Hirst. Quart. Journ. math. XVII, 301.
366. Recherches sur deux modes de transformation des figures solides. Amigues. N. ann. math. XXXIX, 433, 481. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 400.]
Vergl. Formen 322. Kegelschnitte. Kinematische Geometrie. Mechanik 441. Riemann'sche Fläche. Singularitäten.

Geschichte der Mathematik.

367. Ueber die Sonnenfinsterniss des Schu-king. v. Oppolzer. Berl. Akad.-Ber. 1880, 166.
368. Digression historique sur les quantités négatives. Dostor. N. ann. math. XXXIX, 562.
369. Ueber den Erfinder des negativen Oculars. Oudemans. Astr. Nachr. XCV, 323.
370. Ueber zwei neu aufgefundene Leibniz'sche Manuscripte. Gerhardt. Berl. Akad.-Ber. 1880, 824.
371. Ueber Newton's Methode zur Beschreibung eines Kegelschnittes, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt. Grunert. Grun. Archiv LXV, 1. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 404.]
372. Sur quelques lettres inédites de Lagrange publiées par M. Balthasar Boncompagni. Govi. N. ann. math. XXXIX, 421.
373. Aperçu historique sur les propriétés les plus remarquables de l'épicycloïde à quatre rebroussements. Haton de la Goupillière. N. ann. math. XXXIX, 94.
374. Todesanzeige von Johann von Lamont, † 6. August 1879. Astr. Nachr. XCV, 253.

Vergl. Elektrodynamik 297. Gleichungen 388.

Gleichungen.

375. Ueber die symmetrischen Functionen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1880, 936.
376. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Siebel. Grun. Archiv LXV, 394. [Vergl. Bd. XXIV, Nr. 359.]
377. Neue Ableitung der Relationen zwischen den Potenzsummen der Gleichungswurzeln und den Gleichungscoefficienten. Farkas. Grun. Archiv LXV, 433.
378. Zur Theorie der Discriminanten. Netto. Crelle XC, 164.
379. Théorèmes généraux sur les équations algébriques. Laguerre. N. ann. math. XXXIX, 241.
380. Propriété des polynômes de M. Laguerre. Laurant. N. ann. math. XXXIX, 380.
381. Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles. Laguerre. N. ann. math. XXXIX, 161, 193.
382. Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles. Laguerre. N. ann. math. XXXIX, 224.
383. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 149.
384. Sur une classe d'équations qui a toutes ses racines réelles. Laguerre. Crelle LXXXIX, 389.
385. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades. Franke. Crelle XC, 102.
386. Ueber die cubischen und biquadratischen Gleichungen, für welche die zu ihrer Auflösung nöthigen Quadrat- und Cubikwurzelausziehungen alle rational auszuführen sind. Kummer. Berl. Akad.-Ber. 1880, 930.
387. Zurückführung der vollständigen Gleichung vierten Grades auf eine reciproke Gleichung zweiten Grades. Ligowski. Grun. Archiv LXV, 426.
388. Sur une propriété de certaines équations irréductibles attribuée à Vincent mais apartenant à Legendre. Realis. N. ann. math. XXXIX, 558.
389. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines. Laguerre. N. ann. math. XXXIX, 49, 97. — De Longchamps ibid. 71. — E. Lucas ibid. 145. — L. Levy ibid. 148. — Vénard ibid. 261. — Candèze ibid. 307.
390. Sur une application de la méthode de Sturm. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 76.
391. Ueber eine Eigenschaft der Resultante. Brill. Mathem. Annal. XVI, 345.
392. Sur un procédé d'élimination. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 202, 332.
393. Sur les équations linéaires. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 311, 356.
394. Déduire les rapports $\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}$ des deux équations $ax+by+cz=0$ et $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Lannes. N. ann. math. XXXIX, 510.

Vergl. Determinanten 277. Zahlentheorie 534.

H.

Hydrodynamik.

395. Some properties of the equations of hydrodynamics. Hill. Quart. Journ. math. XVII, 1, 168.
396. On the motion of water contained in certain cylindrical vessels, and on certain analytical theorems connected with that problem. Ferrers. Quart. Journ. math. XVII, 227.
397. On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid. Hicks. Quart. Journ. math. XVII, 194. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 436.]
398. On some cases of the varying motion of a viscous fluid. Stearn. Quart. Journ. math. XVII, 90.

Hyperbel.

399. Construction d'un point tel dans l'intérieur d'un triangle qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés on divise le triangle en trois quadrilatères de proportion donnée. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIX, 462.
400. Hyperbole lieu des milieux des droites qui joignent un à un les points de deux séries homographiques de points situés sur deux droites. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIX, 556.
401. Problème sur l'hyperbole équilatère. N. ann. math. XXXIX, 337.

I.

Invariantentheorie.

402. Ueber die simultanen Invarianten, aus denen sich die Resultante dreier ternärer quadratischer Formen zusammensetzt. Igel. Wien. Akad.-Ber. LXXVII, 783.
403. On the theorem of the finite number of the covariants of a binary quantic. Cayley. Quart. Journ. math. XVII, 137.
404. Sur quelques théorèmes relatif au développement des fonctions et aux covariants. Faà de Bruno. Crelle XC, 186.

Vergl. Formen 328. Functionen 336. Oberflächen zweiten Grades 452.

K.

Kegelschnitte.

405. Constructions diverses et solutions de problèmes graphiques relatifs aux coniques. Genty. N. ann. math. XXXIX, 216.
406. Ueber die von Möbius gegebenen Kriterien in der Theorie der Kegelschnitte. Hunyady. Crelle LXXXIX, 70.
407. Zur Theorie der Kegelschnitte. Rosanes. Mathem. Annal. XVII, 21.
408. Théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 397.
409. Sur trois coniques confocales deux à deux. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 401.
410. Metrische Formeln für das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten. S. Kantor. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 905.
411. On Gaskin and Plücker's properties of the orthocycle. Taylor. Quart. Journ. math. XVII, 134.
412. Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné. Laguerre. N. ann. math. XXXIX, 347.
413. Sur les foyers extérieurs au plan d'une conique. E. G. N. ann. math. XXXIX, 120.
414. Trouver le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. Bourguet. N. ann. math. XXXIX, 239.
415. Quadrilatère complet en relation avec une conique et propriété analogue relativement à une surface du second ordre. Bresson. N. ann. math. XXXIX, 475.
416. Sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques. Weill. N. ann. math. XXXIX, 253.

417. Étant donnés une conique $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ rapportée à ses axes et un point M sur cette conique, on fait passer un cercle par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point M. Le centre de ce cercle décrit une conique passant par l'origine des axes. N. ann. math XXXIX, 5, 331.

418. Un point d'une conique, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en ce point et les extrémités de l'un des axes sont sur une même circonférence. D'Ocagne. N. ann. math. XXXIX, 305. [Vergl. Nr. 417 und Bd. XXIV, Nr. 427.]

Vergl. Abbildung. Determinanten 272. Ellipse. Geschichte der Mathematik 371. Hyperbel. Kreis. Krümmung 428. Parabel.

Kettenbrüche.

Vergl. Quadratwurzel.

Kinematische Geometrie.

419. Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien. Schönemann. Crelle XC, 44.

420. Ueber einen fundamentalen Satz aus der kinematischen Geometrie des Raumes. Geiser. Crelle XC, 39.

421. Applications de géométrie cinématique plane. D'Ocagne. N. ann. math. XXXIX, 264, 289.

Kreis.

422. Neue Herleitung der Kreistangentengleichung. Hain. Grun. Archiv LXV, 112.

423. Die Steiner'sche Lösung der Malfatti'schen Aufgabe Petersen. Crelle LXXXIX, 127.

424. Théorème de Poncelet sur les polygones qui sont à la fois inscrits à une circonférence et circonscrits à une autre. Talayrach. N. ann. math. XXXIX, 280.

425. Polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux circonférences. Weill. N. ann. math. XXXIX, 57.

426. Théorème sur le quadrilatère inscrit-circonscrit. Droz. N. ann. math. XXXIX, 470.

427. Quadrilatère circonscriptible à deux circonférences. Lannes. N. ann. math. XXXIX, 508.

Vergl. Ellipse 309, 311. Geometrie (höhere) 359, 360. Kegelschnitte 411. Quadratur 477.

Krümmung.

428. Sur le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique. De Longchamps. N. ann. math. XXXIX, 68.

429. Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien. Marx. Mathem. Annal. XVII, 110.

430. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannichfaltigkeiten. Voss. Mathem. Annal. XVI, 129.

431. Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmaasses. Voss. Mathem. Annal. XVI, 571.

432. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung. Bianchi. Mathem. Annal. XVI, 577.

Vergl. Mannichfaltigkeiten 438.

Kugelfunctionen.

433. Zur Theorie der Kugelfunctionen. Bruns. Crelle XC, 322.

434. Ueber die Kugelfunction $P^n_{(\cos\gamma)}$ für ein unendliches n. Heine. Crelle XC, 329.

Vergl. Bestimmte Integrale 259.

L.

Logarithmen.

435. Berichtigung zu Bruhns' Logarithmentafeln. Wright. Astr. Nachr. XCIV, 95.

M.

Mannichfaltigkeiten.

436. Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. G. Cantor. Mathem. Annal. XVII, 355. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 492.]

437. Die Rechnung in den nicht-euklidischen Raumformen. Killing. Crelle LXXXIX, 265.

438. Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen. Hoppe. Grun. Archiv LXV, 373.
439. Bemerkungen, betreffend die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension. Hoppe. Grun. Archiv LXV, 423.
Vergl. Krümmung 430.

Mechanik.

440. Sur la composition des forces dans le plan. D'Ocagne. N. ann. math. XXXIX, 115.
441. Ueber das bifocal-veränderliche System. Burmester. Mathem. Annal. XVI, 89.
442. On the steady motion of a top and of a solid of revolution moving in infinite liquid. Greenhill. Quart. Journ. math. XVII, 86.
443. Sur la machine pneumatique. Rouché. N. ann. math. XXXIX, 42.
Vergl. Akustik. Astronomie. Attraction. Brachistochrone. Differentialgleichungen 285. Elasticität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Optik. Pendel. Potential. Schwerpunkt. Trajectorie. Wärmelehre.

N.

Normalen.

Vergl. Ellipse 309, 310. Ellipsoid. Kinematische Geometrie 419. Parabel 460.

O.

Oberflächen.

444. Zur Untersuchung der Fläche der Centra. Voss. Mathem. Annal. XVI, 560.
445. Zur Theorie der isostatischen Flächen. Weingarten. Crelle XC, 18.
446. Construction von Tangenten an die Berührungslinie einer Rotationsfläche und der ihr von einem Punkte aus umschriebenen Developpabeln. Drasch. Wien Akad.-Ber. LXXVII, 174.
447. Die Regelfläche vierten Grades mit zwei Doppelgeraden. Ameseder. Grun. Archiv LXV, 73.
448. Ueber rationale Regelflächen vierten Grades. Ameseder. Grun. Archiv LXV, 239.
449. On some forms of the equation of the wave surface. S. Roberts. Quart. Journ. math. XVII, 319.
Vergl. Abzählende Geometrie 224, 225. Differentialgleichungen 295. Geodäsie. Krümmung 429, 431, 432.

Oberflächen zweiten Grades.

450. Zur Theorie der Flächen zweiten Grades. Hunyady. Crelle LXXXIX, 47.
451. Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Contouren der Flächen zweiten Grades. Pelz. Wien. Akad.-Ber. LXXVII, 259. [Vergl. Bd. XXIII, Nr. 577.]
452. Sur certaines valeurs constantes dans des surfaces du second degré. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIX, 411.
453. Ueber den geometrischen Ort des Centrums der Collineation zwischen einer Nichtregelfläche zweiter Ordnung und einem System von Kugelflächen. Jeřábek. Grun. Archiv LXV, 161.
454. Propriété des courbes et des surfaces du second ordre homofocales. Koenigs. N. ann. math. XXXIX, 74.
455. Lieu décrit par le point de rencontre d'une droite avec le plan radical de deux sphères dont une est variable. Gambey. N. ann. math. XXXIX, 82.
Vergl. Ellipsoid. Kegelschnitte 415. Paraboloid. Sphärik.

Optik.

456. Theorie des leuchtenden Punktes. Voigt. Crelle LXXXIX, 288. — Kirchhoff ibid. XC, 34.
457. Zur Fresnel'schen Theorie der Diffraction. Voigt. Crelle LXXXIX, 322.

P.

Parabel.

458. Théorèmes sur la parabole. Weill. N. ann. math. XXXIX, 367, 442.
459. Courbes décrites au moyen d'une droite qui pivote autour du sommet d'une parabole. Robaglia. N. ann. math. XXXIX, 468.
460. Propriété de deux normales menées d'un point à une parabole. Dufaur. N. ann. math. XXXIX, 479.

487. Sur les puissances semblables des x premiers nombres. C. Henry. N. ann. math. XXXIX, 454. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 589.]
488. Die Bestimmung der Summe Σx^r. Ligowski. Grun Archiv LXV, 329.
489. Sur la série $\sum \frac{u_{n+2}}{u_{n+1} \cdot u_{n+3}}$ en ayant égard à l'équation $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}$. Arnaud. N. ann. math. XXXIX, 467.
490. Algebraical proof of the fractional series for the cotangent and cosecant. Glaisher. Quart. Journ. math. XVII, 211.
Vergl. Cylinderfunctionen 268, 270. Functionen 346. Sphärik 501. Taylor's Reihe.

Residuen.

491. Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy. Heine. Crelle LXXXIX, 19.

Riemann'sche Fläche.

492. Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppen und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. W. Dyck. Mathem. Annal. XVII, 473.
493. Ueber eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlecht 3 und die zugehörige Normalcurve vierter Ordnung. W. Dyck. Mathem. Annal. XVII, 510.

S.

Schwerpunkt.

494. Ueber den Schwerpunkt des Vierecks. Noeggerath. Grun. Archiv LXV, 218. — Jolmen ibid. 221. — Stoll ibid. 445.
495. Détermination algébrique très simple du centre de gravité du trapèze et du centre de gravité du tronc de pyramide à base quelconque. Dostor. Grun. Archiv LXV, 204.
496. Extension du théorème d'Hyppokrate et détermination du centre de gravité de ses lunules. Dostor. Grun. Archiv LXV, 193.

Singularitäten.

497. Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies. Brill. Mathem. Annal. XVI, 348.
498. Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. Biehler. N. ann. math. XXXIX, 492.
Vergl. Abbildung. Analytische Geometrie der Ebene 233, 234.

Sphärik.

499. Beiträge zur Sphärik. Meissel. Mathem. Annal. XVI, 529.
500. Lösung einer Classe von Aufgaben der Sphärik. Meissel. Grun. Archiv LXV, 429.
501. Darstellung der sechs Elemente eines sphärischen Dreiecks in Reihenform durch drei willkürliche Elemente. Meissel. Astr. Nachr. XCV, 69.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 241, 242. Cubatur 266. Elliptische Transcendenten 319. Zahlentheorie 536.

Stereometrie.

502. Ueber das Gesetz der Säulenverjüngung. Hain. Grun. Archiv LXV, 443.
503. Calculer les rayons des bases d'un cylindre et d'un cône droits qui soient égaux de hauteurs, de surfaces et de volumes. Leinekugel. N. ann. math. XXXIX, 513.
Vergl. Cubatur 265. Tetraeder.

T.

Taylor's Reihe.

504. Sur la série de Taylor. Amigues. N. ann. math. XXXIX, 105.

Tetraeder.

505. Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arètes opposées sont égales deux à deux. Lemoine. N. ann. math. XXXIX, 133.
506. Exercices sur le tétraèdre. Chéfik-Bey. N. ann. math. XXXIX, 403.

Thetafunctionen.

507. Zur Theorie der Transformation der Thetafunctionen. Frobenius. Crelle LXXXIX, 40.
508. Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Noether. Mathem. Annal. XVI, 270.

Trajectorie.

Trigonometrie.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

Unendlich.

W.

Wärmelehre.

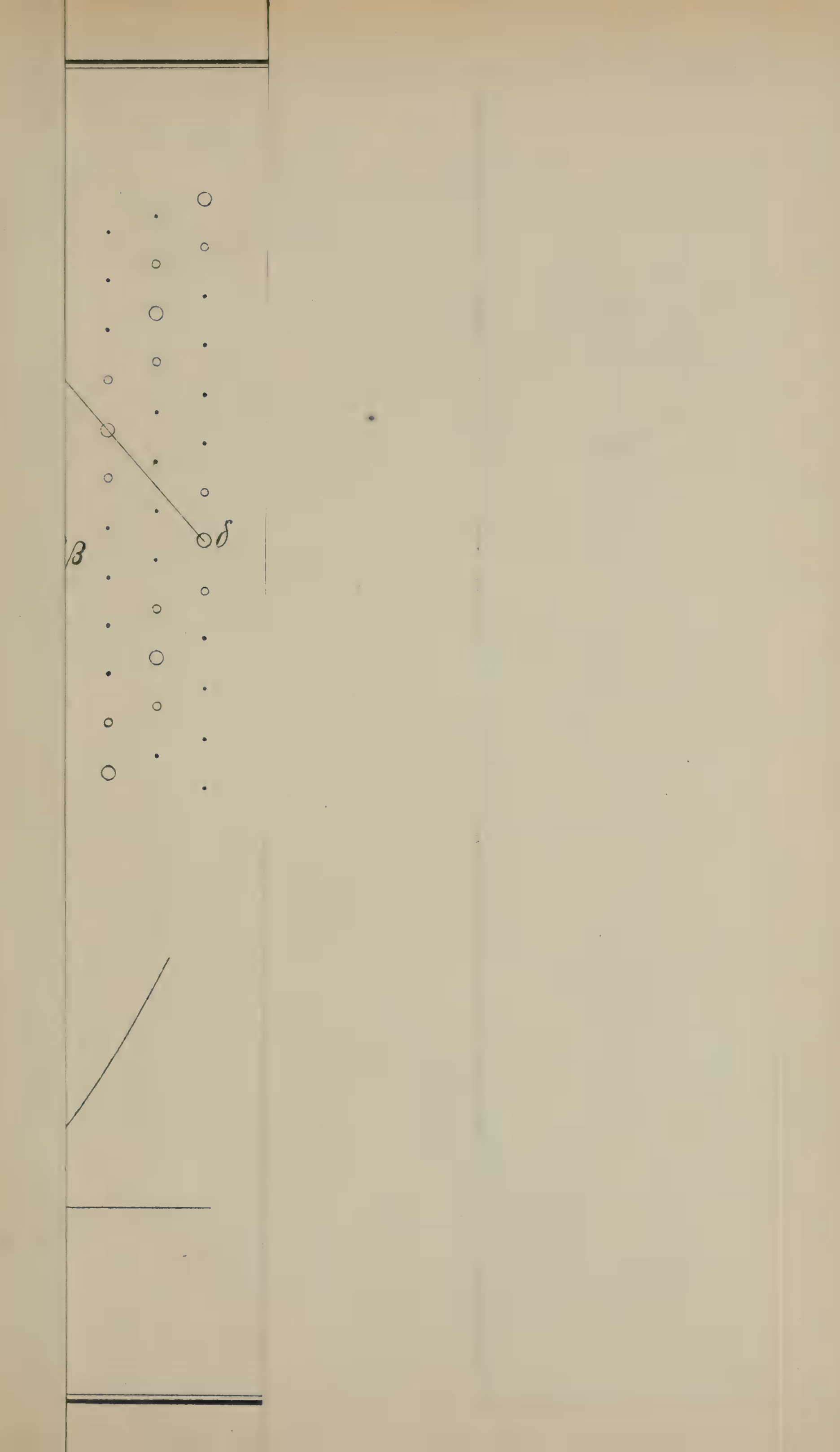
Wahrscheinlichkeitsrechnung.

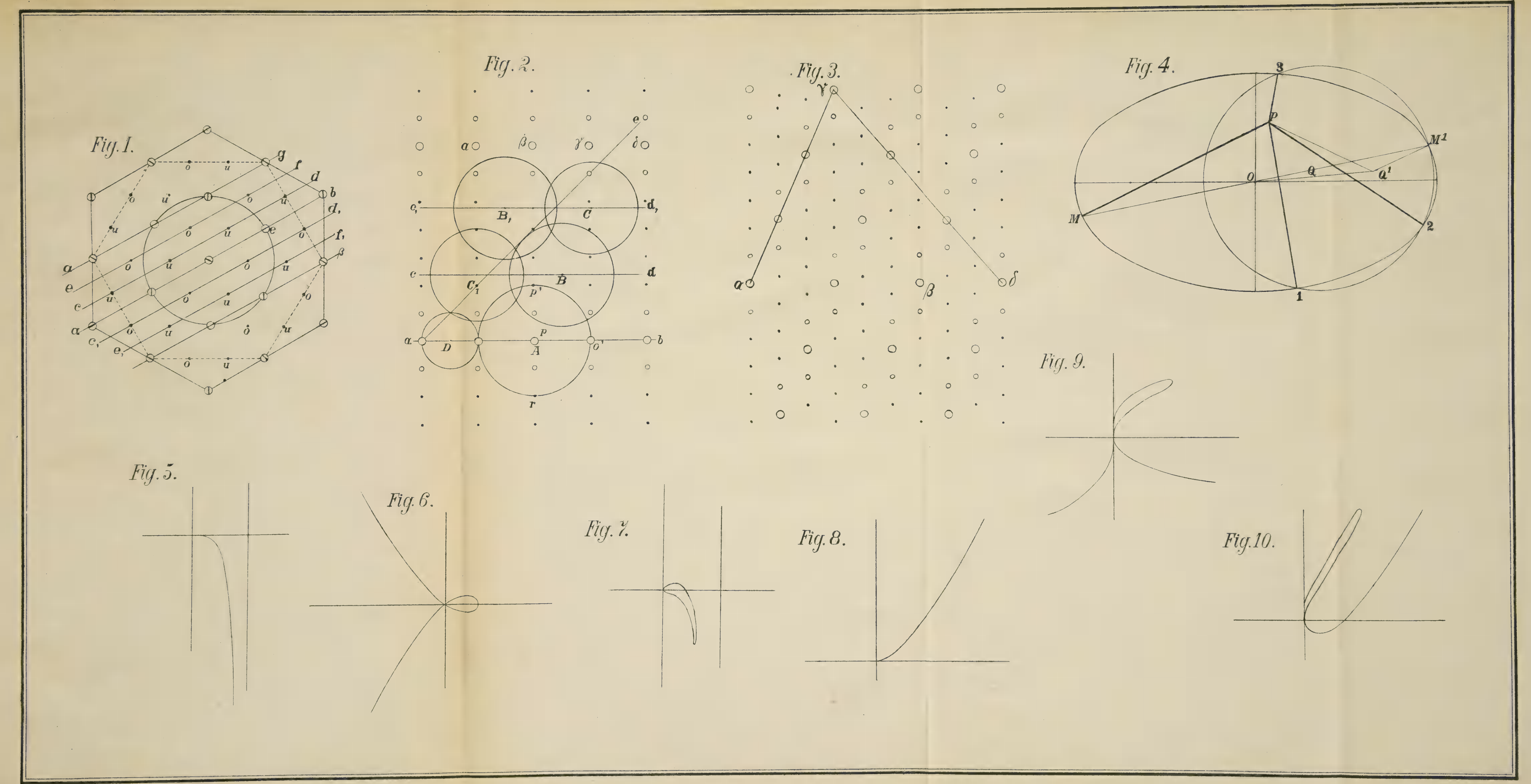
Z.

Zahlentheorie.

531. Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen. G. Cantor. Math. Annal. XVI, 583.
532. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1880, 686, 854.
533. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1880, 404.
534. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Kronecker. Berl. Akad.-Ber. 1880, 155.
535. On the theorems of the 2, 4, 8 and 16 squares. Cayley. Quart. Journ. math. XVII, 258. — S. Roberts ibid. 276. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 655.]
536. Rationale sphärische Dreiecke. Bessell. Grun. Archiv LXV, 363.
537. Praktische Methode zur numerischen Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in rationalen Zahlen. Kunerth. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 327.
538. Numerische Auflösung quadratischer Congruenzen für jeden einfachen Modul. Kunerth. Wien. Akad.-Ber. LXXVIII, 338.
539. Généralisation du théorème que le carré d'un nombre impair est la différence de deux nombres triangulaires premiers entre eux. C. Henry. N. ann. math. XXXIX, 517.
540. Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré la somme des carrés de deux entiers consecutifs. Lissencon. N. ann. math. XXXIX, 472.
541. Trouver un nombre ayant la double propriété d'être égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs et à celle des carrés de trois entiers consécutifs. Pisani. N. ann. math. XXXIX, 524.
542. Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 278.
543. Sur les cas généraux d'impossibilité de l'équation $x^3+y^3=Az^3$. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 206.
544. Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs. E. Lucas. N. ann. math. XXXIX, 89.
545. Trouver une troisième solution de l'équation $Ax^3+By^3+Cz^3=0$ deux solutions étant données. Sondat. N. ann. math. XXXIX, 458.
546. Décomposer le quadruple et le carré de $4p^6+27q^6$ en une somme de deux cubes. Fauquembergue. N. ann. math. XXXIX, 430.
547. Transformer $3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2[(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3]$ en une somme de trois cubes. Rochetti. N. ann. math. XXXIX, 459.
548. Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q tel que le produit p^2q soit la somme algébrique de n cubes entiers. Rochetti. N. ann. math. XXXIX, 431.
549. Trouver une solution de $x^4+abc^2y^4+cdx^2y^2=z^2$ au moyen d'une solution de $ax^4+by^4+dx^2y^2=cz^2$. Moret-Blanc. N. ann. math. XXXIX, 461.

Vergl. Formen. Gleichungen 386.


β
δ


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

